

УДК 621.391

ПЕРЕДАЧА ДВОИЧНЫХ СООБЩЕНИЙ СИМПЛЕКСНЫМИ СИГНАЛАМИ

В. А. Вершинин

Рыбинский государственный авиационный технический университет
им. П. А. Соловьева

Статья получена 13 сентября 2013 г., после доработки – 25 ноября 2013 г.

Аннотация. В работе рассматривается передача двоичных сообщений с использованием симплексных элементарных сигналов. Определена полоса частот, занимаемая сигналом на основе различных элементарных сигналов. Произведена оценка помехоустойчивости передачи. Исследована эффективность использования симплексных элементарных сигналов.

Ключевые слова: симплексные сигналы, полоса частот, помехоустойчивость.

Abstract: The paper considers the transmission of binary messages using simplex elementary signals. The frequency band of a signal on the basis of different elementary signals is defined. The estimation of the immunity of the transfer is made. The efficiency of use of simplex elementary signals is studied.

Key words: simplex signals, bandwidth, immunity to interference.

1. Введение

Под двоичным сообщением будем понимать последовательность элементов, каждый из которых имеет длительность T_0 и может принимать с равной вероятностью два значения. Перед передачей двоичное сообщение может делиться на блоки, каждый из которых состоит из k элементов. Таким образом, блок элементов двоичного сообщения имеет длительность $T = kT_0$ и может принимать $q = 2^k$ значений, вероятность каждого значения $1/q$. При отсутствии деления на блоки $k = 1$, $T = T_0$, $q = 2$. Каждому значению блока на выходе модулятора соответствует один из q элементарных сигналов. Сигнал на выходе модулятора можно представить в виде:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v_L(t - nT), \quad (1)$$

где $v_L(t - nT)$ – сигнал, соответствующий n -му блоку сообщения; t – время; L – номер элементарного сигнала ($L = 0, 1, \dots, q - 1$). Таким образом, $v_L(t - nT)$ является одним из следующих элементарных сигналов: $v_0(t - nT)$, $v_1(t - nT)$, ..., $v_{q-1}(t - nT)$. Длительность элементарного сигнала – величина временного интервала, за пределами которого отсутствуют ненулевые значения сигнала. Будем считать, что таким интервалом для сигнала $v_L(t)$ является интервал от $-T/2$ до $T/2$, и в дальнейшем элементарные сигналы будут задаваться только на этом интервале. Элементарные сигналы могут представлять собой прямоугольные импульсы или импульсы другой формы. От этого зависит полоса частот, занимаемая сигналом $s(t)$.

В качестве элементарных сигналов широко используются ортогональные сигналы [1]. Для этих сигналов

$$\int_{-T/2}^{T/2} v_i(t)v_j(t)dt = 0 \text{ при } i \neq j, \text{ и } \int_{-T/2}^{T/2} v_i^2(t)dt = W,$$

где $i = 0, 1, \dots, q - 1$; $j = 0, 1, \dots, q - 1$; W – энергия элементарного сигнала. Часто используются гармонические ортогональные сигналы следующего вида:

$$v_L(t) = A(-1)^L \cos 2\pi(K + L)t/T, \quad (2)$$

где A – амплитуда сигнала; K – целое положительное число, определяющее положение полосы частот, занимаемой сигналом $s(t)$. Множитель $(-1)^L$ вводится для исключения скачков значений при переходе от одного элементарного сигнала к другому. Это приводит к уменьшению полосы частот, занимаемой сигналом $s(t)$. Энергия этих элементарных сигналов $W = A^2T/2$.

В качестве элементарных сигналов можно использовать сигналы [2], для которых выполняются следующие условия:

$$\int_{-T/2}^{T/2} v_i(t)v_j(t)dt = -\frac{W}{q-1} \text{ при } i \neq j, \text{ и } \int_{-T/2}^{T/2} v_i^2(t)dt = W, \quad (3)$$

где W – энергия элементарного сигнала. При $q = 2$ эти сигналы являются противоположными. Обычно q таких сигналов формируются на основе $q - 1$ ортогональных функций: $u_0(t), u_1(t), \dots, u_{q-2}(t)$, при этом дается следующая геометрическая интерпретация. В пространстве размерностью $q - 1$ элементарные сигналы представляются q точками, которые являются вершинами симплекса. Поэтому сигналы, удовлетворяющие условиям (3) принято называть симплексными. Если использовать гармонические ортогональные функции вида: $u_0(t) = A \sin 2\pi K t/T$, $u_1(t) = A \cos 2\pi K t/T$, $u_2(t) = A \sin 2\pi(K + 1)t/T$, $u_3(t) = A \cos 2\pi(K + 1)t/T$, $u_4(t) = A \sin 2\pi(K + 2)t/T$, $u_5(t) = A \cos 2\pi(K + 1)t/T$, ..., то для $q = 2$ получаем следующие симплексные (противоположные) сигналы:

