

УДК 517.958; 621.372.8

## ИССЛЕДОВАНИЕ КИРАЛЬНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. Н. Боголюбов, Ю. В. Мухартова, Гао Цзесин

физический факультет МГУ имени М.В. Ломоносова, кафедра математики

Получена 27 января 2011 г.

**Аннотация.** В работе рассмотрены две задачи: спектральная задача в области с киральным заполнением и начально-краевая задача о возбуждении электромагнитных колебаний в области с неоднородным киральным заполнением. Получено характеристическое уравнение для собственных частот сферического кирального резонатора и вид собственных полей. Для начально-краевой задачи предложена обобщенная постановка, которая в дальнейшем может быть использована для численного решения задач рассматриваемого типа. Доказано существование и единственность обобщенного решения.

**Ключевые слова:** киральные среды, сферический резонатор, собственные частоты, задача возбуждения.

**Abstract.** In this paper two problems are considered. The first one is a spectral problem for the area with uniform chiral filling. The second one is the initial-boundary problem of excitation of oscillations in a region with a nonhomogeneous chiral filling. The dispersive equation and the eigenfields are obtained for a spherical chiroresonator. For the initial-boundary problem a generalized formulation, that can be further utilized for the numerical solution, is proposed. The existence and uniqueness of a generalized solution is proved.

**Key words:** chiral media, spherical resonator, eigenvalues, initial-boundary problem.

### **Введение.**

В настоящее время в радиофизике все больший интерес вызывает применение метаматериалов, с использованием которых возможно создание систем и устройств с уникальными свойствами. В частности, большой интерес

вызывает создание систем, использующие свойства бианизотропных и киральных сред. Теоретическое исследование таких систем методами математической физики представляет весьма важную и интересную задачу. Можно выделить два класса подобных задач: спектральные задачи, заключающиеся в исследовании резонаторных систем с киральным заполнением, и начально-краевые задачи возбуждения, в которых исследуются процессы возбуждения различных волноведущих систем с киральным заполнением и процессы распространения электромагнитных волн в подобных системах.

Естественные киральные среды были известны с начала 19 века. Термин "киральный" введен Уильямом Томсоном и означает свойство объекта не совмещаться со своим зеркальным отображением (в плоском зеркале) ни при каких перемещениях и вращениях. Естественными киральными объектами являются молекулы сахаров, аминокислот, ДНК и органических полимеров. К числу искусственных киральных объектов можно отнести спирали, лист Мебиуса, неправильный тетраэдр и т.д. [1] – [3]. Известно [4], что в случае киральной среды, изготовленной при помощи произвольным образом ориентированных и равномерно распределенных в некиральном веществе проволочных пружинок, потерями в которых можно пренебречь, материальные уравнения для гармонических по времени полей ( $e^{-i\omega t}$ ) имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i \xi \mathbf{B},$$

$$\mathbf{H} = i \xi \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{B},$$

где  $\varepsilon$ ,  $\mu$ ,  $\xi$  – действительные постоянные, представляющие собой диэлектрическую проницаемость, магнитную проницаемость и киральный адмитанс (параметр киральности) среды соответственно. Более того, как было показано в работе [5], эти материальные уравнения остаются справедливыми для любой киральной среды без потерь, построенной из киральных объектов произвольной формы.

Первая задача, рассмотренная в данной работе, посвящена исследованию электромагнитных экранированных резонаторов, заполненных однородным

киральным веществом. Сферические и цилиндрические резонаторы находят широкое применение в различных областях науки и техники [6]-[8]. Отметим, что математическое решение задачи для сферических резонаторов, заполненных обычной некиральной средой, было получено достаточно давно [9]-[11]. Поскольку в последние годы наблюдается особое внимание к искусственным киральным средам микроволнового диапазона, в которых киральность уже не является малой поправкой, то в связи с этим представляется интересным обобщить эти решения на случай кирального резонатора. В работе предложен алгоритм расчета таких систем. В качестве примера исследован сферический киральный резонатор, для которого получено характеристическое уравнение и вид собственных полей. Показано, что в таком резонаторе могут формироваться только гибридные собственные колебания, чистые E- и H-колебания не возбуждаются.

Вторая задача, рассмотренная в работе, заключается в исследовании процесса возбуждении электромагнитных колебаний заданным распределением зарядов и токов в области с неоднородным киральным заполнением. Область, в которой рассматривается задача, может быть либо конечной с идеально проводящей ограничивающей поверхностью, либо представлять собой дополнение к идеально проводящему ограниченному телу. Вводится специальное функциональное пространство, в котором формулируется обобщенная постановка исследуемой начально-краевой задачи. На основе метода Галёркина доказано существование и единственность слабого решения данной задачи.

