

ИССЛЕДОВАНИЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ СИГНАЛА, ПРОШЕДШЕГО ЧЕРЕЗ НЕИДЕАЛЬНЫЙ ФИЛЬТР НИЗКИХ ЧАСТОТ

А. Ю. Зражевский, В. А. Коротков

ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, Фрязинский филиал

Получена 12 апреля 2013 г.

Аннотация. В данной работе рассматривается восстановление сигнала, прошедшего через неидеальный фильтр низких частот (ФНЧ). Показано, что с помощью инверсной фильтрации можно частично восстановить исходный сигнал. Полное восстановление возможно только при использовании информации о конечной длительности сигнала и информации о полосе пропускания фильтра.

Ключевые слова: Восстановление сигналов, фильтр низких частот, преобразование Фурье.

Abstract. In this work the restoration of the signal passed through non-ideal low-pass filter (LPF) is considered. It is shown that by using inverse filtering it is possible to restore partially the original signal. Complete recovery is possible only by using information about the finite signal duration and information about the bandwidth of the filter.

Keywords: signal restoration, low-pass filter, Fourier transform.

В данной работе рассматривается восстановление сигнала, прошедшего через фильтр низких частот (ФНЧ). Его коэффициент пропускания зададим как произведение двух спектров – идеального ФНЧ – $H_n(w/w_n)$ - коэффициент пропускания которого равен 1 внутри полосы пропускания и 0 – вне ее и Гауссова фильтра с центральной частотой равной 0 и параметром s , определяющим его полосу пропускания:

$$H_n(w/w_n) = 1 \text{ при } w/w_n \leq 1, \text{ и } H_n(w/w_n) = 0 \text{ при } w/w_n > 1, \quad (1)$$

$$H(w) = H_n(w/w_n) \exp(-w^2 / S^2). \quad (2)$$

Форма сигнала $f(x)$ после прохождения ФНЧ с аппаратной функцией $h(x)$ изменяется на $g(x)$, которую можно рассчитать, зная спектральные представления $f(x), h(x)$ и $g(x)$:

$$G(w) = H(w) F(w), \quad (3)$$

где $G(w)$, $H(w)$ и $F(w)$ – спектры $g(x)$, $h(x)$ и $f(x)$ соответственно.

Для восстановления $f(x)$ или $F(w)$ из (3) следует:

$$F(w) = G(w) / H(w). \quad (4)$$

Расчет $F(w)$ с помощью (4) называется инверсной фильтрацией.

Рассмотрим прохождение линейно частотно модулированного сигнала через ФНЧ. В качестве необходимого дополнения установим, что сигнал $f(x)$ имеет конечную длину и начинается и заканчивается (Рис.1) со значений, равных нулю.

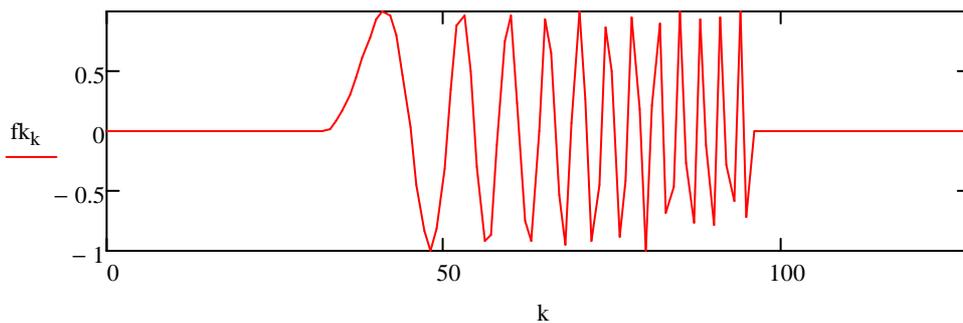


Рис.1. Входной сигнал $f(x)$

Его спектр, представленный на Рис.2, имеет характерный для линейно частотно модулированного сигнала вид.

