

УДК 539.3; 537.8

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГИХ СВОЙСТВ ПЬЕЗОАКТИВНЫХ КОМПОЗИТОВ

А. А. Паньков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет

Статья поступила в редакцию 7 апреля 2016 г.

Аннотация. Разработаны математические двухуровневые структурные модели электромагнитоупругости композитов с учетом связанностей деформационных, электрических и магнитных полей. Представлены результаты прогнозирования 21-й независимой константы эффективных трансверсально-изотропных пьезоэлектромагнитоупругих свойств однонаправленного волокнистого композита PVF/феррит на основе решения связанной краевой задачи электромагнитоупругости; использованы новые решения для сингулярных составляющих вторых производных функций Грина для однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектромагнитной среды.

Ключевые слова: пьезокомпозит, краевая задача электромагнитоупругости, эффективные свойства.

Abstract. Mathematical two-level structural models of electromagnetoelasticity of composites taking into account coherences of deformation, electric and magnetic fields are developed. Results of prediction of the 21 independent constant of effective transversal-isotropic piezoelectromagnetoelastic properties of the unidirectional fibrous composite PVF/ferrite are presented on the basis of the solution of the boundary-value problem of electromagnetoelasticity; new decisions for singular components of the second derivative Green functions for homogeneous transversal-isotropic piezoelectromagnetoelastic medium are used.

Key words: piezocomposite, boundary-value problem of electromagnetoelasticity, effective properties.

Введение

Разработка новых пьезоактивных пироэлектромагнитных материалов и создание устройств на их основе - активно развивающееся направление материаловедения [1, 2]; композиты находят применение в тех случаях, когда традиционные материалы: кристаллы, керамики, сплавы не обеспечивают необходимого комплекса физико-механических характеристик. Поведение и свойства пьезокомпозитов обуславливаются сложным взаимодействием посредством взаимосвязанных деформационных, электрических и магнитных полей большого числа образующих структуру материала элементов [3-7]. Возможность оптимизации и управления структурой композитов открывает путь создания новых пьезоматериалов с наперед заданными свойствами. В результате взаимодействия на микроуровне пьезоактивных элементов структуры на макроуровне композита возникают качественно новые эффекты по сравнению с однородными материалами, в частности, проявляются эффекты магнитоэлектрической, пироэлектрической и пиромагнитной связанности, отсутствующие у входящих в композит однородных фаз [8-11].

Цель работы – изучение эффекта электромагнитной связанности и комплексный анализ эффективных трансверсально-изотропных пьезоэлектромагнитоупругих свойств однонаправленного волокнистого композита PVF/феррит с различными полидисперсными структурами [4, 7, 11].

1. Микро и макроуровни

Рассматриваем двухфазные пьезоактивные среды в представительной области V , определяющие соотношения для фаз $f = \overline{1,2}$ [1, 2, 5]

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijmn}^{(f)} \varepsilon_{mn} - e_{nij}^{(f)} \widehat{E}_n - h_{nij}^{(f)} \widehat{H}_n - \beta_{ij}^{(f)} \Theta, \\ \widehat{D}_i &= e_{imn}^{(f)} \varepsilon_{mn} + \lambda_{in}^{(f)} \widehat{E}_n + \pi_i^{(f)} \Theta, \\ \widehat{B}_i &= h_{imn}^{(f)} \varepsilon_{mn} + \mu_{in}^{(f)} \widehat{H}_n + \vartheta_i^{(f)} \Theta,\end{aligned}\tag{1}$$

связывают напряжения σ , индукции электрического \widehat{D} и магнитного \widehat{B} полей с деформациями ε , напряженностями электрического \widehat{E} и магнитного \widehat{H} полей, температурой однородного внешнего нагрева Θ через считающиеся

известными для каждой фазы f тензоры упругих свойств C_f , пьезоэлектрических e_f и пьезомагнитных h_f свойств, диэлектрических λ_f и магнитных μ_f проницаемостей, температурных коэффициентов β_f , пироэлектрических π_f и пиромагнитных ϑ_f постоянных. Выполняются условия идеального контакта на межфазных поверхностях: непрерывность векторов перемещений, напряжений, индукций электрического и магнитного полей.

Тензоры C^* , ..., ϑ^* эффективных свойств входят в определяющие соотношения на макроуровне композита

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^* &= C_{ijmn}^* \varepsilon_{mn}^* - e_{nij}^* \widehat{E}_n^* - h_{nij}^* \widehat{H}_n^* - \beta_{ij}^* \Theta, \\ \widehat{D}_i^* &= e_{imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \lambda_{in}^* \widehat{E}_n^* + \chi_{in}^* \widehat{H}_n^* + \pi_i^* \Theta, \\ \widehat{B}_i^* &= h_{imn}^* \varepsilon_{mn}^* + \mu_{in}^* \widehat{H}_n^* + \kappa_{in}^* \widehat{E}_n^* + \vartheta_i^* \Theta\end{aligned}\quad (2)$$

и связывают осредненные или макроскопические значения напряжений $\sigma^* = \langle \sigma \rangle$, деформаций $\varepsilon^* = \langle \varepsilon \rangle$, индукций $\widehat{D}^* = \langle \widehat{D} \rangle$, $\widehat{B}^* = \langle \widehat{B} \rangle$, напряженностей $\widehat{E}^* = \langle \widehat{E} \rangle$, $\widehat{H}^* = \langle \widehat{H} \rangle$ электрического и магнитного полей соответственно; $\langle \dots \rangle$ - оператор осреднения по области V структурных полей.

Ненулевые компоненты рассматриваемых трансверсально-изотропных тензоров C , e , λ , h , μ , β , π и ϑ на структурном (1) и на макроуровне (2) композита можно наглядно представить в матричной форме записи

$$\|c_{ij}\| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned} \|e_{ij}\| &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \|\lambda_{ij}\| &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{vmatrix}, \\ \|h_{ij}\| &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & h_{14} & h_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h_{15} & -h_{14} & 0 \\ h_{31} & h_{31} & h_{33} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, & \|\mu_{ij}\| &= \begin{vmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_3 \end{vmatrix}, \\ \|\kappa_{ij}\| &= \begin{vmatrix} \kappa_{11} & \kappa_{12} & 0 \\ -\kappa_{12} & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{vmatrix}, & \|\chi_{ij}\| \equiv \|\kappa_{ij}\|^T &= \begin{vmatrix} \kappa_{11} & -\kappa_{12} & 0 \\ \kappa_{12} & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{vmatrix}, \\ \|\beta_{ij}\| &= \begin{vmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{vmatrix}, & \{\pi_i\} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \pi_3 \end{Bmatrix}, & \{\vartheta_i\} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vartheta_3 \end{Bmatrix}, \end{aligned}$$

где $c_{66} = (c_{11} - c_{12})/2$, тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями: $11 \rightarrow 1, 22 \rightarrow 2, 33 \rightarrow 3, 23$ и $32 \rightarrow 4, 13$ и $31 \rightarrow 5, 12$ и $21 \rightarrow 6$.