### **Спектральная задача: ограниченная область с киральным заполнением.**

Рассмотрим систему уравнений Максвелла в однородной киральной среде, которая характеризуется материальными уравнениями

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + i\zeta \mathbf{B}, \quad \mathbf{H} = i\zeta \mathbf{E} + \mu^{-1} \mathbf{B}, \quad (1)$$

где  $\varepsilon$ ,  $\mu$ , и  $\xi$  – константы. С учетом материальных уравнений для полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  получаем систему

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} (\varepsilon + \xi^2 \mu) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{i \xi \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{i \xi \mu}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \mu \operatorname{div} \mathbf{H} - i \xi \mu \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, \\ (\varepsilon + \xi^2 \mu) \operatorname{div} \mathbf{E} + i \xi \mu \operatorname{div} \mathbf{H} &= 4\pi \rho. \end{aligned}$$

На границе раздела двух киральных сред с параметрами  $\varepsilon_1$ ,  $\mu_1$ ,  $\xi_1$  и  $\varepsilon_2$ ,  $\mu_2$ ,  $\xi_2$  соответственно выполняются соотношения

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{surf}}, \\ [\mathbf{n}, (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)] &= 0, \\ \mu_1 H_{1,n} - i \xi_1 \mu_1 E_{1,n} &= \mu_2 H_{2,n} - i \xi_2 \mu_2 E_{2,n}, \\ \{(\varepsilon_1 + \xi_1^2 \mu_1) E_{1,n} + i \xi_1 \mu_1 H_{1,n}\} - \{(\varepsilon_2 + \xi_2^2 \mu_2) E_{2,n} + i \xi_2 \mu_2 H_{2,n}\} &= 4\pi \rho_{\text{surf}}, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{n}$  - единичный вектор нормали к поверхности, направленный из второй среды в первую,  $\mathbf{j}_{\text{surf}}$  - плотность поверхностного тока, и  $\rho_{\text{surf}}$  - плотность поверхностного заряда.

Если вторая среда является идеальным проводником и поле внутри нее равно нулю, на границе выполняются условия идеально проводящей стенки:

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}, \mathbf{H}] &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{surf}}^{\text{ind}}, \\ [\mathbf{n}, \mathbf{E}] &= 0, \\ \mu (H_n - i \xi E_n) &= 0, \\ (\varepsilon + \xi^2 \mu) E_n + i \xi \mu H_n &= 4\pi \rho_{\text{surf}}^{\text{ind}}, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\mathbf{j}_{\text{surf}}^{\text{ind}}$  - плотность наведенного поверхностного тока, и  $\rho_{\text{surf}}^{\text{ind}}$  - плотность наведенного поверхностного заряда.

Рассмотрим теперь достаточно общую спектральную задачу. Предположим, что некоторая область  $V$  с граничной идеально проводящей

поверхностью  $\Sigma$  заполнена однородным киральным веществом, которое описывается уравнениями (1). Для гармонически зависящих от времени полей  $E, H \propto e^{-i\omega t}$  получаем краевую задачу

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{-i\omega}{c} (\varepsilon + \xi^2 \mu) \mathbf{E} + \frac{\omega \xi \mu}{c} \mathbf{H},$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega \mu}{c} \mathbf{H} + \frac{\omega \xi \mu}{c} \mathbf{E},$$

$$\mu \operatorname{div} \mathbf{H} - i \xi \mu \operatorname{div} \mathbf{E} = 0,$$

$$(\varepsilon + \xi^2 \mu) \operatorname{div} \mathbf{E} + i \xi \mu \operatorname{div} \mathbf{H} = 0,$$

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = 0.$$

В отличие от случая обычной некиральной среды, полученные уравнения оказываются связанными. Тем не менее, можно ввести такие линейные комбинации векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{u} = -\mathbf{E} \sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu} + i \mathbf{H} \sqrt{\mu},$$

$$\mathbf{v} = -i \mathbf{E} \sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu} + \mathbf{H} \sqrt{\mu},$$

что уравнения для функций  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  окажутся несвязанными:

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \frac{\omega}{c} (\xi \mu - \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2 \mu)}) \cdot \mathbf{u}, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \frac{\omega}{c} (\xi \mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2 \mu)}) \cdot \mathbf{v}, \quad (4)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (6)$$

Определённая сложность решения рассматриваемой спектральной задачи связана с тем, что для векторов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  нельзя получить на границе  $\Sigma$  условия, не содержащие наведенных токов и зарядов, так как они оба содержат в качестве слагаемого вектор магнитного поля  $\mathbf{H}$ . Тем не менее, можно предложить следующий алгоритм исследования собственных частот и собственных колебаний кирального резонатора. Сначала строится общее решение системы однородных уравнений (3-6). Далее векторы  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  нужно выразить через найденные векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  и подставить их в однородные граничные условия.

