

УДК 681.3: 519.65

## ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ ПРИ ВЫСОКИХ ТРЕБОВАНИЯХ К ТОЧНОСТИ

В. Ф. Жирков<sup>2,1</sup>, Л. Т. Сушкова<sup>2</sup>, А. И. Королев<sup>1</sup>, К. Н. Большаков<sup>1</sup>,  
А. А. Обеднин<sup>1</sup>, Г. В. Прокофьев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> АО «Зеленоградский нанотехнологический центр»,  
124527, Москва, Зеленоград, ул. Солнечная аллея, д.6.

<sup>2</sup> Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых,  
600000, Владимир, ул. Горького, 85

Статья поступила в редакцию 31 марта 2017 г.

**Аннотация.** Представлен метод интерполяции потока данных, позволяющий получить заданную, сколь угодно высокую точность аппроксимации сигнала, и его эффективная целочисленная реализация, ориентированная на применение в системах реального времени. Требуемая точность аппроксимации обеспечивается предложенным способом применения полиномов высоких степеней, который в статье обоснован, исследован и подтвержден моделированием. Достоинством численной реализации является невысокая вычислительная сложность и близкая к линейной зависимость от степени полинома.

**Ключевые слова:** полиномиальная интерполяция потоковых данных, высокая точность аппроксимации, эффективная численная реализация.

**Abstract.** Interpolation method of data stream for an approximation of the signal with given arbitrarily high accuracy, and its efficient integer implementation, focused on the use of real-time systems, is presented. The required accuracy of the approximation is provided by the proposed method of using polynomials of high degrees. The algorithms described in the article, are proved and confirmed by simulation. Numerical implementation has low computational complexity and near-linear dependence on the degree of the polynomial.

**Keywords:** polynomial interpolation of data stream, high accuracy of approximation, efficient numerical implementation.

## Введение

Интерполяция, как способ нахождения промежуточных значений функции по дискретному набору входных значений, входит в базовый набор операций цифровой обработки сигналов (ЦОС). В системе ЦОС эквидистантный поток входных данных, полученный дискретизацией входного непрерывного сигнала, поступает на вход интерполятора. Интерполяция производится вставкой  $(m-1)$  рассчитанных по алгоритму интерполяции промежуточных значений между последовательными элементами входного потока данных, где  $m$  – коэффициент интерполяции. Частота данных в выходном потоке в  $m$  раз больше входной, что создает условия для выполнения более точных измерений. Входной сигнал может иметь любую форму при условии, что его спектр лежит в полосе частот ноль – верхняя граничная, а частота дискретизации превышает верхнюю граничную более, чем вдвое.

В системах ЦОС традиционный вариант интерполятора строится на базе фильтра нижних частот (ФНЧ). По этому алгоритму во входной поток между каждой парой элементов вставляются  $(m-1)$  нулей, затем полученная последовательность поступает на ФНЧ. Характеристики ФНЧ (подавление, неравномерность АЧХ в полосе пропускания, крутизна полосы) определяют качество интерполяции. При проектировании фильтра увеличение точности приводит к быстрому росту количества коэффициентов фильтра и их разрядности, следовательно, ресурсов памяти и быстродействия процессора. Существенным недостатком ФНЧ является неравномерность АЧХ в полосе пропускания. Этот вариант интерполятора используется далее для сопоставительного анализа.

Представленные в статье материалы получены при разработке специализированных прецизионных микросхем датчиков положения. Интерполяторы являются важной частью измерительной системы этих датчиков. Измерительная система датчика построена на основе цифрового следящего преобразователя угол-код [1]. Входные сигналы синусно-косинусные, амплитудно-модулированные. К интерполятору как части

прецизионной системы предъявляются высокие требования: уровень ошибки не хуже -100 дБ, простота вычислительного алгоритма и минимальная занимаемая на кристалле микросхемы площадь. Последнее требование означает реализацию алгоритма полностью в целочисленном варианте с минимальным количеством умножителей.

Для измерительной системы важнейшим вопросом является точность интерполяции, которая определяется сравнением при тестировании известными функциями. В настоящей статье рассмотрено комплексное решение, при котором требуемая точность интерполяции сочетается с вычислительной простотой.

Представленный полиномиальный интерполятор является оригинальной разработкой. Построен на основе интерполяционного полинома Лагранжа, но, в отличие от него, позволяет получить практически любую требуемую точность интерполяции. Разработана методика целочисленной реализации вычислений, обладающая невысокой вычислительной сложностью для применения в системах реального времени, которая обеспечивает близкий к линейному рост вычислительной сложности при увеличении степени полинома (известному решению соответствует факториальная сложность). Представленный метод полиномиальной интерполяции обеспечивает не достижимую при традиционном решении точность и, одновременно, снижение требований к ресурсам вычислителя при сопоставимых требованиях к качеству интерполяции.

## 1. Постановка задачи

Предположим, что существует функция  $f(x)$ . Заданы  $n$  пар вещественных значений  $(x_i, y_i=f(x_i))$ ,  $i=1\dots n$ ,  $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ . Необходимо построить интерполирующую функцию  $y(x)$  проходящую через все точки  $(x_i, y_i)$  и позволяющую вычислить  $y$  для любых  $x$  на отрезке  $X = [x_1, x_n]$ . При этом  $f(x)$  и  $y(x)$  совпадают только в узлах  $x_i$ , в остальных точках возможны ошибки. Для оценки ошибок при различных алгоритмах интерполяции используется

функция  $e(x)=f(x)-y(x)$ . Поиск интерполирующих функций будем рассматривать в классе полиномов [2].

Рассматривается задача с бесконечным, равномерным, децимированным потоком данных. Коэффициент децимации –  $m$ . Время абстрактное, относительное, совпадает с номером элемента данных в потоке. В поле зрения (окне) обработчика находится отрезок входных данных  $W= [x_1, x_{n+1}]$ , состоящий из  $n$  сегментов  $[x_i, x_{i+1}]$  и  $n+1$  узлов. При цифровой обработке интерполяция создает в каждом сегменте  $m-1$  новых точек  $x_{ij}$ , вставляя в выходной поток данных  $m-1$  вычисленных значений  $f(x_{ij})$ . Расстояние между узлами  $h = x_{i+1} - x_i$  считаем одинаковым, расстояние  $dx = h/m$  между точками внутри сегмента, где  $m$  – коэффициент интерполяции/децимации. В каждом такте окно смещается на один узел вперед.

Тестовая функция  $f(x)$  должна обладать требуемыми в приложениях свойствами. Она может иметь любую форму. При этом требуется, чтобы ее спектр принадлежал полосе частот от нуля до  $f_{ub}$  – верхней граничной частоты, а частота дискретизации более, чем вдвое, превышала верхнюю  $f_{ub}$ .