$$v_0(t) = A \sin 2\pi K t/T, \quad v_1(t) = -A \sin 2\pi K t/T. \quad (4)$$

Для $q = 4$ нетрудно получить симплексные сигналы:

$$\begin{aligned} v_0(t) &= A \sin 2\pi K t/T, \\ v_1(t) &= \frac{A}{3} \left[-\sin 2\pi K t/T + 2\sqrt{2} \sin 2\pi(K + 1)t/T \right], \\ v_2(t) &= \frac{A}{3} \left[-\sin 2\pi K t/T + \sqrt{6} \cos 2\pi K t/T - \sqrt{2} \sin 2\pi(K + 1)t/T \right], \\ v_3(t) &= \frac{A}{3} \left[-\sin 2\pi K t/T - \sqrt{6} \cos 2\pi K t/T - \sqrt{2} \sin 2\pi(K + 1)t/T \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Элементарные сигналы этого вида обладают следующим недостатком. При переходе от одного элементарного сигнала к другому может возникать скачок значения, что расширяет полосу частот, занимаемую сигналом $s(t)$.

Симплекс с q вершинами может существовать и в пространстве размерностью большей $q - 1$. В [3] предложено формировать q элементарных симплексных сигналов, удовлетворяющих (3), на основе q ортогональных функций $u_0(t), u_1(t), \dots, u_{q-1}(t)$ следующим образом:

$$v_L(t) = u_L(t) - \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} u_i(t). \quad (6)$$

Нетрудно показать, что энергия такого элементарного сигнала

$$W = W_u(q-1)/q, \text{ где } W_u = \int_{-T/2}^{T/2} u_i^2(t) dt. \text{ Если в качестве ортогональных функций}$$

использовать гармонические функции вида (2), т.е.

$$u_L(t) = A(-1)^L \cos 2\pi(K+L)t/T, \text{ то из (6)}$$

$$v_L(t) = A(-1)^L \cos 2\pi(K+L)t/T - \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} A(-1)^i \cos 2\pi(K+i)t/T. \quad (7)$$

Энергия этих элементарных сигналов $W = 0.5A_u^2T(q-1)/q$.

При $q = 4$ на основании (7)

$$v_0(t) = \frac{A}{4} [3 \cos 2\pi Kt/T + \cos 2\pi(K+1)t/T - \cos 2\pi(K+2)t/T + \cos 2\pi(K+3)t/T],$$

$$v_1(t) = \frac{A}{4} [-\cos 2\pi Kt/T - 3 \cos 2\pi(K+1)t/T - \cos 2\pi(K+2)t/T + \cos 2\pi(K+3)t/T],$$

$$v_2(t) = \frac{A}{4} [-\cos 2\pi Kt/T + \cos 2\pi(K+1)t/T + 3 \cos 2\pi(K+2)t/T + \cos 2\pi(K+3)t/T],$$

$$v_3(t) = \frac{A}{4} [-\cos 2\pi Kt/T + \cos 2\pi(K+1)t/T - \cos 2\pi(K+2)t/T - 3 \cos 2\pi(K+3)t/T].$$

На рис. 1а, 1б, 1в и 1г показаны временные зависимости для симплексных элементарных сигналов $v_0(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ и $v_3(t)$ соответственно при $K = 5$. К достоинствам этих сигналов следует отнести отсутствие скачков значений при переходе от одного элементарного сигнала к другому.

$S(f)$, где f – частота. При этом будем считать, что в полосе частот F должно быть сосредоточено 99% мощности сигнала $P = \int_0^{\infty} S(f)df$. Тогда

$$F = f_2 - f_1, \quad (8)$$

где f_1 и f_2 – нижняя и верхняя граничные частоты определяются из выражений: $\int_0^{f_1} S(f)df = 0.005P$; $\int_{f_2}^{\infty} S(f)df = 0.005P$.

Спектральная плотность мощности может быть определена для стационарных (в широком смысле) случайных сигналов с нулевым математическим ожиданием. Если математическое ожидание $v_L(t - nT)$, равное

$$\frac{1}{q} \sum_{L=0}^{q-1} v_L(t - nT) = 0, \quad (9)$$

то и математическое ожидание сигнала $s(t)$ будет нулевым. Для рассмотренных выше симплексных сигналов (4), (5) и (7) условие (9) выполняется. При этом [3]

$$S(f) = \frac{2}{qT} \sum_{L=0}^{q-1} |V_L(f)|^2, \quad (10)$$

где $V_L(f) = \int_{-T/2}^{T/2} v_L(t) e^{-j2\pi ft} dt$ – спектральная плотность сигнала $v_L(t)$.