Это позволит получить характеристическое уравнение для нахождения собственных частот  $\omega$ .

### Спектральная задача: сферический киральный резонатор.

В данном разделе предложенная методика применяется для исследования сферического резонатора с киральным заполнением. Пусть область  $V$  представляет собой шар радиуса  $R$  с идеально проводящей границей. Находим решение  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  системы однородных уравнений (3-6), записанных в сферических координатах. Обозначим через  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  комплексные амплитуды полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Нетрудно убедиться, что с векторами векторы  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$  связаны  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  следующим образом

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu}} (i\mathbf{v} - \mathbf{u})$$

$$\mathbf{h} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} (\mathbf{v} - i\mathbf{u})$$

В результате получаем общее решение вида

$$e_\varphi^{nm} = \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu}} \left( A_{nm} \frac{k_2 \sqrt{r}}{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + B_{nm} \frac{k_1 \sqrt{r}}{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} +$$

$$+ \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu}} \frac{m}{r \sin \theta} \frac{d}{dr} \left( A_{nm} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) - B_{nm} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases}$$

$$e_\theta^{nm} = \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu}} \frac{m\sqrt{r}}{r \sin \theta} \left( A_{nm} k_2 J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + B_{nm} k_1 J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases} -$$

$$- \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( A_{nm} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) - B_{nm} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$$

$$e_r^{nm} = -\frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu}} \frac{n(n+1)}{r^2} \sqrt{r} \left( A_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) - B_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}$$

и

$$\begin{aligned}
 h_{\varphi}^{nm} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \left( A_{nm} \frac{k_2 \sqrt{r}}{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) - B_{nm} \frac{k_1 \sqrt{r}}{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{m}{r \sin \theta} \frac{d}{dr} \left( A_{nm} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + B_{nm} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases} \\
 h_{\theta}^{nm} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{m \sqrt{r}}{r \sin \theta} \left( A_{nm} k_2 J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) - B_{nm} k_1 J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases} - \\
 &- \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( A_{nm} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + B_{nm} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} \\
 h_r^{nm} &= -\frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{n(n+1)}{r^2} \sqrt{r} \left( A_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 r) + B_{nm} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 r) \right) P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases}
 \end{aligned}$$

В этих выражениях введены обозначения  $k_1 = \frac{\omega}{c} \left( -\xi\mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)} \right)$  и

$$k_2 = \frac{\omega}{c} \left( \xi\mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)} \right).$$

Поскольку поверхность шара является идеальным проводником, то для вектора  $\mathbf{e}$  должно выполняться граничное условие равенства нулю тангенциальной составляющей  $[\mathbf{r}, \mathbf{e}]|_{r=R} = 0$ . Потребуем, чтобы компонента  $e_{\varphi}^{nm}$  обращалась в нуль при  $r = R$ . Для этого должна быть справедлива следующая однородная система уравнений

$$\begin{cases} A_{nm} k_2 J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R) + B_{nm} k_1 J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R) = 0 \\ \frac{d}{dR} \left( A_{nm} \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}(k_2 R) - B_{nm} \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}(k_1 R) \right) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

Но если система уравнений (7) справедлива, то компонента  $e_{\theta}^{nm}$  также обращается в нуль при  $r = R$ . Отметим, что при этом автоматически выполняется условие (2) на нормальные составляющие векторов  $\mathbf{e}$  и  $\mathbf{h}$ .

Однородная система (7) имеет нетривиальное решение только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Отсюда получается

характеристическое уравнение для нахождения собственных частот  $\omega_{np}$  сферического кирального резонатора:

$$\alpha_2 J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega}{c}\alpha_2 R\right) \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega}{c}\alpha_1 R\right) \right) + \alpha_1 J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega}{c}\alpha_1 R\right) \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\omega}{c}\alpha_2 R\right) \right) = 0 \quad (8)$$

где  $\alpha_1 = -\xi\mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)}$  и  $\alpha_2 = \xi\mu + \sqrt{\mu(\varepsilon + \xi^2\mu)}$ .