Схема экспериментов такова. Для дискретного аргумента  $\{x_k\}$ ,  $k = 0, 1, \dots, N = m*n+1$  строится тестовая последовательность  $\{f(x_k)\}$ ,  $k = 1, \dots, N+1$ . Путем децимации с шагом  $m$  из нее отбираются пары  $\{x_i, f(x_i)\}$ ,  $i = 1, \dots, n+1$ , используемые далее в качестве входных данных (узлов интерполяции). Выполняется интерполяция по исследуемому алгоритму с вычислением  $\{y(x_k)\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Исследование точности алгоритмов интерполяции выполняется на основе анализа функции  $e(x_k)=f(x_k)-y(x_k)$  на всем отрезке, на его сегментах и в каждой точке последовательности.

## 2. Интерполяция полиномами

Аппроксимирующая функция задается полиномом

$$P(n, x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x^1 + p_0. \quad (1)$$

Требуется, чтобы искомым полином в узлах  $x_i$  принимал соответствующие значения  $y_i$  и имел наименьшую возможную степень. Существует единственный полином степени не выше  $n$ , удовлетворяющий этим условиям.

Он называется интерполяционным полиномом, коэффициенты которого определяются на основе решения системы линейных уравнений:

$$\begin{aligned} p_n x_1^n + p_{n-1} x_1^{n-1} + \dots + p_1 x_1^1 + p_0 &= y_1 \\ p_n x_2^n + p_{n-1} x_2^{n-1} + \dots + p_1 x_2^1 + p_0 &= y_2 \\ &\dots \\ p_n x_n^n + p_{n-1} x_n^{n-1} + \dots + p_1 x_n^1 + p_0 &= y_n. \end{aligned} \quad (2)$$

Матрица этой системы является матрицей Вандермонда, что гарантирует существование и единственность решения. Численное решение получается путем левого матричного деления (умножением на обратную матрицу).

Данная задача имеет также аналитическое решение [3]. Формулы, выражающие этот полином, могут быть представлены в различных формах: Лагранжа, Ньютона и др. Каждая форма имеет свои достоинства. В данной работе для последующих исследований выбран полином Лагранжа, который выражает зависимость от  $x$  в явном виде и допускает целочисленную реализацию.

Интерполяционный полином Лагранжа имеет вид:

$$f(x) \cong y(x) = P(n, x) = \sum_{k=0}^n y(k) L(n, k, x), \quad (3)$$

$$L(n, k, x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n ((x - x(j)) / (x(k) - x(j))), \quad (4)$$

При этом ошибка интерполирования

$$e(n, x) = |f(x) - P(n, x)| \text{ не превышает}$$

$$e(n, x) \leq \text{abs}(f^{(n+1)}(x) \prod_{j=0}^n (x - x(j))) / (n + 1)!. \quad (5)$$

Формула (5) позволяет оценить точность интерполяции. Для гармонической входной функции  $\min(\sin(x)') = 0$ ,  $\max(\sin(x)') = 1$ , ошибка интерполяции максимальна в точках, где входной сигнал изменяется с максимальной скоростью. С увеличением апертуры интерполятора  $n$  ошибка убывает пропорционально  $1/(n+1)!$  Это означает, что выбором  $n$  можно

добиться требуемой ошибки восстановления. Для получения количественных характеристик используется моделирование.

Значения функции в промежуточных точках могут быть вычислены непосредственно по приведенной формуле (1). Для этого достаточно определить класс интерполируемых функций, рассчитать ошибку и определить необходимое количество узлов интерполяции (размер окна).

Объем вычислений для каждой точки выходной последовательности пропорционален  $n^2$ , что может оказаться неприемлемо большим для системы реального времени. Для оценки возможностей применения полиномиальной интерполяции при потоковой обработке данных необходимо провести количественные исследования на моделях, оценить требуемые ресурсы, разработать методику применения. На данном этапе работы моделирование выполнялось в Matlab.

Интерполяционный полином  $P = [p_0, \dots, p_n]$ , найденный решением системы (2) путем умножения на обратную матрицу, проходит через все узловые точки, и его отклонение в табличных точках равно нулю. Другой способ связан с приближенным решением системы (2). Коэффициенты аппроксимирующего полинома  $P(n, x)$ , наилучшим способом приближающего таблицу функции  $Y(x)$  в смысле наименьшего квадратичного отклонения в узлах, можно найти, обратившись к функции  $P = \text{polyfit}(X, Y, n1)$ ,  $n1 \leq n$ . В ней имеется возможность нормирования данных, что уменьшает ошибки вычислений при больших значениях  $n$ . При одинаковых и не очень больших  $n$  оба варианта получения  $P$  дают идентичный результат. Однако к функции  $\text{polyfit}$  можно обратиться и для построения аппроксимирующего полинома меньшей степени, который, в общем случае, не может проходить через все узловые точки. Далее функция  $\text{polyfit}(X, Y, n)$  используется с параметром  $n$ , предполагающим точное решение системы (2). Для вычисления значений полинома  $y(x)$  внутри отрезка используется функция  $\text{polyval}(P, x)$ , где вектор  $x$  покрывает интервал табличных значений  $X$  и даже может незначительно выходить за его пределы.

### 3. Исследование ошибок интерполяции

Исследуем зависимость ошибок интерполяции от степени полинома и координаты внутри отрезка  $X$ . Абсолютная ошибка  $e(x)$  определена на отрезке интерполяции и представляет собой разность исходного и восстановленного  $y(x) = P(n, x)$  сигналов:  $e(x) = (f(x) - y(x))$ . Относительная ошибка интерполяции  $er(x) = e(x)/A$ .

В качестве тестового сигнала используется дискретизованная синусоида  $f(x) = A \sin(\omega t)$  с характеристиками из [1]: полоса пропускания 0 - 15625 Гц, частота дискретизации входных данных 62500 Гц, коэффициент интерполяции 128, частота выходных данных 8 МГц ( $62500 \cdot 128$ ), разрядность целочисленных коэффициентов 18 бит (относительная погрешность представления  $< 10^{-5}$ ), уровень подавления сигналов паразитных гармоник -100 дБ ( $10^{-5}$ ). Необходимо отметить, что синусоида вообще плохо аппроксимируется полиномами. Более того, ее частота, равная верхней граничной, делает тест максимально сложным.

На рис.1 приведены графики результатов интерполяции для  $n=7$ . Абсолютная ошибка интерполяции представлена пунктирной линией. На рисунке она для удобства наблюдения усилена в 3 раза. Видно, что ошибка интерполяции увеличивается при приближении к границам отрезка и зависит от его положения на кривой.