2. Обобщенное сингулярное приближение

Решение для тензоров эффективных упругих свойств \mathbf{C}^* , диэлектрической λ^* и магнитной μ^* проницаемостей, пьезомеханических свойств \mathbf{e}^* и \mathbf{h}^* , коэффициентов электромагнитной связи χ^* , κ^* и температурных напряжений β^* , вектора эффективных пьроэлектрических π^* и пьромагнитных ϑ^* постоянных в определяющих соотношениях (2) на макроуровне композита в обобщенном сингулярном приближении [6, 7, 9]

$$\begin{aligned} C_{ijmn}^* &= \langle C_{ijmn} \rangle + v_1(1-v_1)(\bar{C}_{ijdb} \bar{A}_{dbmn}^s - \bar{e}_{pij} \bar{F}_{pmn}^{(1)s} - \bar{h}_{pij} \bar{F}_{pmn}^{(2)s}), \\ \lambda_{kn}^* &= \langle \lambda_{kn} \rangle + v_1(1-v_1)(\bar{\lambda}_{kp} \bar{H}_{pn}^{(1)s} + \bar{e}_{kpq} \bar{B}_{pqn}^s), \\ \mu_{kn}^* &= \langle \mu_{kn} \rangle + v_1(1-v_1)(\bar{\mu}_{kp} \bar{M}_{pn}^{(2)s} + \bar{h}_{kpq} \bar{D}_{pqn}^s), \\ e_{nij}^* &= \langle e_{nij} \rangle + v_1(1-v_1)(\bar{e}_{pij} \bar{H}_{pn}^{(1)s} + \bar{h}_{pij} \bar{H}_{pn}^{(2)s} - \bar{C}_{ijpq} \bar{B}_{pqn}^s), \\ h_{nij}^* &= \langle h_{nij} \rangle + v_1(1-v_1)(\bar{e}_{pij} \bar{M}_{pn}^{(1)s} + \bar{h}_{pij} \bar{M}_{pn}^{(2)s} - \bar{C}_{ijpq} \bar{D}_{pqn}^s), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\chi_{kn}^* &= v_1(1-v_1)(\bar{\lambda}_{kp}\bar{M}_{pn}^{(1)s} + \bar{e}_{kpq}\bar{D}_{pqn}^s), \\ \kappa_{kn}^* &= v_1(1-v_1)(\bar{\mu}_{kp}\bar{H}_{pn}^{(2)s} + \bar{h}_{kpq}\bar{B}_{pqn}^s), \\ \beta_{ij}^* &= \langle \beta_{ij} \rangle + v_1(1-v_1)(-\bar{C}_{ijdb}\bar{T}_{db}^s + \bar{e}_{pij}\bar{T}_p^{(1)s} + \bar{h}_{pij}\bar{T}_p^{(2)s}), \\ \pi_i^* &= \langle \pi_i \rangle + v_1(1-v_1)(\bar{\lambda}_{ip}\bar{T}_p^{(1)s} + \bar{e}_{ipq}\bar{T}_{pq}^s), \\ \vartheta_i^* &= \langle \vartheta_i \rangle + v_1(1-v_1)(\bar{\mu}_{ip}\bar{T}_p^{(2)s} + \bar{h}_{ipq}\bar{T}_{pq}^s)\end{aligned}$$

получим через поправки к соответствующим осредненным по области V значениям: $\langle C \rangle$, ..., $\langle \vartheta \rangle$, тензоры разностей: $\bar{C} = C_1 - C_2$, $\bar{e} = e_1 - e_2$, ..., $\bar{\mu} = \mu_1 - \mu_2$; v_1 - относительное объемное содержание 1-й фазы в V ; например, $\langle C \rangle = v_1 C_1 + v_2 C_2$, где $v_2 = 1 - v_1$. Компоненты тензоров \bar{A}^s , \bar{B}^s , ..., $\bar{T}^{(2)s}$ в (3) находим из решения систем алгебраических уравнений [7]