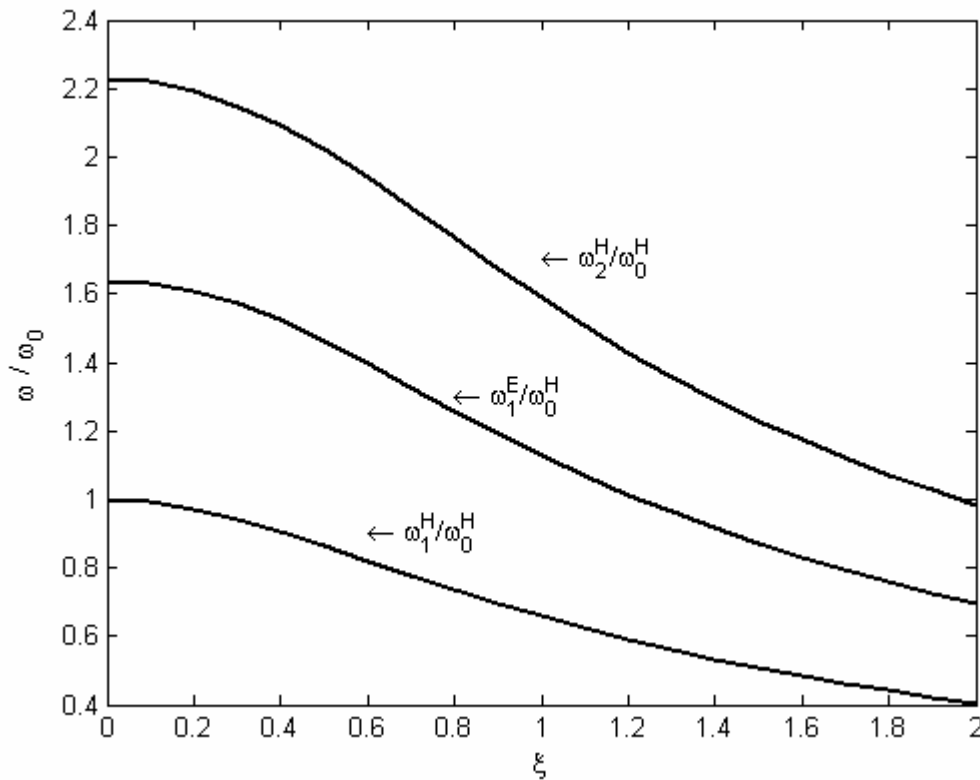


Рис. 1. Зависимость собственных частот от кирального адмитанса  $\xi$  для  $n = 1$ .

На графике приведены отношения частот к значению  $\omega_0^H$  – наименьшей собственной частоте резонатора при отсутствии киральности ( $\xi = 0$ ). Индексы Е и Н у частот означают, что в пределе при  $\xi = 0$  они стремятся к собственным частотам Е- и Н-колебаний соответственно.

На рисунке 1 приведены результаты численного решения уравнения (8), из которых следует, что с ростом параметра  $\xi$  значения собственных частот уменьшаются и происходит их сближение.



Заметим, что в случае обычной среды, когда  $\xi = 0$ , характеристическое уравнение (8) вырождается в два уравнения

$$\frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R) \right) = 0 \quad (9)$$

и

$$J_{n+\frac{1}{2}}(k_0 R) = 0, \quad (10)$$

где  $k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu}$ , так как при этом  $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{\varepsilon \mu}$ . Уравнения (9) и (10) – это характеристические уравнения для собственных частот Е- и Н-колебаний обычного сферического экранированного резонатора с идеально проводящей границей соответственно.

На основании подготовительной теоремы Вейерштрасса (см., например, [12]) можно показать, что решения уравнения (8) непрерывно зависят от параметра киральности  $\xi$ . Обозначим через  $\omega_E^{np}$  те из них, которые при равном нулю параметре киральности совпадают с частотами Е-колебаний обычного сферического резонатора. Воспользуемся первым уравнением системы (7) для того, чтобы найти связь между коэффициентами  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$ . В результате получим выражения для комплексных амплитуд собственных колебаний кирального резонатора

$$e_{\varphi, E}^{n, m, p} = \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu}} \frac{k_{1, E}^{n, p} k_{2, E}^{n, p}}{\sqrt{r}} \left( J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1, E}^{n, p} R) J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2, E}^{n, p} r) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2, E}^{n, p} R) J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1, E}^{n, p} r) \right) \times$$

$$\times \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} +$$

$$+ \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2 \mu}} \frac{m}{r \sin \theta} \frac{d}{dr} \left( k_{1, E}^{n, p} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1, E}^{n, p} R) J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2, E}^{n, p} r) + k_{2, E}^{n, p} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2, E}^{n, p} R) J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1, E}^{n, p} r) \right) \times$$

$$\times P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases},$$

$$e_{\theta,E}^{n,m,p} = \frac{ik_{1,E}^{n,p}k_{2,E}^{n,p}}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2}\mu} \frac{m}{\sqrt{r} \sin \theta} \left( J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}r) - J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}r) \right) \times$$