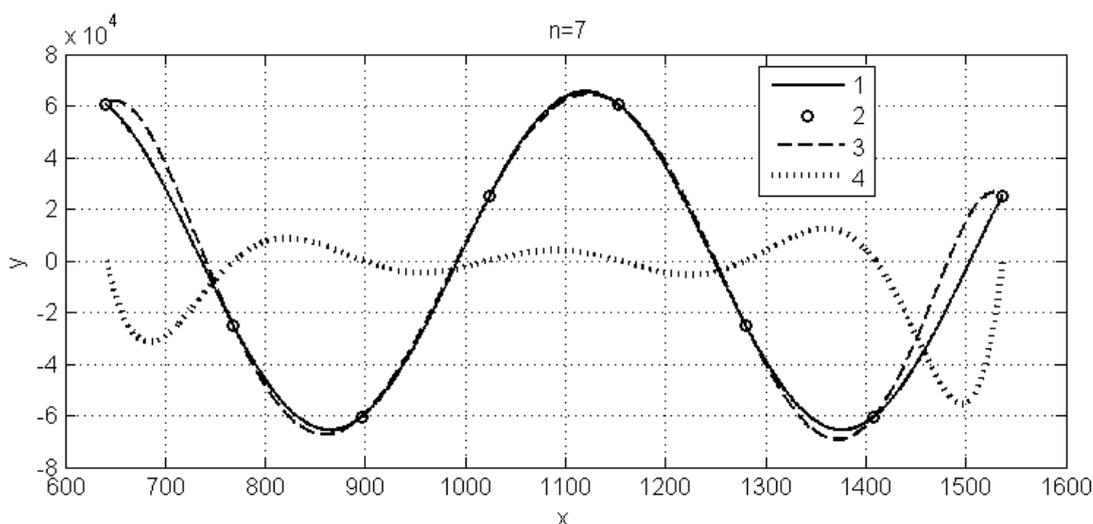


Рис.1. Интерполяция. Сигналы.

1 – тестовая функция, 2 – входные данные интерполятора,  
3 – интерполированная функция, 4 – ошибка (умножена на 3).

При увеличении количества узлов возрастает точность интерполяции во внутренних сегментах отрезка и одновременно ухудшается в приграничных. Ошибка включает в себя вычислительную погрешность, которая растет с ростом степени полинома. Она не заметна при малых  $n$ , но, в принципе, ограничивает максимальное число узлов и порядок полинома при больших  $n$ .

Ошибки на конкретном сегменте связаны не только с его позицией (номером) на отрезке интерполяции, но и с размещением этого отрезка на исследуемой функции. В формуле (5) это сомножитель  $f^{(n+1)}(x)$ . Для исключения влияния последнего и установления общих закономерностей необходимо усреднить ошибки внутри каждого сегмента при всех вариантах размещения самого отрезка интерполяции на тестовой функции, что можно выполнить сканированием.

Таким образом, качество интерполяции наиболее точно выражается функцией  $er(x)$  на отрезке интерполяции и производными характеристиками ошибок: максимальной  $er\_max = \max(\text{abs}(er(x)))$ , средней  $er\_mean = \text{mean}(\text{abs}(er(x)))$  и стандартным отклонением  $er\_std = \text{std}(er(x))$ , которые могут быть вычислены как для всего отрезка, так и для каждого его сегмента.

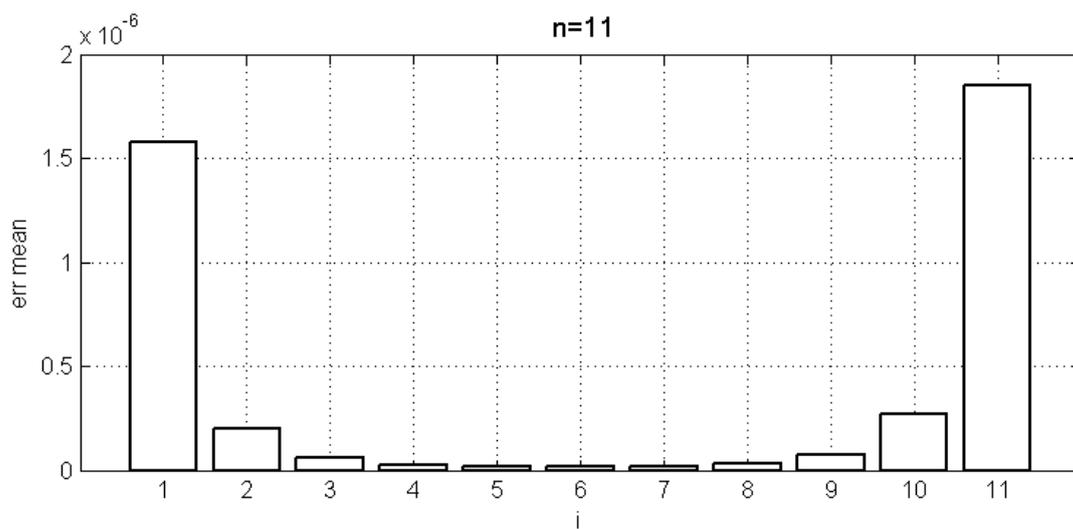


Рис. 2. Распределение ошибок по сегментам.

$i$  – номер сегмента,  $er\_mean$  – средняя относительная ошибка.

Средние значения ошибок в сегментах для  $n = 11$  представлены на рис.2. Значения ошибок:  $er\_mean = 0.129, 0.018, 0.005, 0.002, 0.0013, 0.0011, 0.0013, 0.002, 0.005, 0.018, 0.128$ . Минимальное значение 0.0011, как и предполагалось, получено для срединного сегмента. Далее порядок полинома  $n$  будем выбирать нечетным, что позволит однозначно определять срединный сегмент.

Максимальная точность интерполяции может быть достигнута при использовании только хорошо аппроксимированных внутренних сегментов каждого из последовательных окон.

#### 4. Алгоритм интерполяции

На основе проведенных исследований разработана соответствующая методика и реализующий ее алгоритм интерполяции полиномами, основанный на использовании единственного срединного сегмента в каждом интерполяционном окне. Алгоритм включает в себя следующую последовательность действий:

1. Задание характеристик входных сигналов и требований к качеству интерполяции.
2. Проведение исследования точности интерполяции аналогично описанному выше. Определение минимального размера окна интерполяции  $n$ , при котором ошибка не превысит максимально допустимую.
3. Задание узлов стартового отрезка  $x_1(1:n), y_1(1:n)$ .
4. Нахождение коэффициентов  $P$  аппроксимирующего полинома степени  $n$  решением системы (2).
5. Вычисление  $y(x)$  по формуле (1) для  $m-1$  внутренних точек срединного сегмента. Результаты передаются в выходной поток и присоединяются к вычисленным ранее.
6. Сдвиг окна на 1 узел (сегмент) вперед.
7. Повторение п. 4-6 до тех пор, пока не будет достигнут конец тестовой последовательности.

Реализация алгоритма в моделирующей программе позволила получить представленные далее количественные оценки. На рис.5 показаны результаты применения этого алгоритма к тестовой последовательности при  $n=11$ . Интерполяция начинается с шестого сегмента – срединного для  $n=11$ . Задержка выходного сигнала составляет  $\text{floor}(n/2)$  точек входной последовательности. Такая задержка одинакова для любой точки входного сигнала и не приводит к искажению его формы. Интерполированные данные представлены пунктирной линией. Неполное совпадение двух графиков в области интерполяции можно увидеть только при большом увеличении. График ошибки усилен в 20 раз.