$$\begin{cases} a_{ikdb}^{(1,1)}\bar{A}_{dbmn}^s + a_{ikd}^{(1,2)}\bar{F}_{dmn}^{(1)s} + a_{ikd}^{(1,3)}\bar{F}_{dmn}^{(2)s} = b_{ikmn}^{(1)} \\ a_{kdb}^{(2,1)}\bar{A}_{dbmn}^s + a_{kd}^{(2,2)}\bar{F}_{dmn}^{(1)s} + a_{kd}^{(2,3)}\bar{F}_{dmn}^{(2)s} = b_{kmn}^{(2)} \\ a_{kdb}^{(3,1)}\bar{A}_{dbmn}^s + a_{kd}^{(3,2)}\bar{F}_{dmn}^{(1)s} + a_{kd}^{(3,3)}\bar{F}_{dmn}^{(2)s} = b_{kmn}^{(3)} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} a_{ikdb}^{(1,1)}\bar{B}_{dbn}^s + a_{ikd}^{(1,2)}\bar{H}_{dn}^{(1)s} + a_{ikd}^{(1,3)}\bar{H}_{dn}^{(2)s} = c_{ikn}^{(1)} \\ a_{kdb}^{(2,1)}\bar{B}_{dbn}^s + a_{kd}^{(2,2)}\bar{H}_{dn}^{(1)s} + a_{kd}^{(2,3)}\bar{H}_{dn}^{(2)s} = c_{kn}^{(2)} \\ a_{kdb}^{(3,1)}\bar{B}_{dbn}^s + a_{kd}^{(3,2)}\bar{H}_{dn}^{(1)s} + a_{kd}^{(3,3)}\bar{H}_{dn}^{(2)s} = c_{kn}^{(3)} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} a_{ikdb}^{(1,1)}\bar{D}_{dbn}^s + a_{ikd}^{(1,2)}\bar{M}_{dn}^{(1)s} + a_{ikd}^{(1,3)}\bar{M}_{dn}^{(2)s} = d_{ikn}^{(1)} \\ a_{kdb}^{(2,1)}\bar{D}_{dbn}^s + a_{kd}^{(2,2)}\bar{M}_{dn}^{(1)s} + a_{kd}^{(2,3)}\bar{M}_{dn}^{(2)s} = d_{kn}^{(2)} \\ a_{kdb}^{(3,1)}\bar{D}_{dbn}^s + a_{kd}^{(3,2)}\bar{M}_{dn}^{(1)s} + a_{kd}^{(3,3)}\bar{M}_{dn}^{(2)s} = d_{kn}^{(3)} \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} a_{ikdb}^{(1,1)}\bar{T}_{db}^s + a_{ikd}^{(1,2)}\bar{T}_d^{(1)s} + a_{ikd}^{(1,3)}\bar{T}_d^{(2)s} = f_{ik}^{(1)} \\ a_{kdb}^{(2,1)}\bar{T}_{db}^s + a_{kd}^{(2,2)}\bar{T}_d^{(1)s} + a_{kd}^{(2,3)}\bar{T}_d^{(2)s} = f_k^{(2)} \\ a_{kdb}^{(3,1)}\bar{T}_{db}^s + a_{kd}^{(3,2)}\bar{T}_d^{(1)s} + a_{kd}^{(3,3)}\bar{T}_d^{(2)s} = f_k^{(3)} \end{cases} \quad (7)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned}a_{ikdb}^{(1,1)} &= I_{ikdb} - U_{(ik)js}^s(\tilde{C}_{jsdb} + (1-2v_1)\bar{C}_{jsdb}) - \\ & - U_{(ik)s}^{(1)s}(\tilde{e}_{sdb} + (1-2v_1)\bar{e}_{sdb}) - U_{(ik)s}^{(2)s}(\tilde{h}_{sdb} + (1-2v_1)\bar{h}_{sdb}), \\ a_{ikd}^{(1,2)} &= U_{(ik)js}^s(\tilde{e}_{djs} + (1-2v_1)\bar{e}_{djs}) - U_{(ik)s}^{(1)s}(\tilde{\lambda}_{sd} + (1-2v_1)\bar{\lambda}_{sd}), \\ a_{ikd}^{(1,3)} &= U_{(ik)js}^s(\tilde{h}_{djs} + (1-2v_1)\bar{h}_{djs}) - U_{(ik)s}^{(2)s}(\tilde{\mu}_{sd} + (1-2v_1)\bar{\mu}_{sd}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a_{kdb}^{(2,1)} &= -\Phi_{kjs}^s (\tilde{C}_{jsdb} + (1-2\nu_1)\bar{C}_{jsdb}) - \\
 &- \Phi_{ks}^{(1)s} (\tilde{e}_{sdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{sdb}) - \Phi_{ks}^{(2)s} (\tilde{h}_{sdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{sdb}), \\
 a_{kd}^{(2,2)} &= -\delta_{kd} + \Phi_{kjs}^s (\tilde{e}_{djs} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{djs}) - \Phi_{ks}^{(1)s} (\tilde{\lambda}_{sd} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{sd}), \\
 a_{kd}^{(2,3)} &= \Phi_{kjs}^s (\tilde{h}_{djs} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{djs}) - \Phi_{ks}^{(2)s} (\tilde{\mu}_{sd} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{sd}), \\
 a_{kdb}^{(3,1)} &= -\Psi_{kjs}^s (\tilde{C}_{jsdb} + (1-2\nu_1)\bar{C}_{jsdb}) - \\
 &- \Psi_{ks}^{(1)s} (\tilde{e}_{sdb} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{sdb}) - \Psi_{ks}^{(2)s} (\tilde{h}_{sdb} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{sdb}), \\
 a_{kd}^{(3,2)} &= \Psi_{kjs}^s (\tilde{e}_{djs} + (1-2\nu_1)\bar{e}_{djs}) - \Psi_{ks}^{(1)s} (\tilde{\lambda}_{sd} + (1-2\nu_1)\bar{\lambda}_{sd}), \\
 a_{kd}^{(3,3)} &= -\delta_{kd} + \Psi_{kjs}^s (\tilde{h}_{djs} + (1-2\nu_1)\bar{h}_{djs}) - \Psi_{ks}^{(2)s} (\tilde{\mu}_{sd} + (1-2\nu_1)\bar{\mu}_{sd})
 \end{aligned} \tag{8}$$

правые части для 1-й системы уравнений (4)

$$\begin{aligned}
 b_{ikmn}^{(1)} &= U_{(ik)js}^s \bar{C}_{jsmn} + U_{(ik)s}^{(1)s} \bar{e}_{smn} + U_{(ik)s}^{(2)s} \bar{h}_{smn}, \\
 b_{kmn}^{(2)} &= \Phi_{kjs}^s \bar{C}_{jsmn} + \Phi_{ks}^{(1)s} \bar{e}_{smn} + \Phi_{ks}^{(2)s} \bar{h}_{smn}, \\
 b_{kmn}^{(3)} &= \Psi_{kjs}^s \bar{C}_{jsmn} + \Psi_{ks}^{(1)s} \bar{e}_{smn} + \Psi_{ks}^{(2)s} \bar{h}_{smn},
 \end{aligned} \tag{9}$$

для 2-й и 3-й систем (5), (6)

$$\begin{aligned}
 c_{ikn}^{(1)} &= -U_{(ik)js}^s \bar{e}_{njs} + U_{(ik)s}^{(1)s} \bar{\lambda}_{sn}, \\
 c_{kn}^{(2)} &= -\Phi_{kjs}^s \bar{e}_{njs} + \Phi_{ks}^{(1)s} \bar{\lambda}_{sn},
 \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
 c_{kn}^{(3)} &= -\Psi_{kjs}^s \bar{e}_{njs} + \Psi_{ks}^{(1)s} \bar{\lambda}_{sn}, \\
 d_{ikn}^{(1)} &= -U_{(ik)js}^s \bar{h}_{njs} + U_{(ik)s}^{(2)s} \bar{\mu}_{sn}, \\
 d_{kn}^{(2)} &= -\Phi_{kjs}^s \bar{h}_{njs} + \Phi_{ks}^{(2)s} \bar{\mu}_{sn}, \\
 d_{kn}^{(3)} &= -\Psi_{kjs}^s \bar{h}_{njs} + \Psi_{ks}^{(2)s} \bar{\mu}_{sn},
 \end{aligned} \tag{11}$$

и для 4-й системы (7)

$$\begin{aligned}
 f_{ik}^{(1)} &= -U_{(ik)js}^s \bar{\beta}_{js} + U_{(ik)s}^{(1)s} \bar{\pi}_s + U_{(ik)s}^{(2)s} \bar{\vartheta}_s, \\
 f_k^{(2)} &= -\Phi_{kjs}^s \bar{\beta}_{js} + \Phi_{ks}^{(1)s} \bar{\pi}_s + \Phi_{ks}^{(2)s} \bar{\vartheta}_s, \\
 f_k^{(3)} &= -\Psi_{kjs}^s \bar{\beta}_{js} + \Psi_{ks}^{(1)s} \bar{\pi}_s + \Psi_{ks}^{(2)s} \bar{\vartheta}_s;
 \end{aligned} \tag{12}$$

в (8) – (12) нижние индексы в круглых скобках (*ik*) обозначают [6] выделение

симметричной составляющей по этой паре индексов, тензоры разностей

$$\tilde{\mathbf{C}} = \langle \mathbf{C} \rangle - \mathbf{C}^{\bullet}, \quad \tilde{\mathbf{e}} = \langle \mathbf{e} \rangle - \mathbf{e}^{\bullet}, \dots, \quad \tilde{\boldsymbol{\mu}} = \langle \boldsymbol{\mu} \rangle - \boldsymbol{\mu}^{\bullet}. \quad (13)$$

