

DOI 10.30898/1684-1719.2020.4.11

УДК 621.391.1

## МЕТОД НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ПАРАМЕТРОВ СИГНАЛОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СРЕЗАЮЩИХ ФУНКЦИЙ И АЛГОРИТМОВ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Ю. Г. Булычев<sup>1</sup>, А. В. Елисеев<sup>2</sup>, А. В. Матершев<sup>3</sup>, И. С. Селезнев<sup>4</sup>

<sup>1</sup> АО Всероссийский научно-исследовательский институт «Градиент»,  
344000, Ростов-на-Дону, пр. Соколова, 96

<sup>2</sup> АО ТНИИС, 347900, Таганрог, ул. Седова, 3

<sup>3</sup> Войсковая часть 48514, 346400, Новочеркасск, ул. Атаманская, 36

<sup>4</sup> АО НКБ ВС, 347936, Таганрог, ул. 1-я линия, 144а

Статья поступила в редакцию 20 марта 2020 г., после доработки – 20 апреля 2020 г.

**Аннотация.** С использованием эволюционных уравнений, алгоритмов быстрого преобразования Фурье и срезающих функций развит метод дискретно-непрерывной непараметрической фильтрации параметров полезных сигналов, позволяющий получать практически реализуемые схемы оптимальных приемников для задач локации, навигации, связи и передачи информации в условиях неприменимости традиционного (параметрического) гауссовского приближения. Дан пример синтеза структурной схемы приемника сигналов с фазоразностной модуляцией.

**Ключевые слова:** марковский процесс, дискретно-непрерывный процесс, апостериорная плотность вероятности, эволюционное уравнение, однородная цепь Маркова, уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова, уравнение Стратоновича, фазоразностная модуляция, быстрое преобразование Фурье, срезающая функция.

**Abstract.** Method of useful signal parameter discrete-continuous non-parametric filtering, using evolutionary equations, fast-Fourier-transform algorithms and patch functions, is developed, allowing to get practically engineerable schemes of optimal receivers for location, navigation, communications and information transmission problems under the conditions of conventional (parameter) Gaussian approximation

invalidity. Example of block scheme synthesis of receiver for signal with phase-difference modulation is given.

**Key words:** Markov process, discrete-continuous process, posteriori probability density, evolutionary equation, Markov homogeneous chain, Fokker-Plank-Kolmogorov equation, Stratonovich equation, phase-difference modulation, fast Fourier transform, patch function.

## 1. Введение

Для решения задачи фильтрации непрерывных стохастических параметров полезных сигналов широко используются эволюционные уравнения (типа Фоккера-Планка-Колмогорова, Стратоновича и их различные модификации [1–3]), которые относятся к классу уравнений с частными производными параболического типа. Решая такое уравнение можно проследить эволюцию во времени соответствующей решающей функции (например, апостериорной плотности вероятности) и дать оптимальную оценку параметров сигнала на базе принятого критерия (например, по максимуму апостериорной плотности вероятности). Для случая, когда полезный сигнал зависит также от дискретного параметра в [4–7] получены точные уравнения фильтрации дискретно-непрерывных процессов, характерные для систем локации, навигации, связи и передачи цифровой информации (например, на основе сложных фазоманипулированных сигналов). При этом в алгоритме фильтрации учтена случайная задержка сигналов, влияющая на качество оценивания границ тактовых импульсов.

Однако, практическая реализация указанного оптимального алгоритма в реальном времени, связанного с получением устойчивого приближенного непараметрического решения соответствующего многомерного эволюционного уравнения для всего множества допустимости значений вектора фильтруемых параметров, представляет значительные трудности даже на базе современных ЭВМ. Это приводит к необходимости синтеза упрощенных алгоритмов фильтрации, обеспечивающих получения приближенных параметрических решений, зависящих от сравнительно небольшого числа параметров. К ним

можно отнести алгоритм фильтрации в гауссовском приближении, условия применимости которого существенно ограничены [1–3].