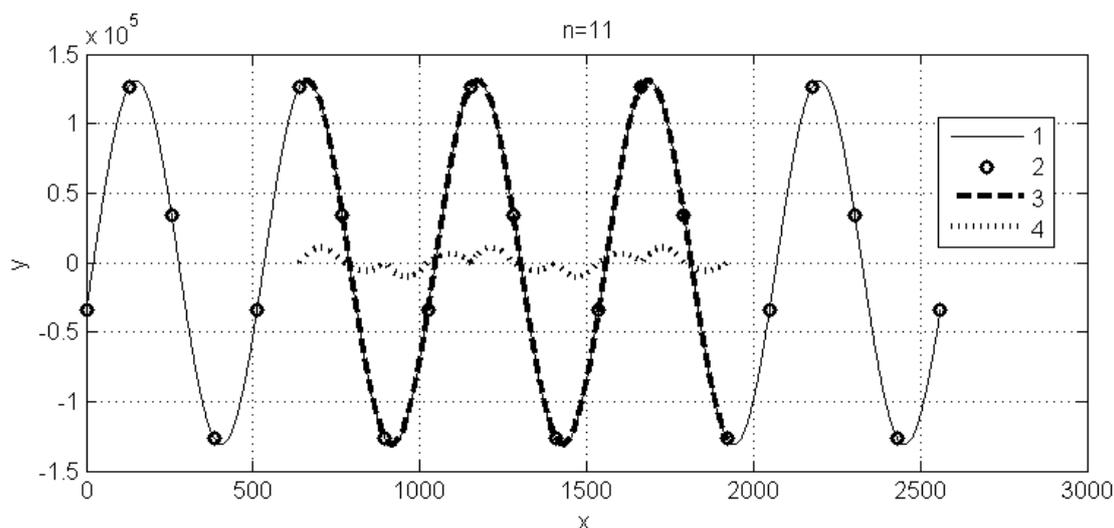


Рис.3. Интерполяция. Сигналы.

1 – тестовая функция, 2 – входные данные интерполятора,  
3 – интерполированная функция, 4 – ошибка (умножена на 20).

## 5. Зависимость ошибки от степени интерполирующего полинома

Результаты экспериментальных исследований характеристик интерполятора приведены ниже. Ошибки интерполяции при разных  $n$ , полученные моделированием для тестовой функции, приведены в таблице 1. Эти данные, хотя и получены для конкретного набора параметров, тем не менее, выражают общую закономерность. Используя табличные данные, можно ориентировочно выбрать порядок полинома по требуемой точности интерполяции. Аналогичные данные для базового варианта интерполятора, использующего НЧ-фильтр, приведены в последней строке таблицы.

Таблица 1. Ошибки интерполяции в зависимости от  $n$  - степени интерполирующего полинома.

Степень интерполяционного полинома	Относительные ошибки интерполяции		
	Средняя	СКО	Максимальная
3	0.025	0.032	0.083
5	0.011	0.014	0.037
7	0.0048	0.0064	0.017
9	0.0022	0.0030	0.0083
11	0.0011	0.0041	0.0015
15	0.00028	0.00039	0.0011
29	0.0000050	0.0000062	0.000015
40	0.000000045	0.00000031	0.00000067
50	0.0000000012		
52	0.00000000051	0.00000000058	0.00000000084
55	0.0000000037		
60	0.0000000084		
<b>НЧ-фильтр</b>	<b>0.0079</b>	<b>0.0055</b>	<b>0.021</b>

Из таблицы следует, что увеличение  $n$  на 2 приводит приблизительно к двукратному уменьшению ошибки. Максимальная ошибка превышает среднюю приблизительно в три раза. Если ориентироваться на ошибки, то результаты интерполяции, полученные в примере с НЧ-фильтрацией, могут быть получены полиномиальным интерполятором степени  $n=7$ .

Графическая форма представления зависимости максимальной ошибки интерполяции от степени интерполирующего полинома представлена на рис. 4.

Хотя метод полиномиальной интерполяции не имеет ограничений по точности, но из рис. 4 видно, что при больших значениях  $n$  начинают сказываться погрешности вычислений, вследствие чего, ошибка, достигнув минимального значения, начинает нарастать. При выбранных характеристиках

сигнала минимальное значение относительной ошибки  $7.5e-09$  получено при  $n=52$ .

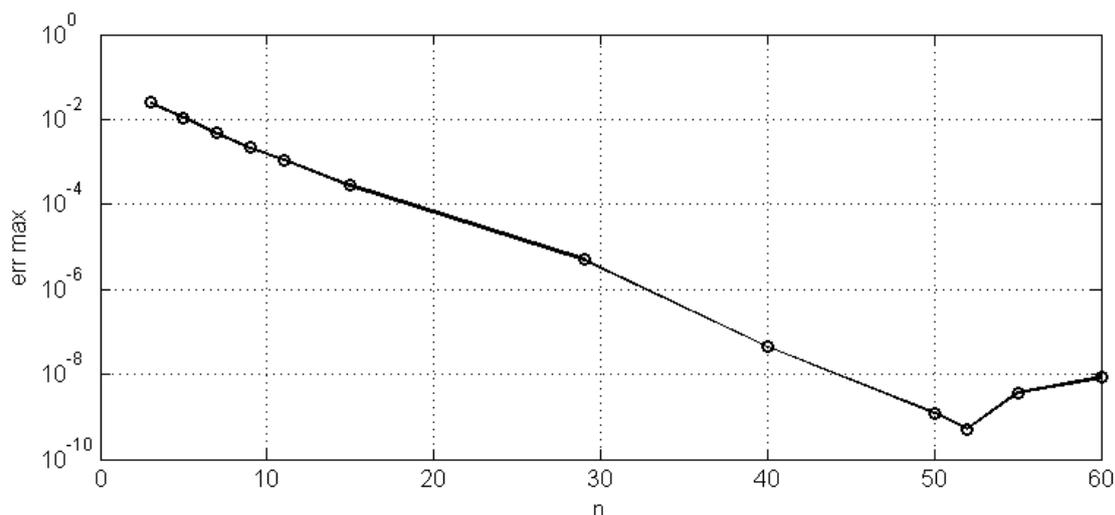


Рис. 4. Максимальная ошибка интерполяции в зависимости от степени интерполирующего полинома.

## 6. Зависимость ошибки от частоты дискретизации

В проведенных экспериментах отношение частоты дискретизации до интерполяции ( $Fs_{in} = 62500$  Гц) к несущей частоте ( $f_0=15625$  Гц) было неизменным, равным 4. Обозначим  $K = Fs_{in} / f_0$  (число дискретных отсчетов на период). Фактически несущая представляла собой верхнюю граничную частоту в спектре сигнала. Такой сигнал при дискретизации был представлен четырьмя отсчетами на период (2 отсчета на период соответствуют частоте Найквиста). В работе выполнены эксперименты и для других значений частоты несущей:  $f_0 \cdot 3/2$ ,  $f_0/2$ ,  $f_0/4$ . Результаты представлены в таблице 2 и, для наглядности, на графике рис.5.

Зависимость средней ошибки от величины отношения верхней граничной частоты в спектре сигнала к частоте Найквиста очень сильная. При уменьшении частоты несущей в 2 раза ошибка уменьшается при разных  $n/K$  до  $7.1e+07$  раз. Следовательно, основная сложность интерполяции связана с отношением частоты дискретизации к верхней частоте в спектре сигнала.

Таблица 2. Ошибки интерполяции в зависимости от  $K$ .