В формулы (8) - (12) входит новое решение для матрицы тензоров сингулярных составляющих \mathbf{G}^s вторых производных функций Грина \mathbf{G}

$$\nabla \nabla \mathbf{G}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \approx \mathbf{G}^s \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1), \quad (14)$$

$$\mathbf{G} = \begin{Bmatrix} U_{ik} & U_i^{(1)} & U_i^{(2)} \\ \Phi_k & \Phi^{(1)} & \Phi^{(2)} \\ \Psi_k & \Psi^{(1)} & \Psi^{(2)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{G}^s = \begin{Bmatrix} U_{imjn}^s & U_{imn}^{s(1)} & U_{imn}^{s(2)} \\ \Phi_{imn}^s & \Phi_{mn}^{s(1)} & \Phi_{mn}^{s(2)} \\ \Psi_{imn}^s & \Psi_{mn}^{s(1)} & \Psi_{mn}^{s(2)} \end{Bmatrix}$$

для однородной анизотропной пьезоэлектромагнитной «среды сравнения» [6], свойства которой заданы через тензоры: $\mathbf{C}^{\bullet}, \mathbf{e}^{\bullet}, \mathbf{h}^{\bullet}, \boldsymbol{\lambda}^{\bullet}, \boldsymbol{\mu}^{\bullet}$ (13), функция Грина $\mathbf{G} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\rho})$, $\delta(\boldsymbol{\rho})$ - дельта-функция Дирака, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$, в точке \mathbf{r}_1 действует единичная объемная сила, или электрический или магнитный источник, ∇ - оператор дифференцирования по координатам вектора \mathbf{r} . Компоненты матрицы \mathbf{G}^s в (14) вычисляются по формулам

$$U_{imjn}^s = [\bar{U}_{ij}]_{mn}, \quad U_{imn}^{s(1)} = [\bar{U}_i^{(1)}]_{mn}, \quad U_{imn}^{s(2)} = [\bar{U}_i^{(2)}]_{mn}; \quad \Phi_{mjn}^s = [\bar{\Phi}_j]_{mn},$$

$$\Phi_{mn}^{s(1)} = [\bar{\Phi}^{(1)}]_{mn}, \quad \Phi_{mn}^{s(2)} = [\bar{\Phi}^{(2)}]_{mn}; \quad \Psi_{mijn}^s = [\bar{\Psi}_j]_{mn}, \quad \Psi_{mn}^{s(1)} = [\bar{\Psi}^{(1)}]_{mn}, \quad \Psi_{mn}^{s(2)} = [\bar{\Psi}^{(2)}]_{mn},$$

где оператор

$$[\dots]_{mn} = -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \dots \kappa_m \kappa_n \sin \theta d\theta d\phi$$

действует на компоненты тензоров

$$\bar{U}_{ij} = \left(\Lambda_{ij} + \frac{h_i^{(1)} h_j^{(1)}}{\lambda^{(1)}} + \frac{h_i^{(2)} h_j^{(2)}}{\lambda^{(2)}} \right)^{-1}, \quad \bar{U}_i^{(1)} = \bar{U}_{ij} \frac{h_j^{(1)}}{\lambda^{(1)}}, \quad \bar{U}_i^{(2)} = \bar{U}_{ij} \frac{h_j^{(2)}}{\lambda^{(2)}},$$

$$\bar{\Phi}_j = \frac{h_i^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \bar{U}_{ij}, \quad \bar{\Psi}_j = \frac{h_i^{(2)}}{\lambda^{(2)}} \bar{U}_{ij}, \quad \bar{\Phi}^{(1)} = (h_i^{(1)} \bar{U}_i^{(1)} - 1) \frac{1}{\lambda^{(1)}}, \quad \bar{\Psi}^{(1)} = h_i^{(2)} \bar{U}_i^{(1)} \frac{1}{\lambda^{(2)}},$$

$$\bar{\Phi}^{(2)} = h_i^{(1)} \bar{U}_i^{(2)} \frac{1}{\lambda^{(1)}}, \quad \bar{\Psi}^{(2)} = (h_i^{(2)} \bar{U}_i^{(2)} - 1) \frac{1}{\lambda^{(2)}},$$

в которых использованы обозначения

$$\begin{aligned} \Lambda_{ij} &= C_{imjn}^{\bullet} \kappa_m \kappa_n, \\ h_i^{(1)} &= e_{min}^{\bullet} \kappa_m \kappa_n, \quad h_i^{(2)} = h_{min}^{\bullet} \kappa_m \kappa_n, \\ \lambda^{(1)} &= \lambda_{mn}^{\bullet} \kappa_m \kappa_n, \quad \lambda^{(2)} = \mu_{mn}^{\bullet} \kappa_m \kappa_n, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{a_1} \sin \theta \cos \phi, \quad \kappa_2 = \frac{1}{a_2} \sin \theta \sin \phi, \quad \kappa_3 = \frac{1}{a_3} \cos \theta,$$

ϕ и θ - полярные углы в сферической системе координат, поверхность эллипсоидального «зерна неоднородности» [6] задана равенством

$$\sum_{i=1}^3 (x_i / a_i)^2 = 1 \quad (16)$$

через значения главных полуосей a_i в (9), $x_i = r_{(1)i} - r_i$ - координаты вектора \mathbf{x} .

3. Волокнистый композит PVF/феррит

На рис.1 представлены результаты расчета эффективных коэффициентов электромагнитной связанности κ_{11}^* , κ_{33}^* и κ_{12}^* (3) трансверсально-изотропного волокнистого пьезоэлектроматериала: пьезоэлектрическая матрица PVF [5, 12] с однонаправленными вдоль оси r_3 ферритовыми [5] волокнами ($a_1 = a_2$, $a_3 \rightarrow \infty$, (16) с объемной долей v_1). Расчет (рис.1) проведен в обобщенном сингулярном приближении (3) – (16) для четырех различных случаев выбора свойств среды сравнения (13), (15): в первом случае (\triangle), свойства среды сравнения приравнены свойствам 1-й фазы

$$\mathbf{C}^{\bullet} = \mathbf{C}_1, \quad \mathbf{e}^{\bullet} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{h}^{\bullet} = \mathbf{h}_1, \quad \lambda^{\bullet} = \lambda_1, \quad \mu^{\bullet} = \mu_1, \quad (17)$$

во втором случае (\square) – свойствам 2-й фазы

$$\mathbf{C}^{\bullet} = \mathbf{C}_2, \quad \mathbf{e}^{\bullet} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{h}^{\bullet} = \mathbf{h}_2, \quad \lambda^{\bullet} = \lambda_2, \quad \mu^{\bullet} = \mu_2, \quad (18)$$

в третьем случае (\circ) – осредненным по области \mathbf{V} композита значениям

$$\mathbf{C}^{\bullet} = \langle \mathbf{C} \rangle, \quad \mathbf{e}^{\bullet} = \langle \mathbf{e} \rangle, \quad \mathbf{h}^{\bullet} = \langle \mathbf{h} \rangle, \quad \lambda^{\bullet} = \langle \lambda \rangle, \quad \mu^{\bullet} = \langle \mu \rangle, \quad (19)$$

и в четвертом случае (\diamond) – искомым эффективным свойствам композита («схема самосогласования» [6])

$$\mathbf{C}^\bullet = \mathbf{C}^*, \mathbf{e}^\bullet = \mathbf{e}^*, \mathbf{h}^\bullet = \mathbf{h}^*, \lambda^\bullet = \lambda^*, \mu^\bullet = \mu^*, \quad (20)$$

решения (\circ) , (\diamond) инвариантны к инверсии свойств фаз.