$$\times P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases}$$

$$- \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2}\mu} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( k_{1,E}^{n,p} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}r) + k_{2,E}^{n,p} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}r) \right) \times$$

$$\times \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},$$

$$e_{r,E}^{n,m,p} = \frac{-i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2}\mu} \frac{n(n+1)}{r^2} \sqrt{r} \left( k_{1,E}^{n,p} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}r) + k_{2,E}^{n,p} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}r) \right) \times$$

$$\times P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},$$

и

$$h_{\varphi,E}^{n,m,p} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{k_{1,E}^{n,p}k_{2,E}^{n,p}}{\sqrt{r}} \left( J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}r) + J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}r) \right) \times$$

$$\times \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{m}{r \sin \theta} \frac{d}{dr} \left( k_{1,E}^{n,p} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}r) - k_{2,E}^{n,p} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}r) \right) \times$$

$$\times P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases},$$

$$h_{\theta,E}^{n,m,p} = \frac{k_{1,E}^{n,p}k_{2,E}^{n,p}}{2\sqrt{\mu}} \frac{m}{\sqrt{r} \sin \theta} \left( J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}r) + J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,E}^{n,p}R)J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,E}^{n,p}r) \right) \times$$

$$\times P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( k_{1,E}^{n,p} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,E}^{n,p} R \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,E}^{n,p} r \right) - k_{2,E}^{n,p} \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,E}^{n,p} R \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,E}^{n,p} r \right) \right) \times$$

$$\times \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},$$

$$h_{r,E}^{n,m,p} = \frac{-1}{2\sqrt{\mu}} \frac{n(n+1)}{r^2} \sqrt{r} \left( k_{1,E}^{n,p} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,E}^{n,p} R \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,E}^{n,p} r \right) - k_{2,E}^{n,p} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,E}^{n,p} R \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,E}^{n,p} r \right) \right) \times$$

$$\times P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},$$

которые в пределе при  $\xi = 0$  с точностью до множителя  $k_{0,E}^{np} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{0,E}^{np} R \right)$  совпадут с Е-колебаниями обычного сферического резонатора.

Обозначим как  $\omega_H^{np}$  решения характеристического уравнения (8), совпадающие при равном нулю параметре киральности  $\xi$  с собственными частотами, отвечающими Н-колебаниям обычного некирального резонатора. Найдем связь между коэффициентами  $A_{nm}$  и  $B_{nm}$  с помощью второго уравнения системы (7). В результате получим еще одну серию решений для кирального сферического резонатора

$$e_{\varphi,H}^{n,m,p} = \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2} \mu} \frac{1}{\sqrt{r}} \left( k_{2,H}^{n,p} \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} R \right) \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} r \right) + \right.$$

$$\left. + k_{1,H}^{n,p} \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} R \right) \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} r \right) \right) \cdot \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} +$$

$$+ \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2} \mu} \frac{m}{r \sin\theta} \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} R \right) \right) \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} r \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} R \right) \right) \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} r \right) \right) \cdot P_n^m(\cos\theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases},$$

$$\begin{aligned}
 e_{\theta,H}^{n,m,p} &= \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2} \mu} \frac{m}{\sqrt{r} \sin \theta} \left( k_{2,H}^{n,p} \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} R \right) \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} r \right) + \right. \\
 &+ k_{1,H}^{n,p} \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} R \right) \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} r \right) \left. \right) \cdot P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases} - \\
 &- \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2} \mu} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} R \right) \right) \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} r \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} R \right) \right) \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} r \right) \right) \cdot \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 e_{r,H}^{n,m,p} &= -\frac{i}{2\sqrt{\varepsilon + \xi^2} \mu} \frac{n(n+1)}{r^2} \sqrt{r} \left( \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} R \right) \right) \cdot J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} r \right) - \right. \\
 &- \left. \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} R \right) \right) \cdot J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} r \right) \right) \cdot P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},
 \end{aligned}$$

И

$$\begin{aligned}
 h_{\varphi,H}^{n,m,p} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{1}{\sqrt{r}} \left( k_{2,H}^{n,p} \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} R \right) \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} r \right) - \right. \\
 &- k_{1,H}^{n,p} \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} R \right) \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} r \right) \left. \right) \cdot \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases} + \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{m}{r \sin \theta} \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} R \right) \right) \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} r \right) + \right. \\
 &+ \left. \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} R \right) \right) \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} r \right) \right) \cdot P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 h_{\theta,H}^{n,m,p} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{m}{\sqrt{r} \sin \theta} \left( k_{2,H}^{n,p} \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} R \right) \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} r \right) - \right. \\
 &- k_{1,H}^{n,p} \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{2,H}^{n,p} R \right) \right) J_{n+\frac{1}{2}} \left( k_{1,H}^{n,p} r \right) \left. \right) \cdot P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \sin m\varphi \\ -\cos m\varphi \end{cases} -
 \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,H}^{n,p} R) \right) \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,H}^{n,p} r) \right) +$$