$n/K$	Средняя ошибка ( $e_i$ )	$e_{(i-1)}/e_i$		$n/K$	Средняя ошибка ( $e_i$ )	$e_{(i-1)}/e_i$
3/3	0.096			9/3	0.046	
3/4	0.025	4		9/4	0.0022	21
3/8	0.0018	14		9/8	0.000004	550
3/16	0.00012	15		9/16	0.0000000048	816
5/3	0.074			25/3	0.013	
5/4	0.012	7		25/4	0.000015	866
5/8	0.00023	47		25/8	0.000000000022	6.8 e+06
5/16	0.0000039	59				
7/3	0.058			29/4	0.0000050	
7/4	0.0052	12		29/8	0.00000000000007	7.1e+07
7/8	0.000031	167				
7/16	0.00000013	238		<b>НЧ- фильтр</b>	<b>0.0079</b>	

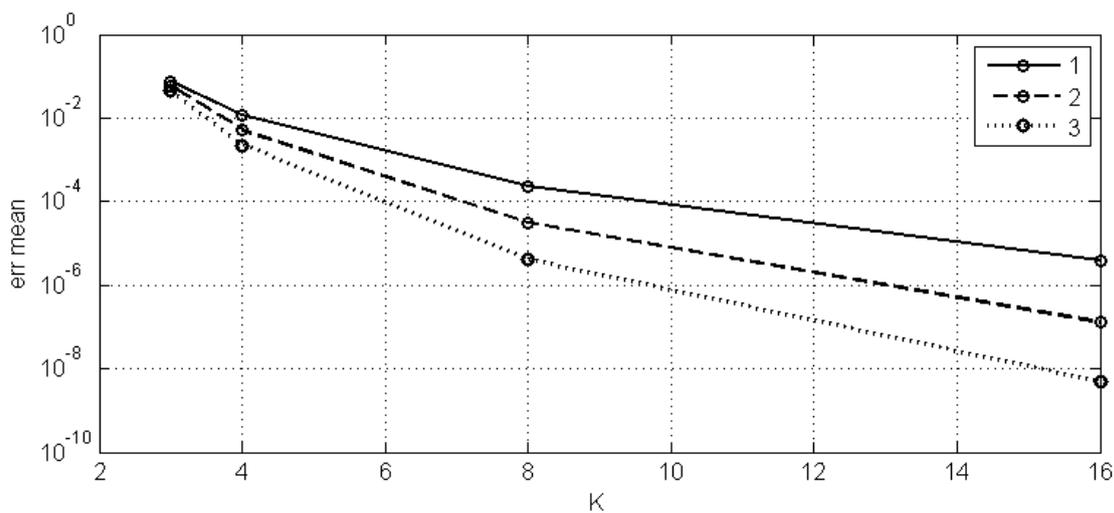


Рис. 5. Ошибки интерполяции в зависимости от  $K$  при разных  $n$ .

1 –  $n=5$ , 2 –  $n=7$ , 3 –  $n=9$ .

В базовом примере на один период несущей приходится 4 дискретных точки на входе интерполятора (при частоте Найквиста две). Значение  $K$  задается на системном этапе проектирования. Например, выбрав интерполяцию полиномами 9-й степени при  $K=8$  можно обеспечить среднюю ошибку 0.000004 (0.0004%)! В логарифмической шкале это  $20 \cdot \log_{10}(0.000004) = -108$  дБ. При  $K=4$  это  $20 \cdot \log_{10}(0.0022) = -53$  дБ. Первый вариант удовлетворяет требованиям ТЗ (100 дБ) по соотношениям в спектре и обеспечивает меньшую в 2000 раз ошибку.

*Примечание.* Синусоидальный сигнал с частотой, равной верхней граничной, после дискретизации с частотой Найквиста ( $K=2$ ) теряет информативность. Он представляет собой поток одинаковых констант (даже нулей при определенных фазовых соотношениях). Восстановить интерполяцией исходный сигнал в этом случае невозможно.

Полиномиальная интерполяция обеспечивает высокое качество восстановления сигнала после децимации в смысле минимаксной относительной ошибки. При заданном значении этой характеристики выбор степени интерполирующего полинома может быть выполнен путем моделирования, как изложено выше. Наибольший эффект при системном проектировании связан с правильным выбором отношения частоты дискретизации к верхней граничной частоте в спектре сигнала. Выбранное значение 4 в тестовом примере существенно усложнило реализацию интерполятора. Исходя из этого, можно рекомендовать выбирать значение  $K$  в соответствии с графиком, желательно не менее 8, что соответствует частоте дискретизации в 4 раза выше частоты Найквиста.

## **7. Динамические характеристики интерполятора**

Рассмотрим реакцию интерполятора на импульсный входной сигнал. На рис. 6 это дискретная последовательность синего цвета. Результат интерполяции – красная кривая, ошибка – черная. Статическая погрешность равна нулю. Поскольку интерполяционный полином Лагранжа в узловых точках имеет нулевую ошибку, длительности фронтов всегда равны одному

сегменту. Переходный процесс имеет длительность  $n$  сегментов. При выбранном нечетном  $n$  он захватывает  $(n-1)/2$  сегментов слева и справа от сегмента, соответствующего фронту. Реакция рассмотренного ранее НЧ-фильтра на такой же сигнал представлена на рис. 7. Для НЧ-фильтра характерна существенная групповая задержка (в примере около пяти сегментов) и статическая погрешность. Другие погрешности интерполяции были представлены ранее в таблицах. В целом, полиномиальный интерполятор имеет существенно лучшую переходную характеристику.

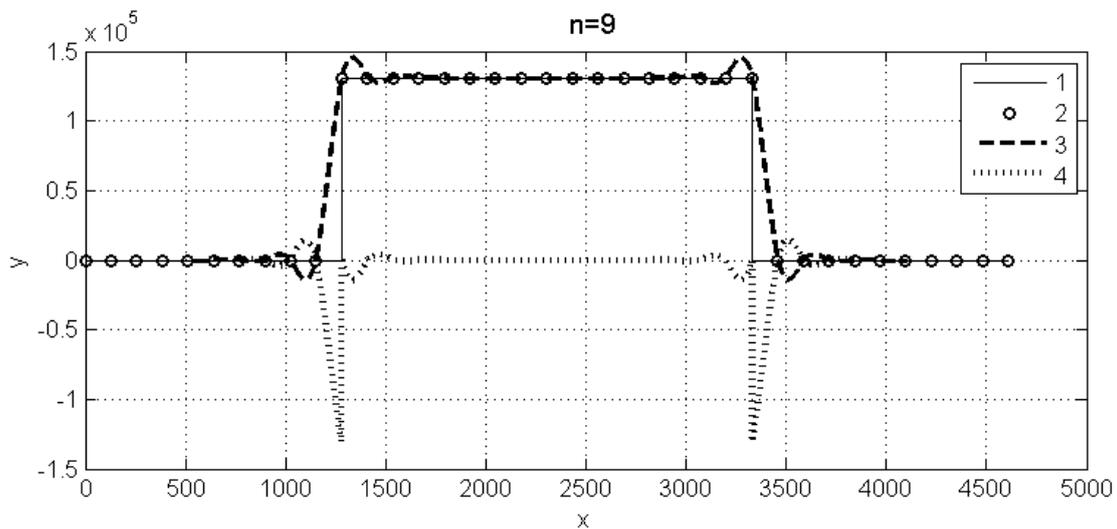


Рис. 6. Реакция полиномиального интерполятора на импульс.