Результаты расчета (\square) и (\triangle) для эффективных констант κ_{11}^* , κ_{33}^* (рис.1,а,б) в обобщенном сингулярном приближении в *точности* совпали с аналитическими решениями [8] для полидисперсных структур (рис.1,а', рис.1,б'); решение (\diamond) по схеме самосогласования для κ_{33}^* в *точности* совпало с аналитическим решением [11] для полидисперсной структуры на рис.1,в'. Решения (\circ) , (\diamond) при «малых» степенях заполнения v_1 близки к решению (\square) для матричной по 2-й фазе структуре (рис.1,а') и при «больших» v_1 - к решению (\triangle) для матричной по 1-й фазе структуре (рис.1,б'). Отметим, что решение κ_{33}^* (\triangle) также в *точности* совпало с решением асимптотического метода осреднения [8] для идеальной периодической волокнистой структуры. Дополнительно на рис.2 – рис.5 представлены результаты расчета в обобщенном сингулярном приближении эффективных констант: модулей Юнга E_1^* , E_3^* , коэффициентов Пуассона ν_{12}^* , ν_{13}^* , модулей сдвига G_{12}^* , G_{13}^* , объемного модуля плоской деформации k_{12}^* (рис.2), электромеханических e_{311}^* , e_{333}^* , e_{113}^* (рис.3) и магнитомеханических h_{311}^* , h_{333}^* , h_{113}^* , h_{123}^* (рис.4) констант, диэлектрических λ_{11}^* , λ_{33}^* и магнитных μ_{11}^* , μ_{33}^* проницаемостей (рис.5) волокнистого пьезоэлектромагнетика в зависимости от объемной доли феррита.

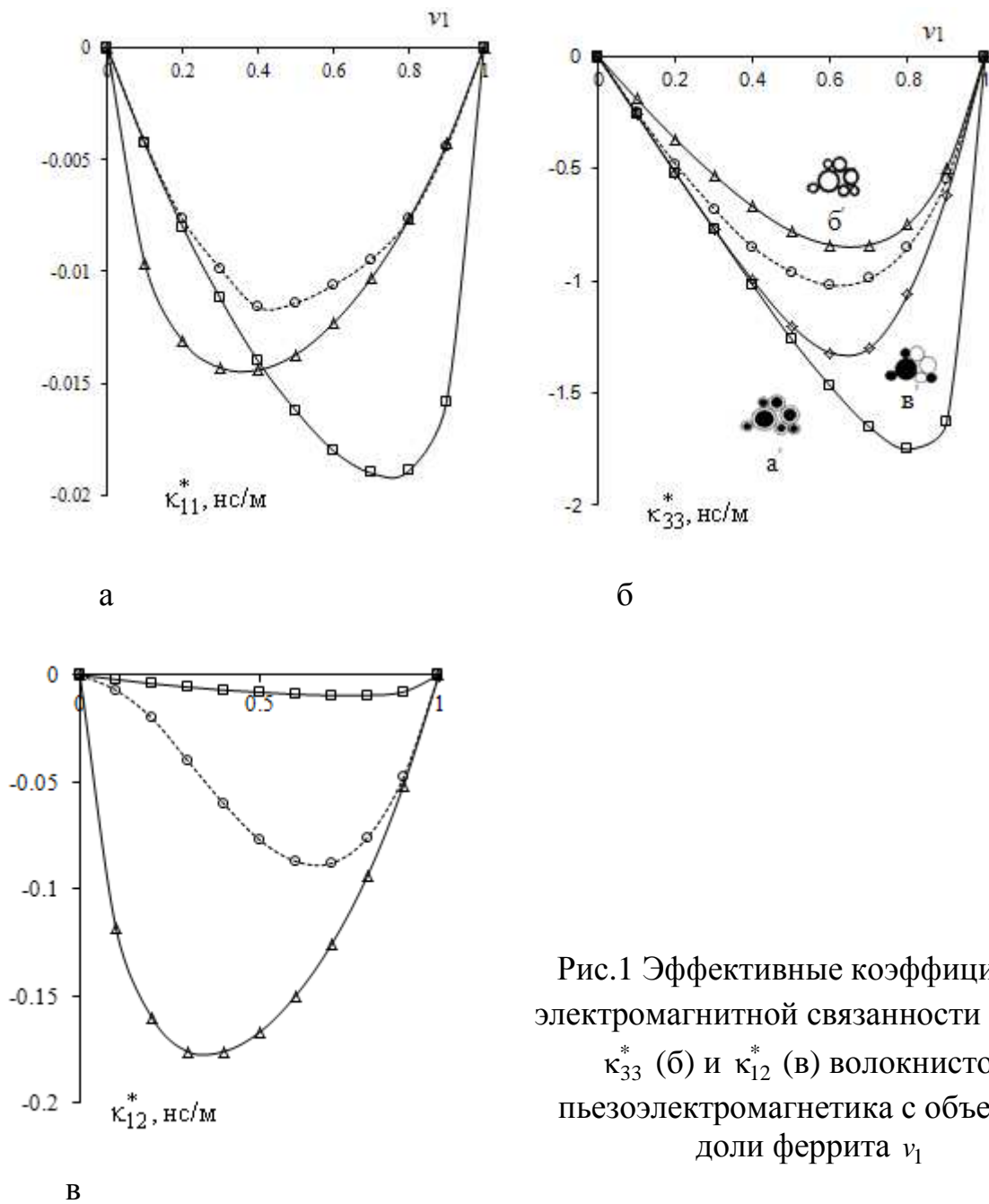
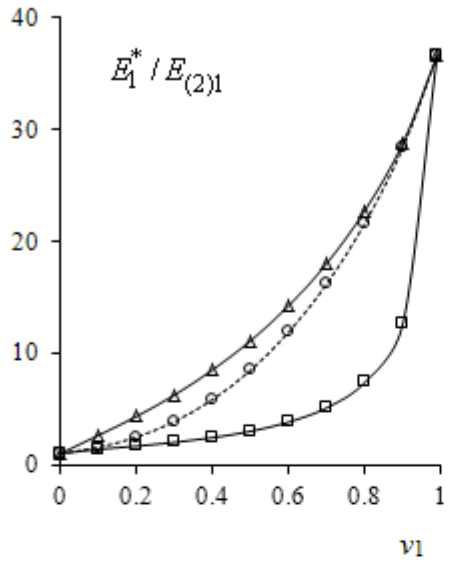
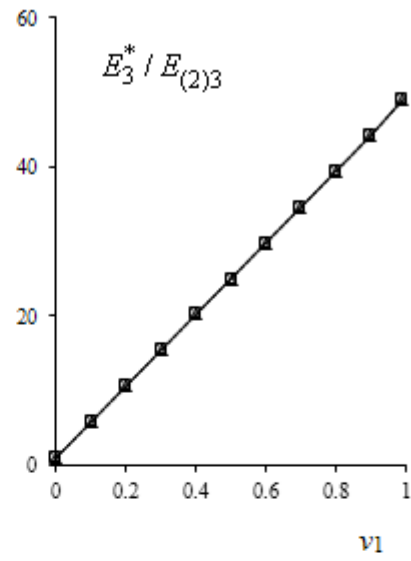