$$+\frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,H}^{n,p} R) \right) \sqrt{r} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,H}^{n,p} r) \cdot \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},$$

$$h_{r,H}^{n,m,p} = -\frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{n(n+1)}{r^2} \sqrt{r} \left( \frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,H}^{n,p} R) \right) \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,H}^{n,p} r) \right) +$$

$$+\frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{2,H}^{n,p} R) \right) \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(k_{1,H}^{n,p} r) \cdot P_n^m(\cos \theta) \begin{cases} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{cases},$$

которые в пределе при равном нулю параметре киральности  $\xi$  с точностью до

множителя  $\frac{d}{dR} \left( \sqrt{R} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{0,H}^{np} R) \right)$  совпадают с Н-колебаниями обычного

сферического некирального резонатора. Следовательно, можно сделать вывод о том, что в киральном резонаторе поддерживаются только гибридные собственные колебания.

**Начально-краевая задача: возбуждение электромагнитных колебаний в области с киральным заполнением.**

Пусть  $\Omega$  – конечное или бесконечное множество в  $R_3$ . Если множество конечное, то будем считать, что оно ограничено идеально проводящей поверхностью  $\Gamma$ . Если же множество  $\Omega$  бесконечное, то будем считать, что  $\bar{\Omega}$  – дополнение к области  $\Omega$ , конечно, ограничено поверхностью  $\Gamma$  и представляет собой идеальный проводник. Пусть область  $\Omega$  состоит из конечного числа подобластей:

$$\Omega = \bigcup_{i=0}^q \Omega_i$$

причём все из них, кроме может, подобласти  $\Omega_0$ , конечны, и общая для подобластей  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  граница  $\Sigma_{ij}$  регулярна и ограничена. В случае

бесконечной области  $\Omega$  подобласть  $\Omega_0$  неограниченна. Пусть подобласти  $\Omega_i$  имеют однородные киральные заполнения с параметрами  $\varepsilon_i > 0$ ,  $\mu_i > 0$ ,  $\xi_i \geq 0$ ,  $\sigma_i \geq 0$ ,  $i = 0, 1, \dots, q$ , причём  $\xi_0 = 0$  и  $\sigma_0 = 0$ , если подобласть  $\Omega_0$  неограниченна. В этом случае проводник  $\bar{\Omega}$  и ограниченные киральные вставки  $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_q$  помещены в обычную непроводящую среду, характеризующуюся диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_0$  и магнитной проницаемостью  $\mu_0$ .

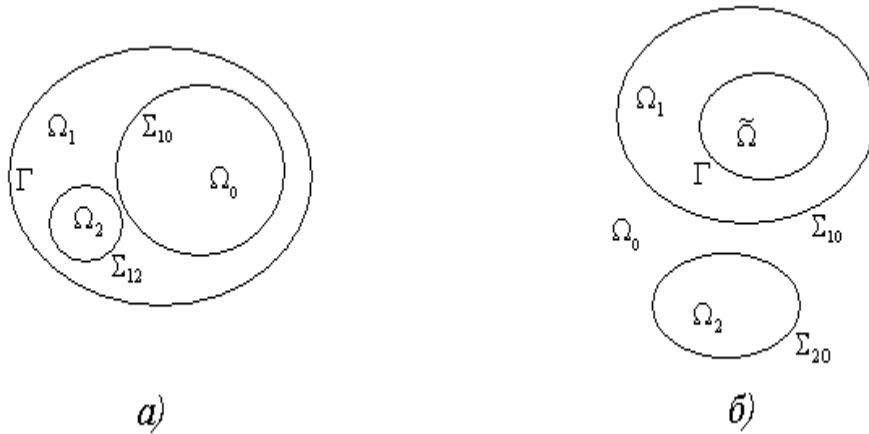


Рис.2. а) Первый случай: конечная область  $\Omega$  в случае  $q = 2$ ; б) второй случай: бесконечная область  $\Omega$  в случае  $q = 2$ . Здесь  $\Omega_0$  - бесконечная подобласть области  $\Omega$ .