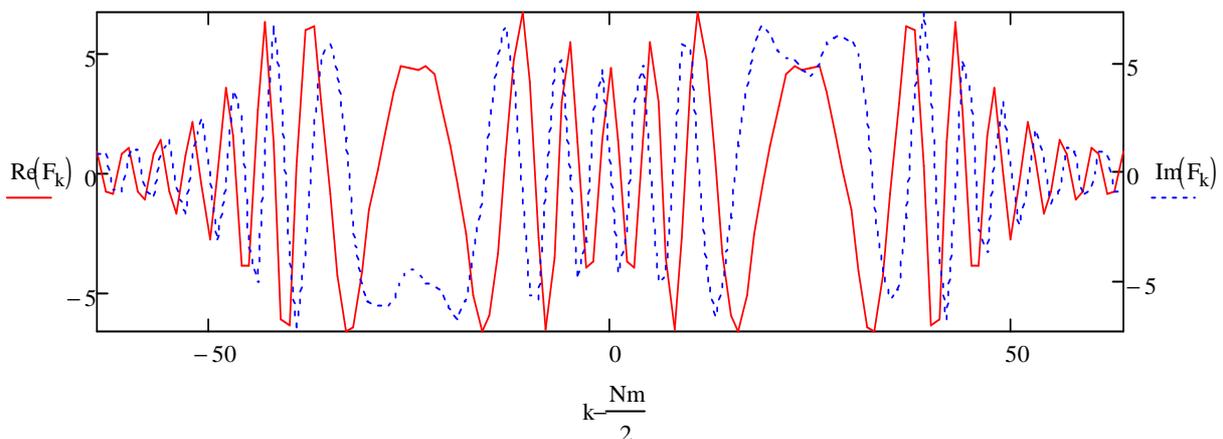


Рис.2. Спектр сигнала. Действительная часть – красный, мнимая – синий.

График ФНЧ $H(\omega)$ – коэффициента пропускания фильтра представлен на Рис.3

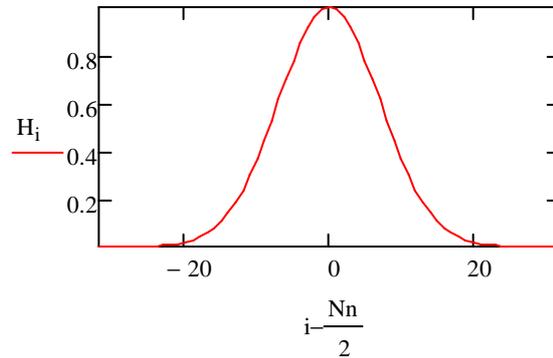


Рис.3. Коэффициент пропускания фильтра низких частот при $S=10$.

Спектр сигнала, показанный на Рис.2, после прохождения сигнала через ФНЧ – изображен на Рис.3. С учетом $G(\omega) = H(\omega) F(\omega)$ он изменится и будет выглядеть следующим образом (см.рис.4.)

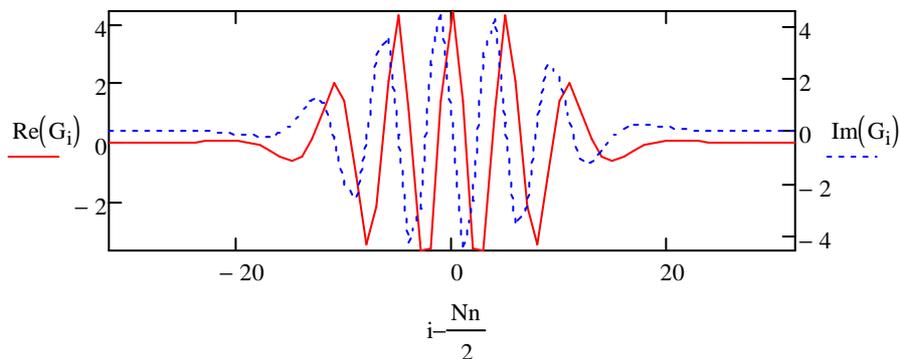


Рис.4. Спектр сигнала представленного на Рис.1-2 прошедшего через фильтр низких частот.

Сигналу на рис.5 соответствует спектр на Рис.4. Так как большая часть высоких частот подавлена ФНЧ, спектр сигнала сильно изменился и форма сигнала стала сильно отличаться от исходной, представленной на Рис.1-2. На Рис.5 сигнал, прошедший ФНЧ выделен красным цветом. Для сравнения синим цветом показан сигнал на входе ФНЧ.