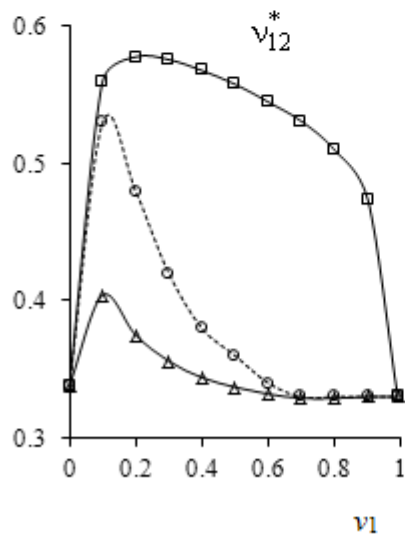
Рис.1 Эффективные коэффициенты электромагнитной связанности κ_{11}^* (а), κ_{33}^* (б) и κ_{12}^* (в) волокнистого пьезоэлектромагнетика с объемной долей феррита v_1



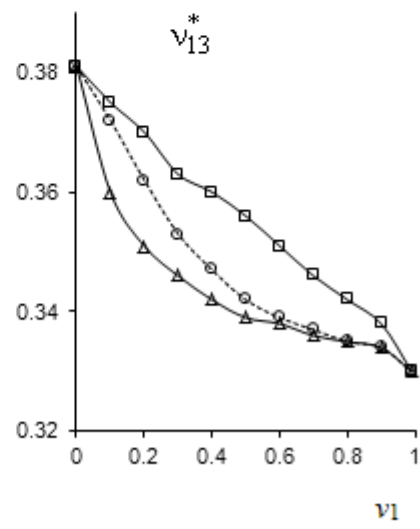
а



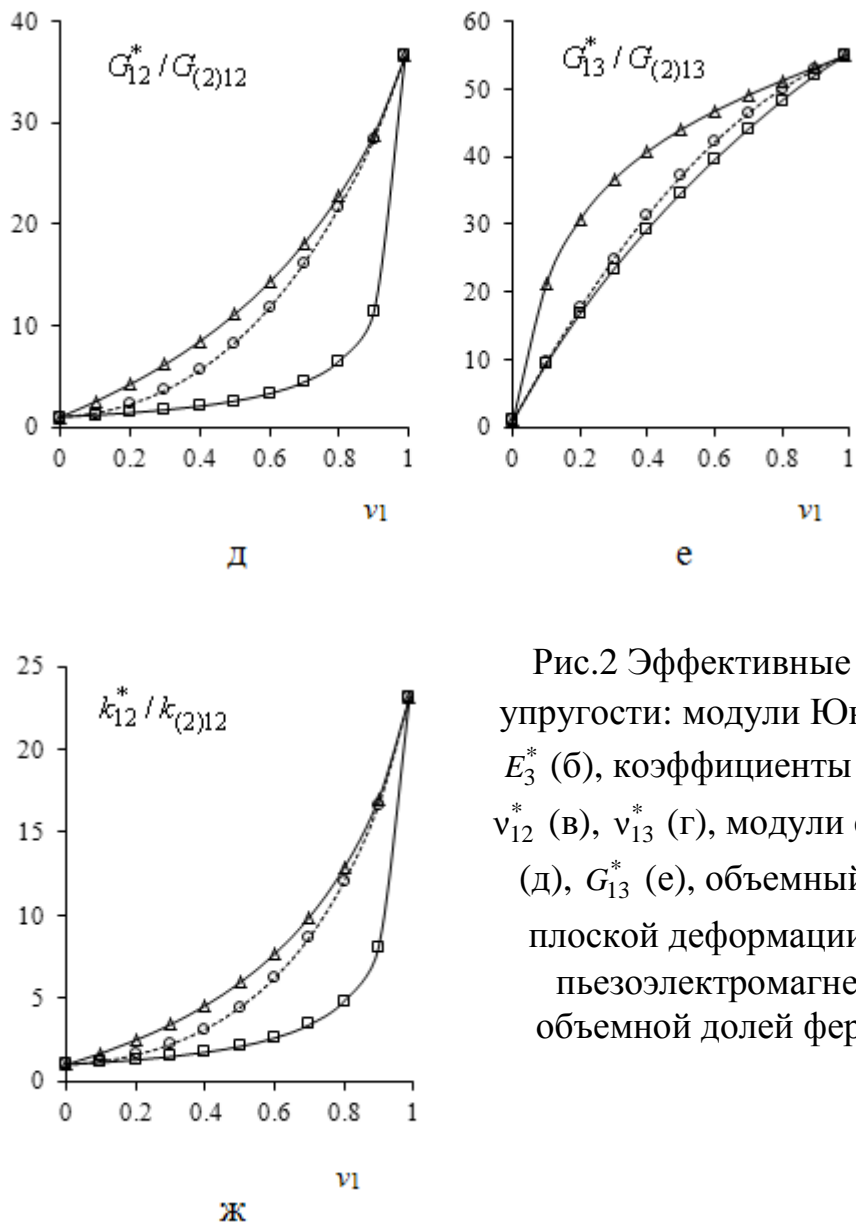
б



в



г



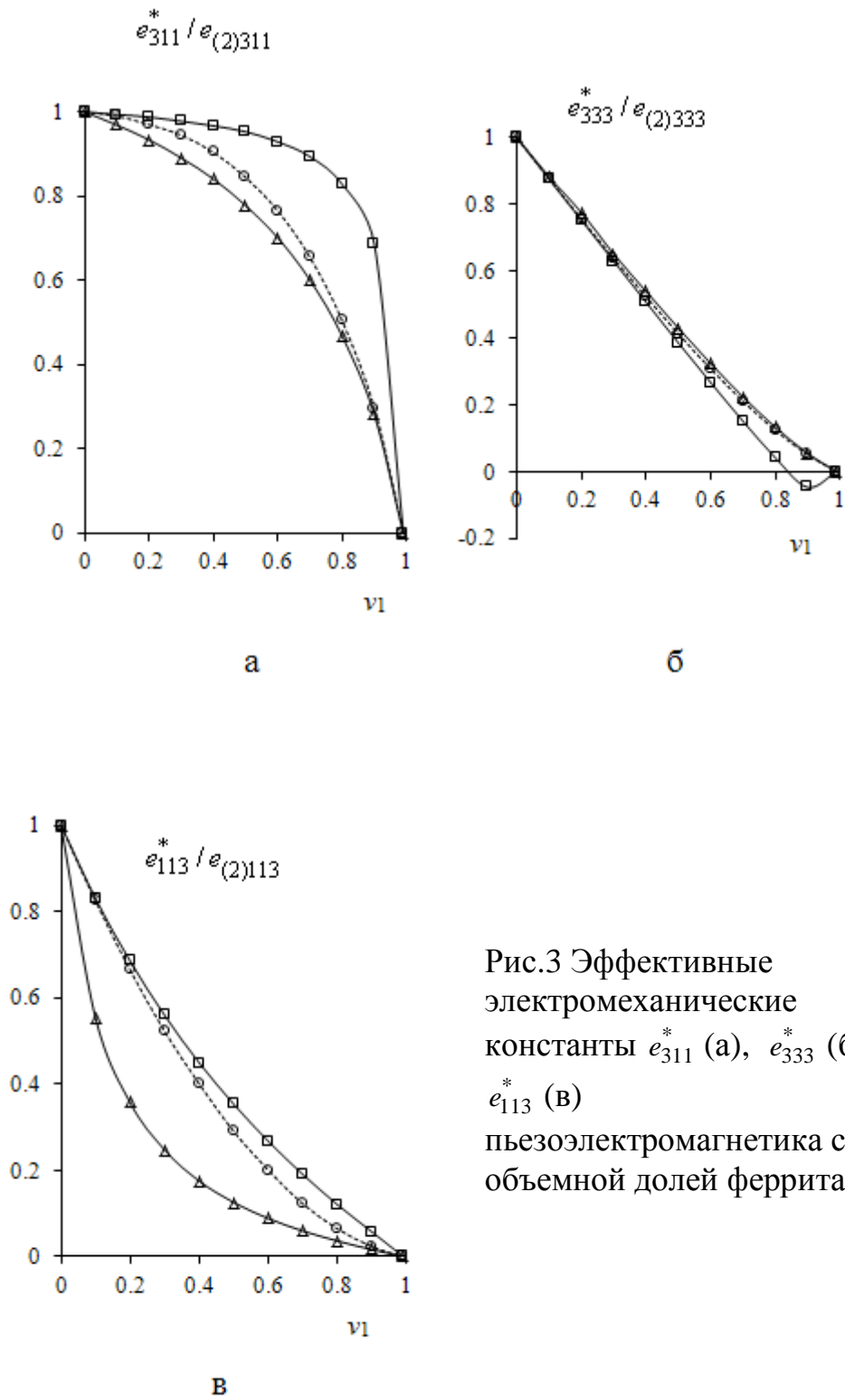