Предположим, что в области  $\Omega$  имеются сосредоточенные в некоторой конечной области сторонние токи плотности  $\mathbf{j}$ . При постановке начально-краевой задачи относительно векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  будем исходить из системы уравнений Максвелла, материальных уравнений, а также из того факта, что краевое условие для тангенциальной составляющей вектора  $\mathbf{E}$  на границе между киральной средой и идеальным проводником имеет такой же вид, как и в случае границы между обычной средой и проводником. В результате приходим к следующей начально-краевой задаче:

$$(\varepsilon + \xi^2 \mu) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + i \xi \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot} \mathbf{H} + \sigma \mathbf{E} = -\mathbf{j} \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (11)$$

$$-i \xi \mu \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad \text{в } \Omega \times (0, T], \quad (12)$$

$$[\mathbf{E}, \mathbf{n}] = 0 \quad \text{на } \Gamma \times [0, T] \quad (13)$$

$$\mathbf{E}|_{t=0} = \mathbf{E}_0, \quad \mathbf{H}|_{t=0} = \mathbf{H}_0 \quad \text{в } \Omega \quad (14)$$

**Начально-краевая задача: обобщённая постановка.**

Пусть  $\Phi = \{\varphi, \psi\}$ , где  $\varphi$  и  $\psi$  – произвольные гладкие трёхкомпонентные функции, обращающиеся в нуль при  $t=T$ , такие что они сами и их первые производные квадратично интегрируемы в  $\Omega$ . Умножим обе части уравнения (11) скалярно в  $(L_2(\Omega))^3$  на функцию  $\varphi$  и обе части уравнения (12) на функцию  $\psi$ , сложим полученные равенства и проинтегрируем результат по времени от 0 до T:

$$\int_0^T \left[ - \left( (\varepsilon + \xi^2 \mu) \mathbf{E} + i \xi \mu \mathbf{H}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{\Omega} - \left( \mu \mathbf{H} - i \xi \mu \mathbf{E}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_{\Omega} + (\mathbf{A} \mathbf{u}, \Phi)_K + (\mathbf{M} \mathbf{u}, \Phi)_K \right] dt =$$

$$= - \int_0^T (\mathbf{j}, \varphi)_{\Omega} dt + \left( (\varepsilon + \xi^2 \mu) \mathbf{E}_0 + i \xi \mu \mathbf{H}_0, \varphi|_{t=0} \right)_{\Omega} + \left( \mu \mathbf{H}_0 - i \xi \mu \mathbf{E}_0, \psi|_{t=0} \right)_{\Omega}, \quad (15)$$

где  $\mathbf{u} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ . В формуле (15) использованы обозначения для скалярных произведений

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\Omega} = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} f_i \bar{g}_i dx$$

и

$$(\mathbf{F}, \mathbf{G})_K = (\mathbf{F}_1, \mathbf{G}_1)_{\Omega} + (\mathbf{F}_2, \mathbf{G}_2)_{\Omega}, \quad \mathbf{F} = \{\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2\}, \quad \mathbf{G} = \{\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2\},$$

а также операторов

$$(\mathbf{A} \mathbf{u}, \Phi)_K = -(\operatorname{rot} \mathbf{H}, \varphi)_{\Omega} + (\operatorname{rot} \mathbf{E}, \psi)_{\Omega},$$

$$(\mathbf{M} \mathbf{u}, \Phi)_K = (\sigma \mathbf{E}, \varphi)_{\Omega}.$$

Введем гильбертово пространство

$$K = (L_2(\Omega))^6 = (L_2(\Omega))^3 \times (L_2(\Omega))^3$$

и рассмотрим множество:

$$D(A) = \left\{ \Phi \mid \Phi = \{\varphi, \psi\} \in K, \operatorname{rot} \varphi \in (L_2(\Omega))^3, \operatorname{rot} \psi \in (L_2(\Omega))^3, [\mathbf{n}, \varphi] = 0 \text{ на } \Gamma \right\}.$$

Справедливы следующие леммы:

**Лемма 1.** Область  $D(A)$  плотна в  $K$ , и оператор  $A$  замкнут.

**Замечание 1.**  $\Phi = \{\varphi, \psi\} \in D(A)$ , если и только если выполняются условия:

$$\operatorname{rot} \varphi^i, \operatorname{rot} \psi^i \in (L_2(\Omega_i))^3; [\mathbf{n}, \psi^i] = [\mathbf{n}, \psi^j], [\mathbf{n}, \varphi^i] = [\mathbf{n}, \varphi^j] \text{ на } \Sigma_{ij}; [\mathbf{n}, \varphi^1] = 0 \text{ на } \Gamma.$$

**Лемма 2.** Пусть граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  регулярна и ограничена. Тогда любой элемент  $\Phi_* \in K$ , такой что форма  $(A\Phi, \Phi_*)_K$  непрерывна на  $D(A)$ , принадлежит области  $D(A)$ , и справедливо равенство

$$(A\Phi, \Phi_*)_K = -(\Phi, A\Phi_*)_K \quad (16)$$

для любого  $\Phi \in D(A)$ .