1 – тестовая функция - импульс, 2 – входные данные интерполятора, 3 – интерполированная функция, 4 – ошибка.

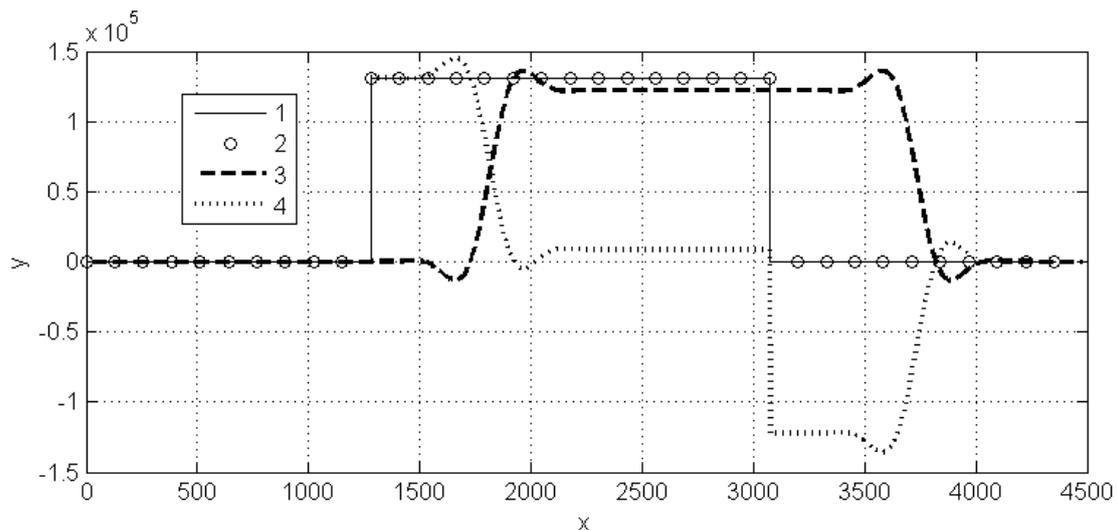


Рис. 7. Реакция НЧ-фильтра на импульс.

1 – тестовая функция - импульс, 2 – входные данные интерполятора, 3 – интерполированная функция, 4 – ошибка.

## 8. Выбор параметров алгоритма, исходя из требований к спектру

Требования технического задания к НЧ-фильтру из рассмотренного во введении примера устанавливают нормы на допустимые искажения спектра сигнала по сравнению с первоначальным. Это отношение между первыми двумя максимумами спектра Фурье, которое не должно быть менее 100 дБ. Для тестового примера при  $K=4$  требуемое значение 100 дБ получено при  $n=29$ . Спектр сигнала на выходе интерполятора приведен на рис 8. Максимальная относительная ошибка = 0.000005.

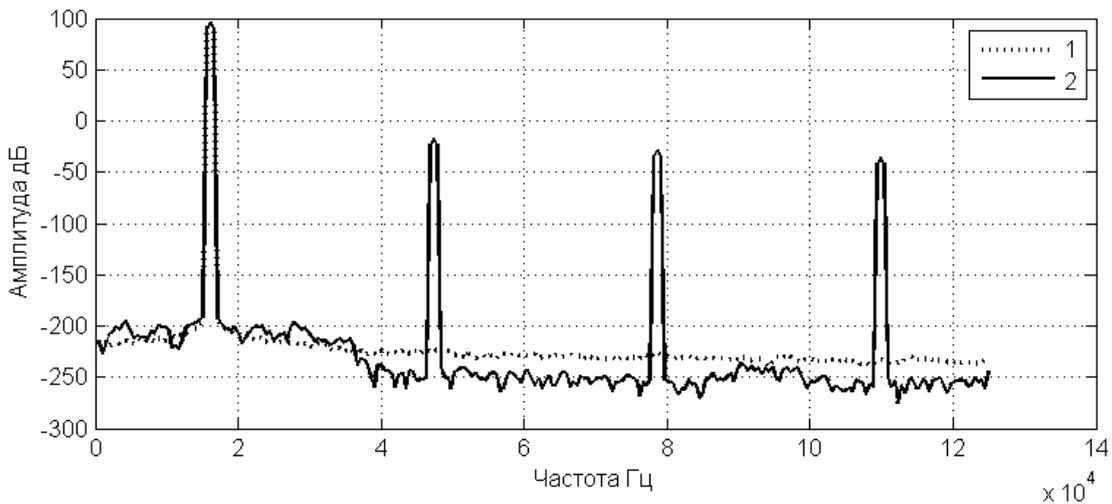


Рис. 8. Спектр восстановленного сигнала.  $K=4$ ,  $n=29$ ,  $m=128$ .

1 – спектр тестового сигнала, 2 – спектр восстановленного сигнала.

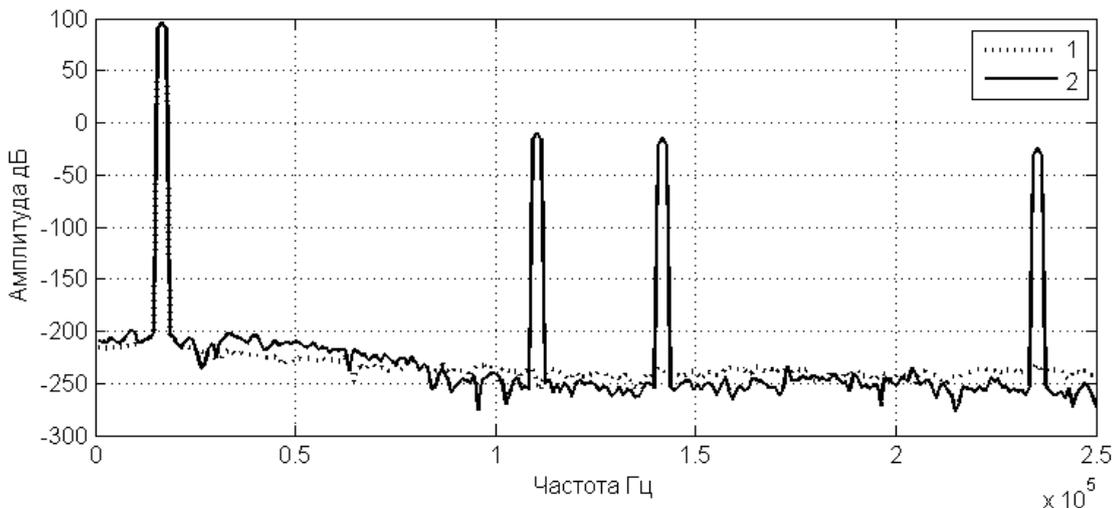


Рис. 9. Спектр восстановленного сигнала.  $K=8$ ,  $n=9$ ,  $m=64$ .