Для элементарных сигналов (4) на основании (10)

$$|V_0(f)|^2 = |V_1(f)|^2 = \frac{A^2 T^2}{4} \left(\frac{\sin \pi(fT - K)}{\pi(fT - K)} - \frac{\sin \pi(fT + K)}{\pi(fT + K)} \right)^2,$$

$$S(f) = W \left(\frac{\sin \pi(fT - K)}{\pi(fT - K)} - \frac{\sin \pi(fT + K)}{\pi(fT + K)} \right)^2, \quad (11)$$

где $W = \frac{A^2 T}{2}$ – энергия элементарного сигнала.

Для элементарных сигналов (5), исходя из (10),

$$\begin{aligned}
 |V_0(f)|^2 &= \frac{A^2 T^2}{4} \left(\frac{\sin \pi(fT - K)}{\pi(fT - K)} - \frac{\sin \pi(fT + K)}{\pi(fT + K)} \right)^2, \\
 |V_1(f)|^2 &= \frac{A^2 T^2}{36} \left[\left(\frac{\sin \pi(fT - K)}{\pi(fT - K)} - \frac{\sin \pi(fT + K)}{\pi(fT + K)} \right) - \right. \\
 &\quad \left. - 2\sqrt{2} \left(\frac{\sin \pi(fT - K)}{\pi(fT - K)} - \frac{\sin \pi(fT + K)}{\pi(fT + K)} \right) \right]^2, \\
 |V_2(f)|^2 = |V_3(f)|^2 &= \frac{A^2 T^2}{36} \left[\left(\frac{\sin \pi(fT - K)}{\pi(fT - K)} - \frac{\sin \pi(fT + K)}{\pi(fT + K)} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{2} \left(\frac{\sin \pi(fT - K - 1)}{\pi(fT - K - 1)} - \frac{\sin \pi(fT + K + 1)}{\pi(fT + K + 1)} \right) \right]^2 + \\
 &\quad \left. + 6 \left(\frac{\sin \pi(fT - K)}{\pi(fT - K)} - \frac{\sin \pi(fT + K)}{\pi(fT + K)} \right)^2 \right], \\
 S(f) &= \frac{W}{3} \left[\left(\frac{\sin \pi(fT - K)}{\pi(fT - K)} - \frac{\sin \pi(fT + K)}{\pi(fT + K)} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\sin \pi(fT - K)}{\pi(fT - K)} + \frac{\sin \pi(fT + K)}{\pi(fT + K)} \right)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{\sin \pi(fT - K - 1)}{\pi(fT - K - 1)} - \frac{\sin \pi(fT + K + 1)}{\pi(fT + K + 1)} \right)^2 \right], \tag{12}
 \end{aligned}$$

где $W = \frac{A^2 T}{2}$ – энергия элементарного сигнала.

На рис. 2 показана зависимость S/W от fT для $K = 15$ при использовании элементарных сигналов (4), полученная на основании (11), а на рис. 3 – та же зависимость для элементарных сигналов (5), полученная с помощью (12).

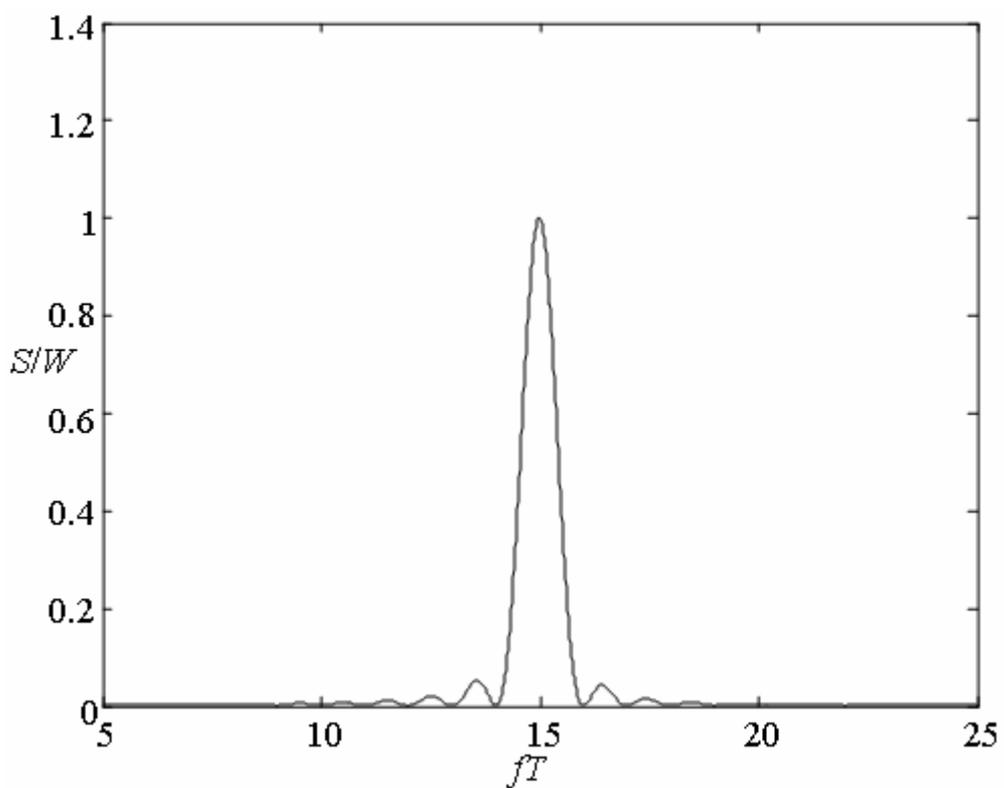


Рис. 2. Спектральная плотность мощности для сигналов (4)