Рис.3 Эффективные электромеханические константы e_{311}^* (а), e_{333}^* (б), e_{113}^* (в) пьезоэлектромагнетика с объемной долей феррита v_1

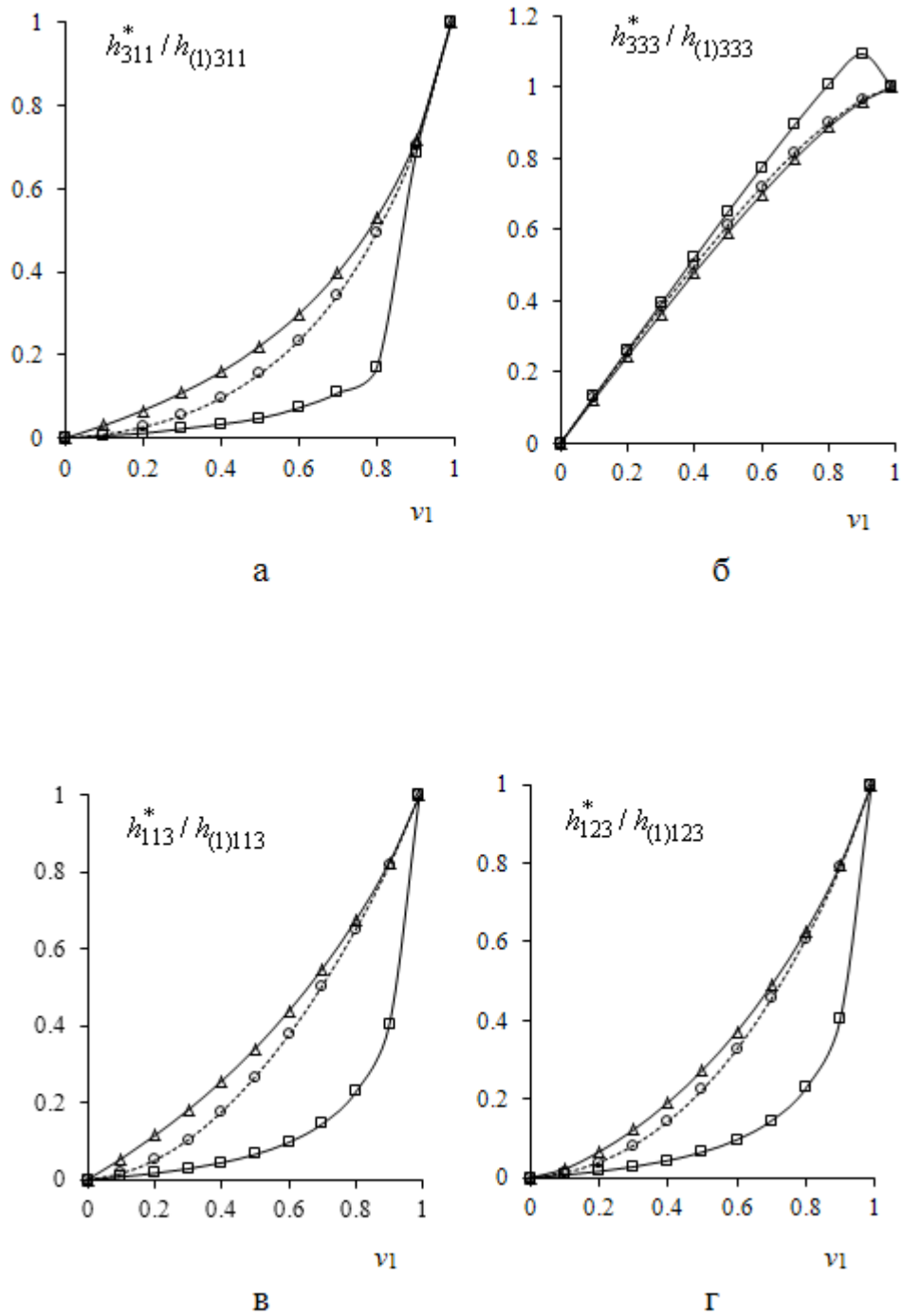


Рис.4 Эффективные магнитомеханические константы h_{311}^* (а), h_{333}^* (б), h_{113}^* (в), h_{123}^* (г) пьезоэлектромагнетика с объемной долей феррита v_1