1 – спектр тестового сигнала, 2 – спектр восстановленного сигнала.

Увеличим  $K$  до 8. Для этого, при сохранении параметров входных и выходных сигналов, удвоена частота дискретизации на входе и в два раза уменьшен коэффициент децимации.

Из таблицы 2 следует, что при  $n=9$  отклонение восстановленного сигнала от исходного в среднем не превысит 0.0004%. На рис. 9 представлен спектр восстановленного сигнала.

Следует отметить еще одно важное достоинство разработанного интерполятора. Указанная погрешность соответствует максимальной частоте в спектре сигнала. При меньшей частоте она будет еще ниже. Следовательно, в рабочей полосе частот коэффициент передачи интерполятора практически равен единице, а неравномерность АЧХ практически равна нулю.

Для сравнения тестовый пример обрабатывался НЧ-фильтром, параметры которого были указаны ранее. На рис. 10 показан фрагмент исходного и восстановленного сигналов, а на рис. 11 приведены их спектры.

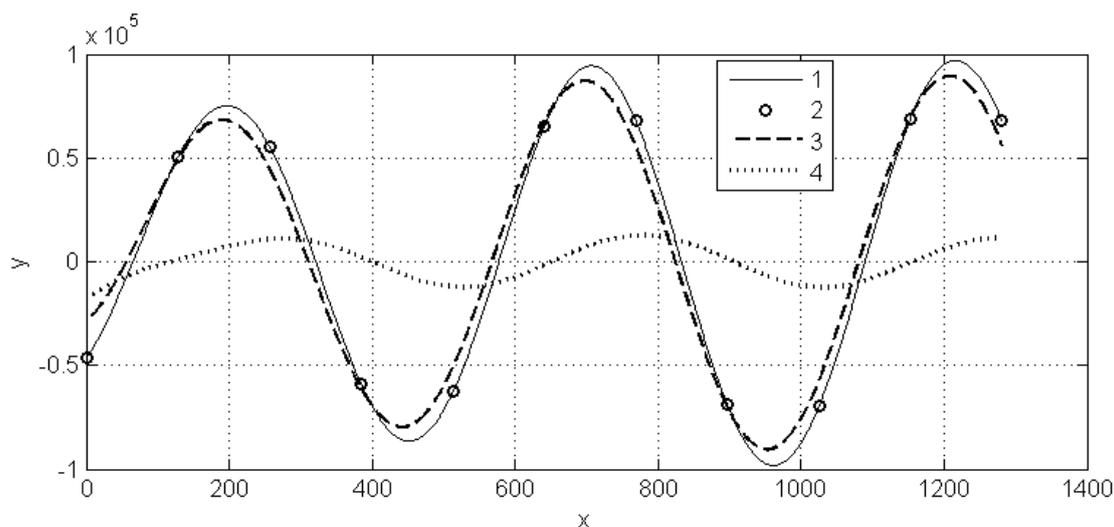


Рис. 10. Интерполяция НЧ-фильтром. Сигналы:

1 – тестовая функция, 2 – входные данные интерполятора,  
3 – интерполированная функция, 4 – ошибка.

Анализ рисунка 10 показывает, что имеются заметные ошибки восстановления. Исследование восстановленного сигнала позволило провести его коррекцию. После удаления переходного процесса, точного совмещения по времени и масштабирования по амплитуде ошибки уменьшились

приблизительно в пять раз. Полученная статистика ошибок для тестового файла приведена в таблице 2. Средняя относительная (приведённая) ошибка для данного примера составила 0.0079.

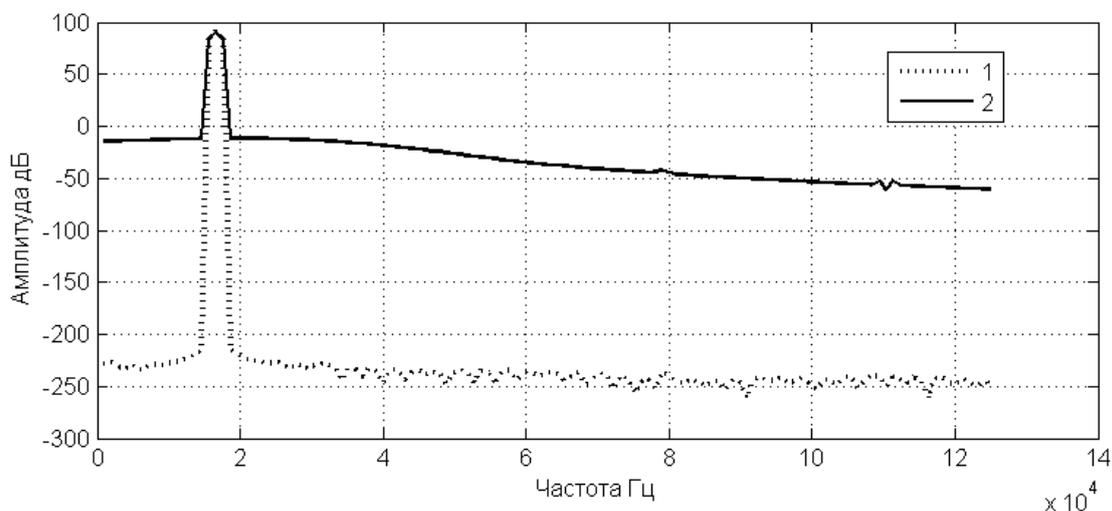


Рис.11. Спектр после НЧ-фильтрации.

1 – спектр тестового сигнала, 2 – спектр восстановленного сигнала.

Несмотря на то, что требование ТЗ по превышению на 100 дБ амплитуды основных гармоник над остальными выполняется, помехи имеют сплошной спектр. Их суммарная мощность весьма значима, что объясняет существенные искажения формы выходного сигнала. По сравнению с полиномиальной интерполяцией ошибка в 2000 раз больше!

## 9. Численная реализация интерполятора

Из приведенных примеров следует, что предложенная методика интерполяции может дать существенно лучший результат по сравнению с низкочастотной фильтрацией. Необходима эффективная целочисленная реализация формул (3), (4) на срединном сегменте отрезка в соответствии с предложенной методикой ее применения.

Продемонстрируем получение расчетных формул при  $n=3$ . Вначале следует получить коэффициенты полинома  $f_l(t) = p_3*t^3 + p_2*t^2 + p_1*t + p_0$ .

Упростим  $L(n, k, x)$ . Обычно,  $m$  равно 2 в целой степени, например,  $m$  равно  $128=2^7$ . Примем  $x(k+1) - x(k)=m$ , тогда сегмент будет содержать  $m$  точек с

расстоянием 1 между ними. Отрезок интерполяции содержит  $n+1$  узел  $x(0), x(1), \dots, x(n+1)$ . Примем  $x(0) = 0$ . Тогда  $x(k) = (k-1) * m$ . На сегменте  $[x(k), x(k+1)]$  интерполяция создает  $(m-1)$  точек с координатами  $x = x(k) + t$ , т.е.  $(k-1) * m + t$ ,  $t = 1, \dots, m-1$ .