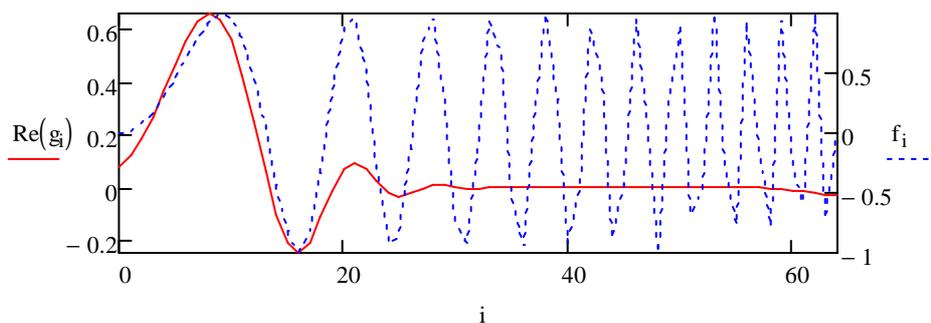


Рис.5. Сигнал, прошедший через ФНЧ – красный, сигнал на входе ФНЧ – синий.

Для восстановления спектра сигнала применим инверсную фильтрацию – (4). В силу того, что ФНЧ представляет собой композицию идеального ФНЧ и Гауссова ФНЧ, восстановленный спектр сигнала соответствует исходному только в полосе пропускания идеального фильтра низких частот – Рис.6.

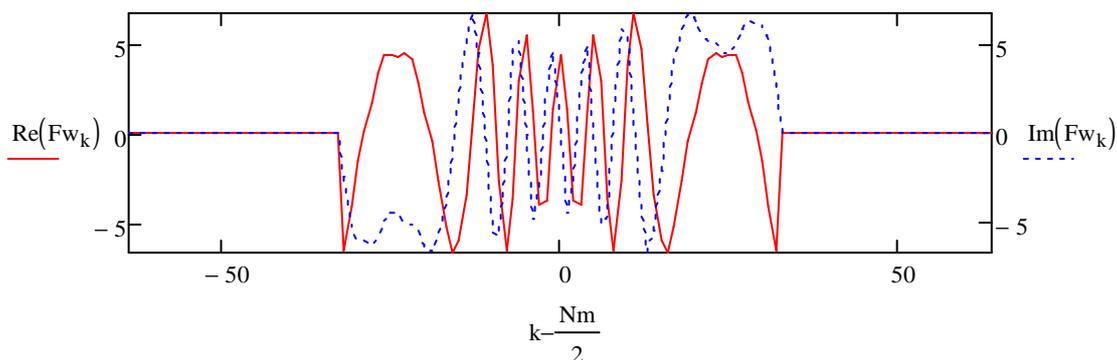


Рис.6. Спектр сигнала, восстановленного инверсной фильтрацией по формуле (4).

Сигнал, соответствующий спектру Рис.6, имеет вид, показанный на Рис.7, где красным цветом отображается восстановленный сигнал, а синим для сравнения приводится исходный сигнал.

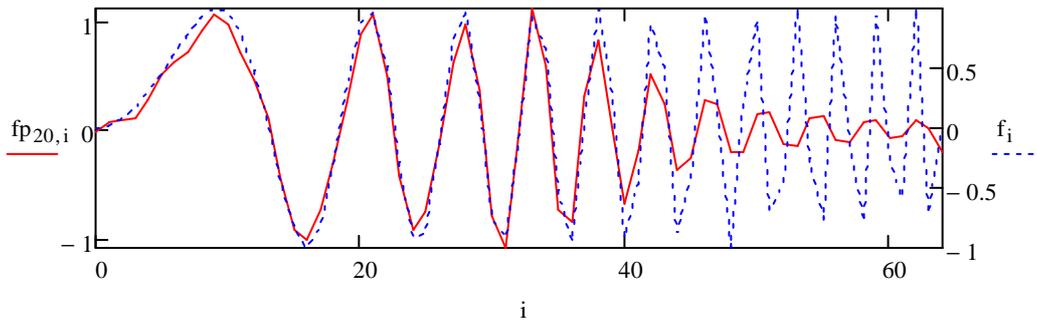


Рис.7. Сигнал, восстановленный по (4) – красный, сигнал на входе ФНЧ – синий.

На Рис.7 хорошо видно, как проявилось отсутствие высоких частот в спектре восстановленного сигнала.