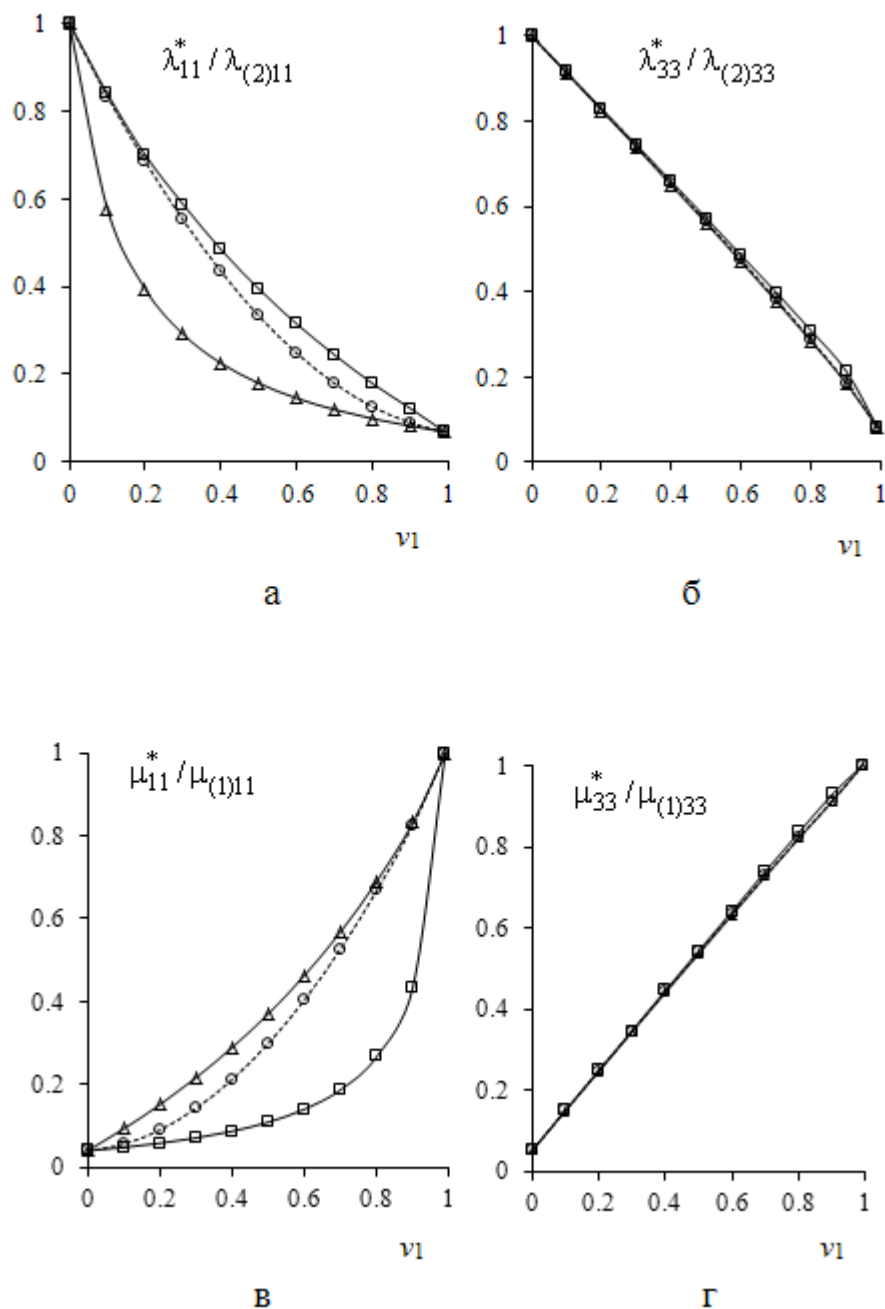


Рис.5 Эффективные диэлектрические λ_{11}^* (а), λ_{33}^* (б) и магнитных μ_{11}^* (в), μ_{33}^* (г) проницаемости пьезоэлектроматериала с объемной долей феррита ν_1

Заключение

Разработаны новые математические двухуровневые структурные модели электромагнитоупругости композитов с учетом взаимосвязей деформационных, электрических и магнитных полей. Получены решения связанных краевых

задач электромагнитоупругости в обобщенном сингулярном приближении статистической механики композитов на основе новых решений для сингулярных составляющих вторых производных функций Грина для однородной трансверсально-изотропной пьезоэлектромагнитной среды с эллипсоидальным зерном неоднородности. Представлены результаты прогнозирования 21-й независимой константы эффективных трансверсально-изотропных упругих и пьезоэлектромагнитных свойств однонаправленного волокнистого композита: пьезоэлектрика PVF с ферритовыми волокнами в обобщенном сингулярном приближении решения связанной краевой задачи электромагнитоупругости. Выявлен существенно немонотонный характер изменения эффективных коэффициентов электромагнитной связанности композита PVF/феррит от величины наполнения волокнами; определены значения объемных долей волокон, при которых эти коэффициенты принимают экстремальные значения. Для частных случаев проведены сравнения с известными аналитическими решениями асимптотического метода осреднения [8] для идеальной периодической волокнистой структуры, решениями на составных ячейках и на основе «схемы самосогласования» для различных полидисперсных структур (рис.1, а' - в') [4, 11].

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 14-01-96004 р_урал_а.

Литература

1. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультразвуке. - М.: Изд-во иностр. лит., 1952. - 448 с.
2. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел. М.: Наука, 1988. - 471 с.
3. Волков С.Д. Статистическая механика композитных материалов / С.Д. Волков, В.П. Ставров. – Минск: Изд-во Белорус. гос. ун-та, 1978. – 208 с.
4. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.

5. Хорошун Л.П., Маслов Б.П., Лещенко П.В. Прогнозирование эффективных свойств пьезоактивных композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1989. – 208 с.
6. Шермергор Т.Д. Теория упругости микронеоднородных сред. - М.: Наука, 1976. - 399 с.
7. Паньков А.А. Статистическая механика пьезокомпозитов. - Пермь: Изд-во Перм. гос. техн. ун-та, 2009. - 480 с.
8. Гетман И.П. О магнитоэлектрическом эффекте в пьезокомпозитах // ДАН СССР. - 1991. - Т. 317. - № 2. – С. 341-343
9. Паньков А.А. Влияние разупорядоченности и инверсии фаз на электромагнитную связанность пьезокомпозита с квазипериодической структурой // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2014. - №1; URL: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/12/text.pdf>
10. Паньков А.А. Диэлектрическая релаксация в волокнистом композите полиэтилен/феррит // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2014. - №2; URL: <http://jre.cplire.ru/jre/feb14/1/text.pdf>
11. Pan'kov A.A. Self-consistent solutions for electromagnetic coupling coefficients of fibrous piezocomposite // Composites: Mechanics, Computations, Applications. An International Journal. - 2014. - Vol. 5. - No 1. - P.77-88
12. Sessler G.M. Piezoelectricity in polyvinylidene fluoride // J. Acoust. Soc. Amer.. – 1981. – Vol. 70. – No 6. - P.1596-1608