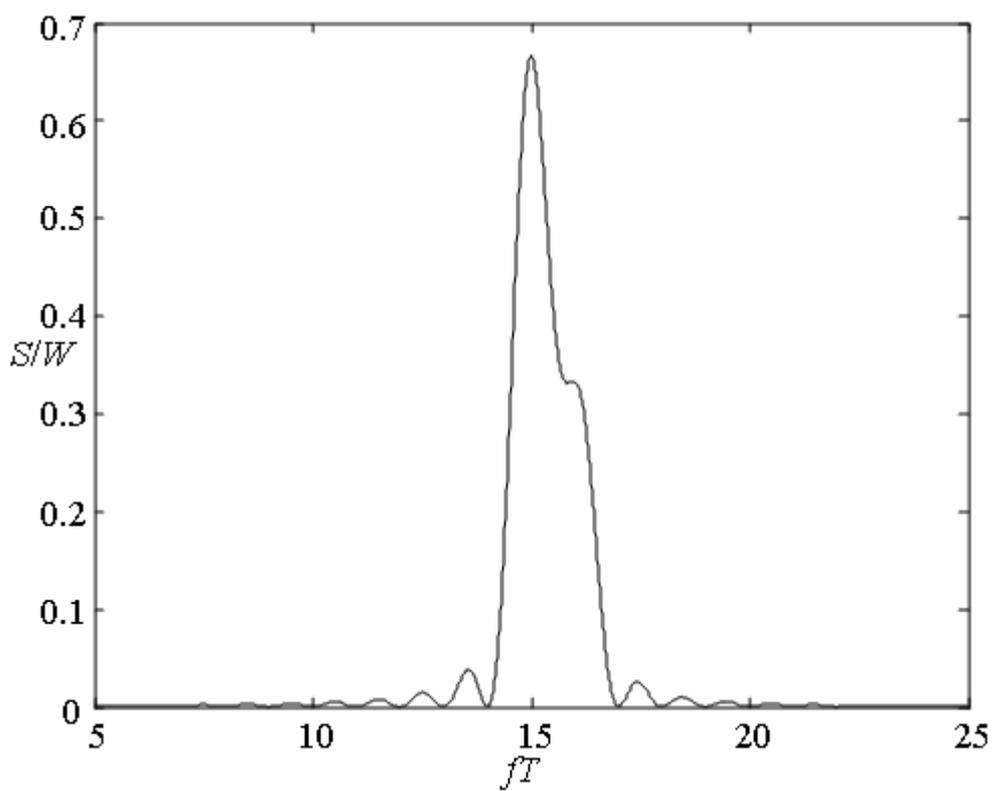


Рис. 3. Спектральная плотность мощности для сигналов (5)

Для элементарных сигналов (7)

$$\begin{aligned}
 |V_L(f)|^2 &= \frac{A^2 T^2}{4} \left[(-1)^L \left(\frac{\sin \pi(fT - K - L)}{\pi(fT - K - L)} + \frac{\sin \pi(fT + K + L)}{\pi(fT + K + L)} \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \left(\frac{\sin \pi(fT - K - i)}{\pi(fT - K - i)} + \frac{\sin \pi(fT + K + i)}{\pi(fT + K + i)} \right) \right]^2, \\
 S(f) &= \frac{W}{q-1} \sum_{L=0}^{q-1} \left[(-1)^L \left(\frac{\sin \pi(fT - K - L)}{\pi(fT - K - L)} + \frac{\sin \pi(fT + K + L)}{\pi(fT + K + L)} \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{1}{q} \sum_{i=0}^{q-1} (-1)^i \left(\frac{\sin \pi(fT - K - i)}{\pi(fT - K - i)} + \frac{\sin \pi(fT + K + i)}{\pi(fT + K + i)} \right) \right]^2, \tag{13}
 \end{aligned}$$

где $W = \frac{A^2 T(q-1)}{2q}$ – энергия элементарного сигнала. На рис. 4 и 5 показаны зависимости S/W от fT , полученные с использованием (13) для $K=15$, при $q=2$ и $q=4$ соответственно.