После подстановки расчетные формулы существенно упростились. Полиномы  $L(n, k, x)$  содержат только целые числа. Произведение в знаменателе – константа.

Продемонстрируем полученные формулы для  $n=3$ . Коэффициенты интерполяционного полинома  $P(n, t) = p_3t^3 + p_2t^2 + p_1t + p_0$ :

$$p_3 = (-y_1 + 3y_2 - 3y_3 + y_4) / 6$$

$$p_2 = (y_1 - 2y_2 + y_3) / 2$$

$$p_1 = (-2y_1 - 3y_2 + 6y_3 - y_4) / 6$$

$$p_0 = (y_2) / 1$$

Уравнения можно записать компактнее в матричной форме:

$$\mathbf{M}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 6 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \mathbf{m}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_3 \cdot \mathbf{Y}, (\mathbf{p}(i) = \mathbf{M}(i,:) \cdot \mathbf{m}_3(i)), i=0:3. \tag{6}$$

В полученных расчетных формулах содержатся константы: матрица  $\mathbf{M}_3$  и столбец множителей  $\mathbf{m}_3$ , связанные только со степенью полинома. Их следует вычислить единственный раз для конкретных  $n$ . Поскольку  $m=2$  в целой степени, например,  $2^7$ , умножение на 2 в целой степени означает сдвиг – считывание результата с соответствующих разрядов регистра результата, поэтому на трудоемкость вычислений эта операция практически не влияет. Матрица  $\mathbf{M}$ , затем коэффициенты полинома вычисляются один раз на сегмент. Трудоемкость расчетов на этом шаге следует разделить на  $m$ , чтобы отнести ее к одной интерполируемой точке.

Вычисления внутри сегмента выполняются по схеме Горнера, что позволяет вычислить полином за  $n$  умножений и  $n$  сложений, т.е. зависимость от порядка полинома получилась линейная. Каждое из  $t=1:(m-1)$  значений выходной последовательности в сегменте вычисляется по формуле

$$y(t) = ((p_3 * t + p_2) * t + p_1) * t + p_0, \quad t=1:(m-1). \quad (7)$$

Все операции выполняются над целочисленными данными. Это позволяет заменить умножение последовательностью сложений. При принятой в примере разрядности входных данных 18 одно умножение эквивалентно, в среднем, 9-ти сложениям.

Уравнения (6) и (7) зависят от  $n$  линейно. Проведенные расчеты  $[Mn, mn]$  для  $n = 5$  и 9, соответственно, позволяют по индукции оценить трудоемкость вычислений  $Q$  для произвольных значений  $n$ .

Далее полагаем, что таблицы констант  $[Mn, mn]$  известны. Уравнения (6) выполняются один раз на сегмент для последовательности из  $m$  точек. Трудоемкость решения системы (6), отнесенная к одной точке:

$$Q1 = (n \text{ уравнений}) * ((n+1) \text{ умножений и } (n+1) \text{ сложений}) / m.$$

Ориентировочно, на каждую интерполируемую точку на этом шаге вычислений приходится  $Q1 \approx (n^2 \text{ умножений} + n^2 \text{ сложений}) / m$ . Зависимость от степени полинома – квадратичная. Поэтому сложность реализаций при  $n=29$  и  $n=9$  отличается на порядок.

Расчет по уравнению (7) выполняется для каждой из  $m$  точек отрезка. Его трудоемкость

$$Q2 = n \text{ умножений и } n \text{ сложений на точку.}$$

Поскольку в оценках  $Q1$  и  $Q2$  количество сложений и умножений одинаково, с учетом того, что трудоемкость умножения приблизительно в 10 раз больше, последующие оценки можно производить только по числу умножений, необходимых для получения одной точки выходной последовательности:

$$Q = Q1 + Q2 \approx n^2 / m + n.$$

Расчетные данные для разных  $n$  представлены в таблице 3.

Таблица 3. Трудоемкость интерполяции.

Степень интерполяционн ого полинома	Количество операций умножения на точку ( $m=128$ )			Средняя относительная ошибка	Спектр, дБ. Сигнал/пом еха, мин.
	Q1	Q2	Q		
3	0.1	3	3.1	0.025	28
5	0.2	5	5.2	0.011	35
7	0.4	7	7.4	0.0048	42
9	0.6	9	9.6	0.0022	49
11	0.9	11	11.9	0.0011	55
15	1.8	15	16.8	0.00028	68
<b>25</b>	4.9	25	<b>29.9</b>	<b>0.000015</b>	<b>92</b>
29	6.6	29	35.6	0.0000050	100
35	9.6	35	44.6	0.00000096	115
50	19.5	50	69.5	0.00000002	150
<b>НЧ-фильтр</b>			<b>80</b>	<b>0.0079</b>	<b>92</b>

Результаты сравнения показывают, что рассмотренное применение полиномиальной интерполяции оказывается эффективнее НЧ-фильтрации даже при экзотической степени 50. При одинаковом значении отношения сигнал/помеха в спектре НЧ-фильтру соответствует  $n=25$ , но полином обеспечивает в 526 раз меньшую среднюю погрешность. При этом одновременно трудоемкость вычислений снижается в 2,7 раза.

Представленные оценки трудоемкости полиномиальной аппроксимации завышены. При оптимизации численной реализации алгоритма для конкретного  $n$  ее можно будет существенно упростить.

Выделение расчета таблиц интерполяционных констант в автономную offline-процедуру позволило существенно уменьшить вычислительную сложность реализации online-процедуры.

Представленные в таблицах и графиках результаты моделирования могут быть использованы для сравнительных количественных оценок на этапе системного проектирования.

## Заключение

Представлен метод интерполяции, позволяющий использовать полиномы высоких степеней (до 50), и результаты его тестирования. Он предоставляет возможность получить высокую точность восстановления сигнала (до  $10^{-9}$ ), недоступную при традиционной интерполяции, использующей НЧ-фильтрацию. Одновременно предложена эффективная численная реализация, пригодная для применения в системах реального времени. Зависимость вычислительной сложности от степени полинома близка к линейной.

В рабочей полосе частот представленный полиномиальный интерполятор обладает практически идеальными характеристиками точности и линейности.

Результатом работы является также методика системного исследования интерполятора и результаты тестирования, представленные в таблицах и на графиках.

Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках прикладных научных исследований RFMEFI57914X0059, проект №. 14.579.21.0059.

## Литература

1. Г.В. Прокофьев, В.Г. Стахин, А.А. Обеднин. Современные отечественные специализированные микросхемы для датчиков положения. Известия ЮФУ. Технические науки №3, 2015. С. 200-211.
2. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков Численные методы. - 7-е изд. (эл.): Бином. Лаборатория знаний, 2012 — 635 с.
3. Интерполяция функций интерполяционными полиномами. // [Электронный ресурс]. URL: <http://matlab.exponenta.ru/spline/index.php>

### Ссылка на статью:

В.Ф.Жирков, Л.Т.Сушкова, А.И.Королев, К.Н.Большаков, А.А. Обеднин, Г.В.Прокофьев. Полиномиальная интерполяция в цифровой обработке сигналов при высоких требованиях к точности. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr17/5/text.pdf>