Восстановление высоких частот, отсутствующих в сигнале, прошедшем через ФНЧ, в данной постановке задачи возможно. Решение задачи восстановления высокочастотных составляющих, отсутствующих в ограниченном по частоте и длительности сигнале, возможно с помощью аналитического продолжения [1-3]. В данной работе мы рассмотрим попытку восстановления [5] с помощью решения системы линейных уравнений вида (5):

$$g(x_k) = \sum_j h(x_k, x_j) f(x_j), \quad (5)$$

где x_k, x_j – координаты отсчетов сигналов $f(x_j)$ и $g(x_k)$, $h(x_k, x_j)$ – матрица, связывающая отсчеты входного $f(x_j)$ и выходного $g(x_k)$ из ФНЧ сигналов. Эта матрица состоит из произведения 2 матриц – прямого и обратного преобразования Фурье вида:

$$h(x_k, x_j) = U \sum_l \exp(-i \Delta x \Delta \omega k l) \exp(i \Delta x \Delta \omega l j) \quad (6)$$

где суммирование по l производится только по диапазону частот, пропускаемых ФНЧ, U – нормировочный множитель, $\Delta x \Delta \omega$ – шаг дискретизации по координате и частоте соответственно, $x_k = k \Delta x, x_j = j \Delta x$.

Решение системы линейных уравнений (5) сильно затрудняется частичной линейной зависимостью уравнений, вызванных как симметрией структуры $h(x_k, x_j)$, так и неполным суммированием по l в (6). Система (5)

решалась с помощью метода SVD для систем линейных уравнений [4]. Представленный на Рис.7 восстановленный сигнал использовался в качестве $g(x_k)$ в (5). Результат решения (5) представлен на Рис.8.

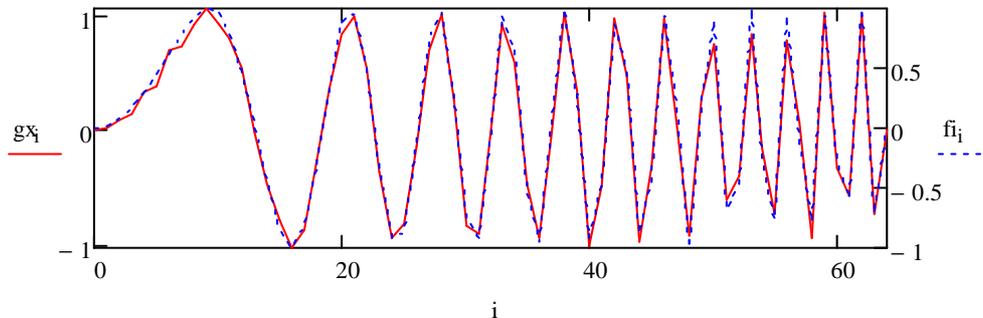


Рис.8. Сигнал, восстановленный решением (5) – красный, сигнал на входе ФНЧ – синий.

Сравнение решения (5) (красная кривая) и исходного сигнала (синяя кривая) позволяют сделать вывод о восстановлении высоких частот, отсутствующих в сигнале на выходе ФНЧ.

Выводы:

- Вид спектральной характеристики ФНЧ оказывает определяющее значение на отфильтрованный и восстановленный сигнал.
- Из-за подавления ФНЧ высоких частот вид сигнала на выходе фильтра существенно отличается от входного сигнала, причем, если функция пропускания ФНЧ имеет плавный вид (в нашем случае $S < w_n$), то выходной сигнал имеет «сглаженный» вид. В противном случае в выходном сигнале присутствуют «паразитные» биения, отсутствующие во входном сигнале.
- Инверсная фильтрация позволяет частично восстановить входной сигнал.
- Для полного восстановления сигнала необходимо восстановить те частотные составляющие, которые не пропустил ФНЧ. Для этого можно воспользоваться помощью аналитического продолжения. Мы же использовали решение (5). Результат решения сильно зависит от точности измерения $g(x_k)$ и точного определения границы полосы пропускания ФНЧ.

Литература

1. М.А.Броварова, С.Н.Хонина. Повышение разрешающей способности с помощью вытянутых сфероидальных волновых функций. Компьютерная оптика, 21, 53-57, 2001.
2. К.М.Ермохин. Технология построения разрезов методом аналитического продолжения геофизических полей. Геоинформатика, 2, 51-60, 2010.
3. Л.А.Айзенберг, Б.А.Кравцов. Вычислительный эксперимент по сверхразрешению физических приборов в экстраполяции спектра Фурье одномерных финитных сигналов. Письма в ЖТФ. 13. №9. 1987.
4. Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер - Машинные методы математических вычислений. «Мир», 1980.
5. Зражевский А. Ю., Коротков В. А. Восстановление одномерных финитных сигналов, прошедших через фильтр низких частот. «Журнал Радиоэлектроники», №3, 2013г.