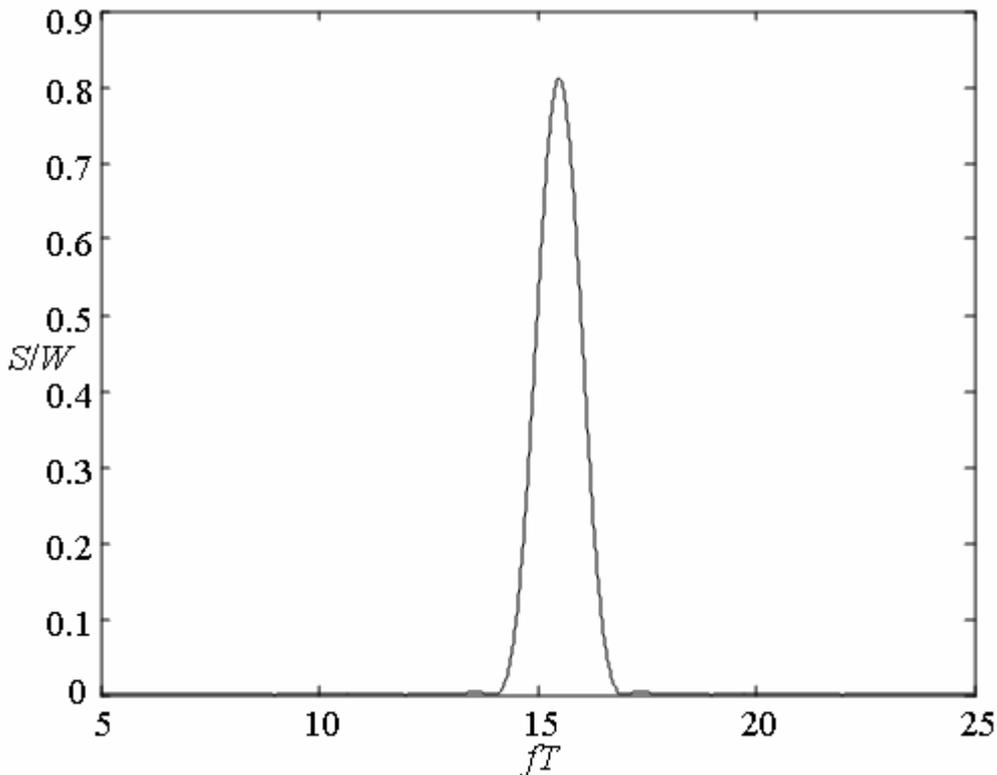


Рис. 4. Спектральная плотность мощности для сигналов (7) при $q=2$

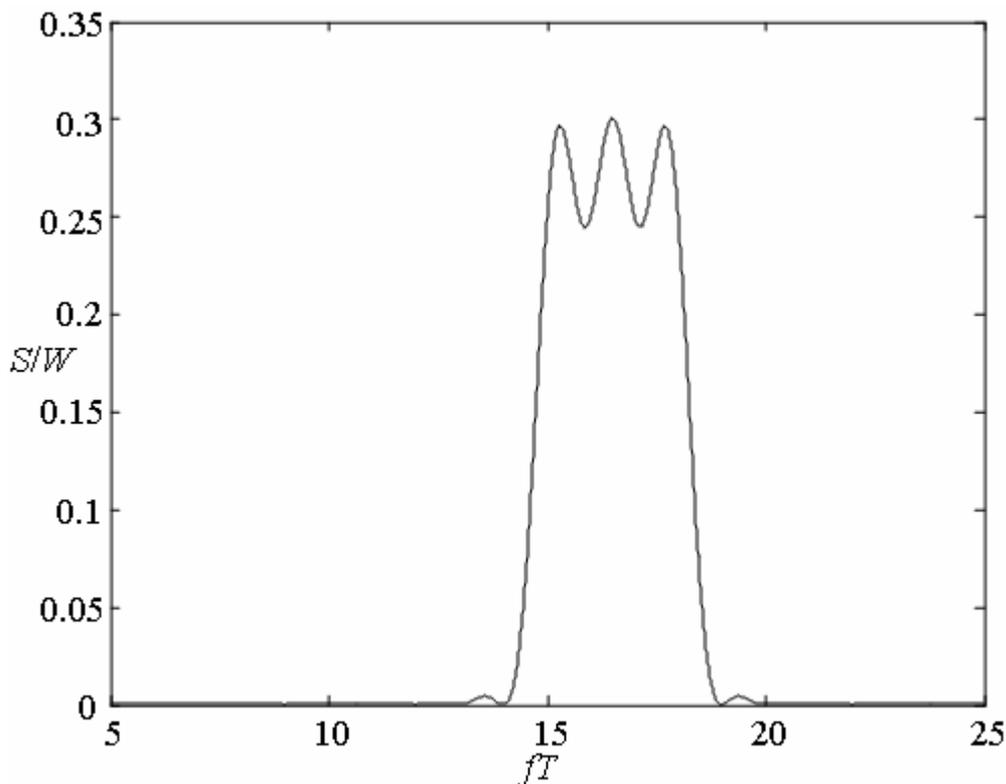


Рис. 5. Спектральная плотность мощности для сигналов (7) при $q = 4$

Для $K = 15$ на основании (11), (12) и (8) можно получить значение занимаемой полосы частот F при использовании элементарных сигналов (4) и (5) соответственно $14.74/T$ и $17.28/T$.