Используя лемму 2, можно сформулировать обобщенную постановку исходной задачи следующим образом:

Необходимо найти функцию  $\mathbf{u} \in L^\infty(0, T; D(A))$ , удовлетворяющую равенству

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[ - \left( (\varepsilon + \xi^2 \mu) \mathbf{E} + i \xi \mu \mathbf{H}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_\Omega - \left( \mu \mathbf{H} - i \xi \mu \mathbf{E}, \frac{\partial \psi}{\partial t} \right)_\Omega - (\mathbf{u}, A\Phi)_K + (M\mathbf{u}, \Phi)_K \right] dt = \\ & = - \int_0^T (\mathbf{j}, \varphi)_\Omega dt + \left( (\varepsilon + \xi^2 \mu) \mathbf{E}_0 + i \xi \mu \mathbf{H}_0, \varphi|_{t=0} \right)_\Omega + \left( \mu \mathbf{H}_0 - i \xi \mu \mathbf{E}_0, \psi|_{t=0} \right)_\Omega \end{aligned} \quad (17)$$

при любой функции  $\Phi$ , такой что

$$\Phi \in L_2(0, T; D(A)), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \in L_2(0, T; D(A))$$

и обращающейся в нуль при  $t = T$ , где  $\mathbf{u}_0 = \{\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0\} \in D(A)$  и  $\mathbf{j} \in L_2(0, T; \Omega)$ .

Леммы 1 и 2 позволяют на основании метода Галеркина доказать существование и единственность слабого решения задачи:



**Теорема 1.** *Если граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  регулярна и ограничена, то решение задачи (17) существует, и оно единственно.*

### **Заключение.**

В работе предложен алгоритм исследования экранированных резонаторов, заполненных киральным веществом. В качестве иллюстративного примера рассмотрен сферический киральный резонатор, для которого получены выражения для собственных полей и характеристическое уравнение для собственных частот. Проведенный анализ показал, что в киральном резонаторе могут формироваться только гибридные собственные поля, которые при обращении в нуль параметра киральности вырождаются в обычные Е- и Н-колебания. Собственные частоты кирального резонатора оказываются меньше соответствующих частот резонатора, заполненного обычной средой.

Также показано, что задача о возбуждении сторонними источниками электромагнитных колебаний в области с неоднородным киральным заполнением, ограниченной идеально проводящей поверхностью, либо являющейся дополнением к ограниченному идеальному проводнику, имеет единственное обобщенное решение. При доказательстве существования решения применен метод Галеркина, который может быть использован в дальнейшем для построения приближенного решения. Полученные результаты являются обобщением на случай киральной среды классических результатов о существовании и единственности решения задач дифракции электромагнитных волн на неоднородностях в среде, которая описывается обычными материальными уравнениями.

### **Литература**

1. *Боголюбов А.Н., Мосунова Н.А., Петров Д.А. // Математическое моделирование. 2007. 19, № 5. С.3*
2. *Кацеленбаум Б.З., Коршунова Е.Н., Сивов А.Н., Шатров А.Д. // Phys. Usp. 1997. 40, 1201.*

3. *Pelet P.* // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. 1990. **38**, №1. P.90
4. *Bahr A.J., Clausing K.R.* // IEEE Trans. on antennas and propagation. 1994. **42**, № 12. P. 1592
5. *Jaggard D.L., Mickelson A.R.* NJ: Princeton Univ. Press. 1952.
6. *Tobar M.E., Mann A.G.* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1991. **39**, P. 2077.
7. *Guillon P., Jiao X.* // Proc. IEE. Part H. 1987. **134**
8. *Schiller S., Beyer R.L.* // Opt.Lett. 1991. **16**, P. 1138
9. *Фел С.С., Левинсон И.Б., Фридберг П.Ш.* // Радиофизика и электроника. 1962. **6**, №11. С. 1125.
10. *Julien A., Guillon P.* // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1986. **34**, P.723
11. *Tobar M.E., Anstie J.D., Hartnett J.G.* // IEEE Transactions on Ultrasonics, Ferroelectrics, and Frequency Control. 2003. **50**, № 11. P. 1407
12. *Фукс Б.А.* Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. М., гос. изд. физ.-мат. лит. 1962.
13. *Моденов В.П., Цветков И.В.*// Вестник Московского университета. Серия 3. Физика. Астрономия. 2004. №3. С. 8.
14. *Ильинский А.С., Кравцов В.В., Свешников А.Г.* Математические модели электродинамики. М.: “Высшая школа” 1991.
15. *Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс* Неравенства в механике и физике. Москва “Наука”, Главная редакция физико-математической литературы, 1980.