При использовании элементарных сигналов (7) и $K = 15$ на основании (13) и (8) для значений q равных 2, 4 и 8 получено значение занимаемой полосы частот F соответственно $2.36/T$, $4.35/T$ и $8.27/T$.

Ортогональные сигналы вида (2) свойством (9) не обладают. В этом случае для оценки полосы частот, занимаемой сигналом, необходимо применять другие методы. В [3] для сигналов этого вида получены значения занимаемой полосы частот практически совпадающие со значениями, полученными выше для сигналов (7).

Таким образом, сигнал $s(t)$ на основе элементарных сигналов вида (4) и (5) занимает в несколько раз более широкую полосу частот, чем сигнал на основе симплексных элементарных сигналов (7) или сигнал на основе ортогональных

сигналов (2). Кроме того, поскольку $T = kT_0 = T_0 \log_2 q$, при использовании элементарных сигналов (7) и (2) переход от передачи элементов двоичного сообщения с $q = 2$ (отсутствует деление на блоки) к передаче с $q = 4$ (сообщение делится на блоки по два элемента) не приводит к увеличению полосы частот, занимаемой сигналом.

3. Помехоустойчивость

Будем полагать, что на сигнал $s(t)$, определяемый согласно (1), в линии связи воздействует аддитивная помеха $n(t)$ в виде белого шума с односторонней спектральной плотностью мощности N . Поскольку сигнал $s(t)$ представляет собой последовательность не перекрывающихся во времени элементарных сигналов, то достаточно рассмотреть обработку сигнала на входе демодулятора, соответствующего передаче какого-либо одного блока элементов сообщения:

$$z(t) = v_L(t) + n(t). \quad (14)$$

Демодулятор осуществляет обработку сигнала (14), в результате которой должно быть принято решение, какой из q элементарных сигналов $v_0(t)$, $v_1(t)$, ..., $v_{q-1}(t)$ был передан, и, следовательно, какое значение имеет принятый блок элементов двоичного сообщения. Фактически в результате обработки в демодуляторе определяется номер передаваемого элементарного сигнала, который будем обозначать L' ($L' = 0, 1, \dots, q - 1$). Если L' не совпадает с L , то имеет место ошибка демодуляции. Оптимальный алгоритм обработки сигнала (14), обеспечивающий минимальную вероятность ошибки демодуляции при использовании элементарных сигналов с одинаковой энергией имеет вид [1]:

$$L' = \text{Arg max}_j \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} z(t)v_j(t)dt \right\}. \quad (15)$$

По этому алгоритму сначала вычисляются значения $\int_{-T/2}^{T/2} z(t)v_j(t)dt$ при $j = 0, 1, \dots, q - 1$. Затем определяется j , которому соответствует максимальное из

вычисленных значений, и это j присваивается L' .

На рис. 6 показана структура устройства, реализующего алгоритм (15) при $q = 2$. Для других значений q устройство будет иметь q ветвей, каждая из которых состоит из умножителя и интегратора, а решающее устройство будет иметь q входов. Решающее устройство оценивает значения входных сигналов в момент времени $t = T/2$, выбирает максимальное из них и принимает решение о значении L' .

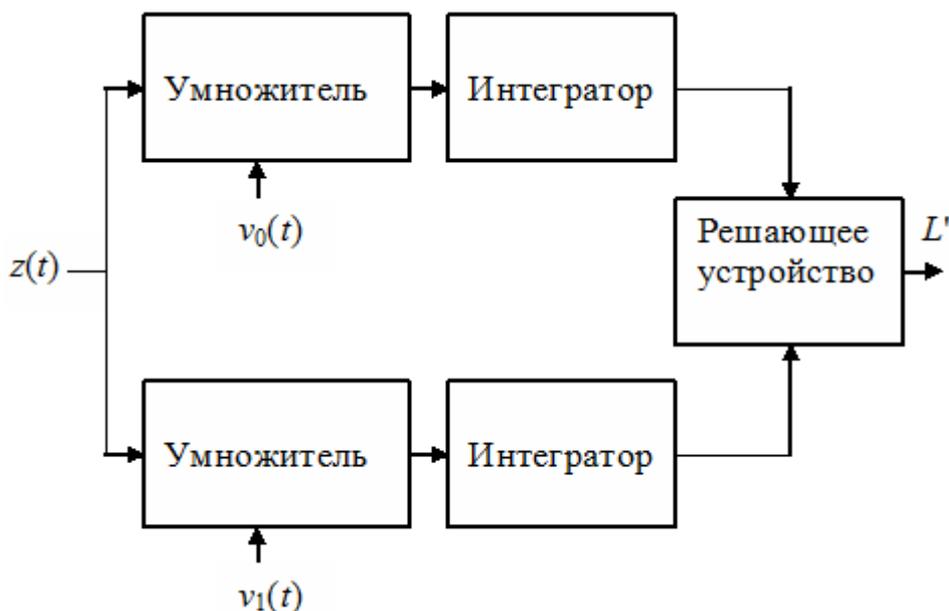


Рис. 6. Структура оптимального устройства при $q = 2$

При использовании ортогональных элементарных сигналов (2) вероятность ошибки демодуляции [1]

$$p = 1 - \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)]^{q-1} \exp\left[-(x - \sqrt{2h^2})^2/2\right] dx, \quad (16)$$

где $F(x) = \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^x \exp(-y^2/2) dy$ – функция ошибок;

$h^2 = W/N = kW_0/N = kh_0^2 = h_0^2 \log_2 q$; W_0 – энергия, затрачиваемая на передачу одного элемента двоичного сообщения; $h_0^2 = W_0/N$. При $q = 2$ (16) принимает вид: $p = 1 - F(h)$.

Если используются симплексные элементарные сигналы, то вероятность ошибки [2]

$$p = 1 - \left(1/\sqrt{2\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} [F(x)]^{q-1} \exp\left[-\left(x - \sqrt{2h^2 q/(q-1)}\right)^2 / 2\right] dx, \quad (17)$$

При $q=2$ сигналы (6) являются противоположными и (17) принимает вид: $p = 1 - F(\sqrt{2}h)$. Для заданного значения q и h_0 симплексные элементарные сигналы обеспечивают минимальную вероятность ошибки.

Вероятность ошибки демодуляции p фактически является вероятностью ошибки при приеме блока элементов двоичного сообщения. Если обозначить p_0 – вероятность ошибки при приеме элемента двоичного сообщения, то можно записать [1], что $1 - p = (1 - p_0)^k$, откуда

$$p_0 = 1 - (1 - p)^{1/k}. \quad (18)$$

При $p \ll 1$ можно считать $p_0 \approx p/k$

На рис. 7 показаны зависимости p_0 от h_0^2 для ортогональных элементарных сигналов при различных значениях q , полученные по формуле (18) и (16), а на рис 8 – те же зависимости для симплексных сигналов, полученные по формуле (18) и (17). На рисунках значения p_0 , полученные при $h_0^2 = 0, 2, 4, \dots, 16$, для наглядности соединены отрезками прямых.

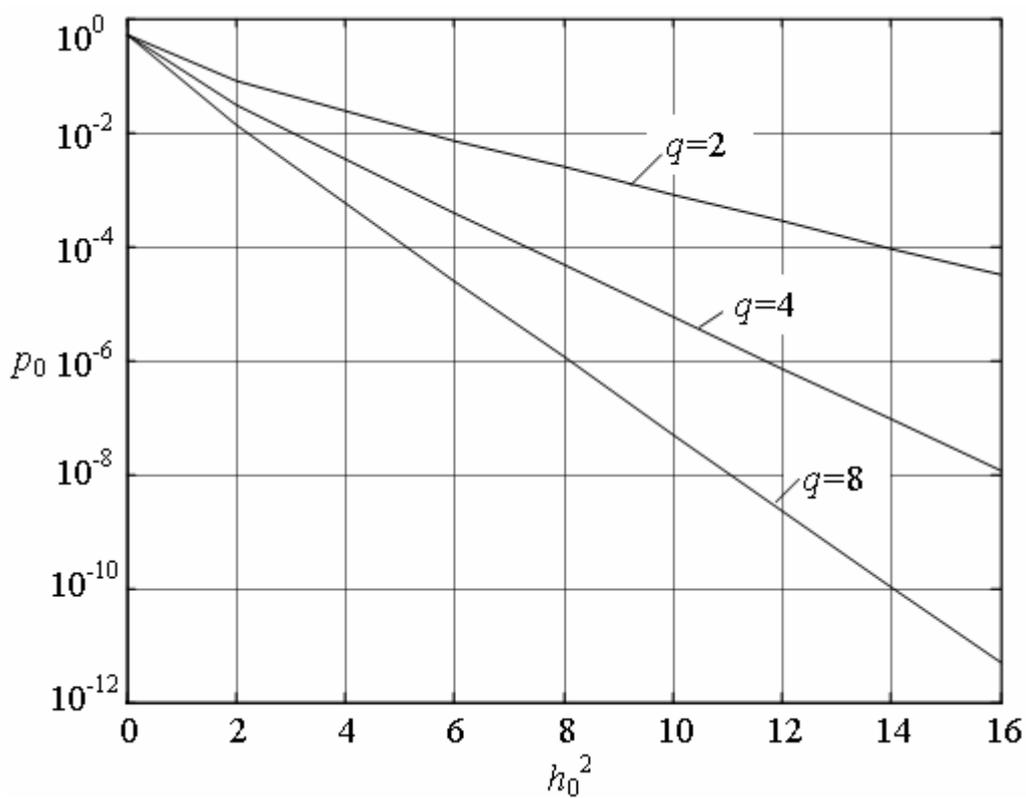


Рис. 7. Вероятность ошибки для ортогональных сигналов

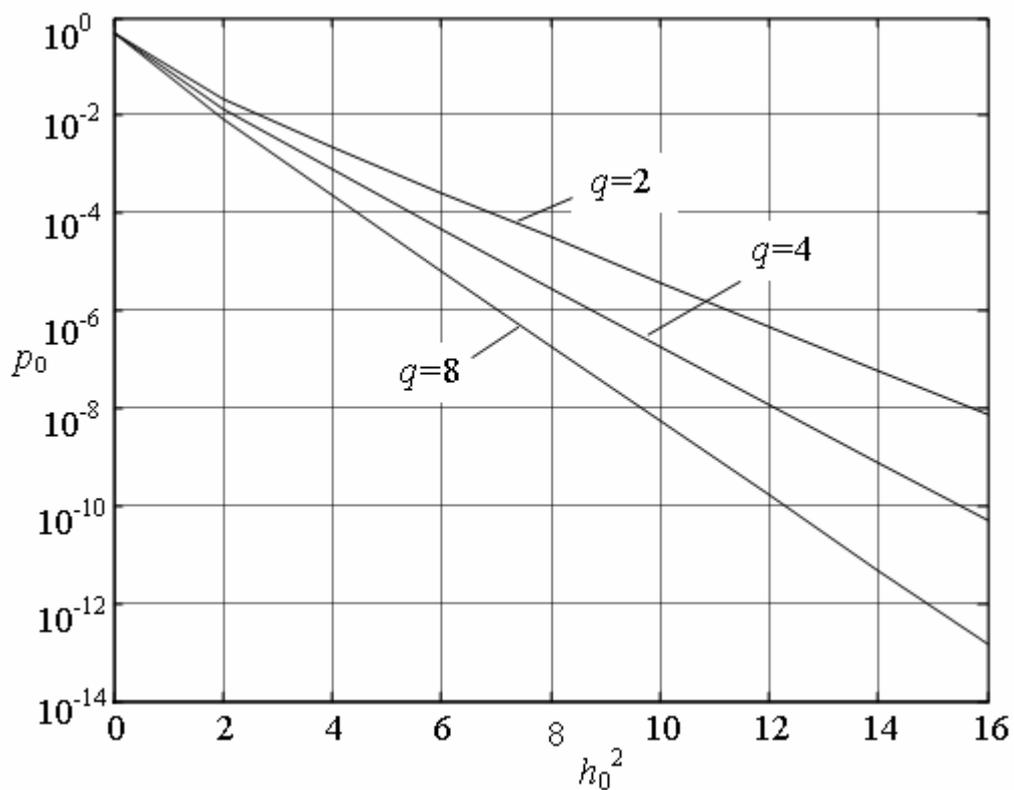


Рис. 8. Вероятность ошибки для симплексных сигналов

Как следует из рис. 7 и 8, вероятность ошибки p_0 при фиксированном значении h_0^2 с ростом q уменьшается. Это связано с увеличением энергии элементарного сигнала $W = W_0 \log_2 q$ за счет увеличения его длительности. Отметим, что фиксированное значение h_0^2 означает неизменность энергии, затрачиваемой на передачу элемента двоичного сообщения.

4. Выводы

Использование симплексных элементарных сигналов вида (7) позволяет получить сигнал, занимающий сравнительно узкую полосу частот. Эти элементарные сигналы целесообразно применять при $q = 4$, поскольку в этом случае существенно уменьшается вероятности ошибки p_0 без увеличения полосы частот, занимаемой сигналом, по сравнению с $q = 2$.

Литература

1. Теория электрической связи: Учебник для вузов / А.Г. Зюко, Д.Д. Кловский, В.И. Коржик, М.В. Назаров; Под ред. Д.Д. Кловского. – М. : Радио и связь, 1998. – 432 с.
2. Коржик В.И. и др. Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений: Справочник/ Коржик В.И., Финк Л.М., Щелкунов К.Н.: Под ред. Л.М. Финка.– М.: Радио и связь, 1981.– 232 с.
3. Передача дискретных сообщений/ Вершинин В.А. Рыбинская государственная авиационная технологическая академия им. П.А. Соловьева. Рыбинск, 2002.– 82 с.– Деп. в ВИНТИ 17.12. 2002 г., № 2196-В2002