В настоящей работе рассматривается метод непараметрического представления решений эволюционных уравнений (например, для апостериорной плотности вероятности (АПВ)) применительно к задаче дискретно-непрерывной фильтрации смешанных стохастических процессов, снимающий указанные ограничения. Метод опирается на известные и хорошо апробированные алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) и математический аппарат срезающих функций. Для развития метода нами использованы результаты работ [8–12], в которых приводятся эффективные численно-аналитические алгоритмы построения устойчивых решений уравнений в частных производных параболического типа, в том числе и для исследования эволюции многомерной решающей функции (например, АПВ) в темпе поступления входного наблюдения, обеспечивающем режим реального времени. Очевидно, что это чрезвычайно актуально для многих существующих и перспективных информационно-измерительных систем гражданского и военного назначения.

С использованием развитого метода показан пример синтеза структурной схемы приемника сигналов с фазоразностной модуляцией.

## 2. Постановка задачи

Представим полезный сигнал в виде

$$S(t, \Theta, \Lambda) = G[t - \tau, \Theta(t - \tau), \beta(t - \tau)], \quad (1)$$

где  $\Lambda = [\lambda_i(t), i = \overline{1, m}]^T = [\tau(t), \beta_i(t), i = \overline{1, m-1}]^T$  – диффузионный марковский процесс,  $\tau = \tau(t)$  – компонента процесса  $\Lambda = \Lambda(t)$ , определяющая случайную задержку сигнала,  $\beta = [\beta_i(t), i = \overline{1, m}]^T$  – другие компоненты марковского процесса  $\Lambda$ , описывающие непрерывные случайные параметры сигнала (амплитуду, частоту, фазу и т. д.),  $\Theta = \Theta(t)$  – дискретный параметр, принимающий постоянное значение на длительности элементарного тактового

интервала  $T$ , границы которого  $t_k$  зависят от случайной задержки и определяются как  $t_r = rT + \tau(t_r)$ ,  $r \in \{0, 1, 2, \dots\}$ .

Примем, что значения дискретного параметра  $\Theta = \Theta(t)$  образуют простую однородную цепь Маркова на  $n$  состояний ( $n$  – число возможных значений  $\Theta$ ). При этом считаются заданными матрица  $\Pi = \{\pi_{ij}\}$  (где  $i, j = \overline{1, n}$ ) вероятностей перехода параметра  $\Theta$  из  $i$ -го состояния в  $j$ -е и вектор вероятностей начальных состояний  $P_0 = \{P_{0i}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Априорные сведения о процессе  $\Lambda = \Lambda(t)$  задаются эволюционным уравнением для априорной плотности вероятности:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, \Lambda) = L\{p(t, \Lambda), \mathbf{a}(t, \Lambda), \mathbf{b}(t, \Lambda)\}, \quad (2)$$

где  $L\{\cdot\}$  – оператор Фоккера-Планка-Колмогорова, содержащий операции нахождения первой и второй частных производных по всем компонентам вектора  $\Lambda$ ,  $\mathbf{a}(t, \Lambda) = [a_i(t, \Lambda), i = \overline{1, m}]^T$  – вектор коэффициентов сноса,  $\mathbf{b}(t, \Lambda) = [b_{il}(t, \Lambda), i, l = \overline{1, m}]$  – матрица коэффициентов диффузии.

Наблюдение представляет аддитивную смесь полезного сигнала и белого гауссовского шума

$$\Xi(t) = S(t, \Lambda, \Theta) + N(t), \quad (3)$$

где  $M[N(t)] = 0$ ,  $M[N(t)N(t + \tau)] = 2^{-1}N_0\delta(\tau)$ ,  $M[\cdot]$  – символ математического ожидания,  $\delta(\tau)$  – дельта-функция,  $N_0$  – спектральная плотность шума  $N(t)$ .

Вектор параметров  $[\Lambda^T, \Theta]^T$  при определенных условиях, которые не являются жесткими и практически всегда выполняются, образует многокомпонентный смешанный марковский процесс [7]. Задержка сигнала также рассматривается как некоторый диффузионный марковский процесс, например [5],

$$\frac{d}{dt} \tau = \Omega, \quad \frac{d}{dt} \Omega = -\alpha \Omega + N_\Omega(t), \quad (4)$$

где  $\alpha$  – заданный коэффициент сноса,  $N_{\Omega}(t)$  – формирующий шум:  
 $M[N_{\Omega}(t)] = 0$ ,  $M[N_{\Omega}(t)N_{\Omega}(t + \tau)] = 2^{-1}N_{\Omega 0}\delta(\tau)$ ,  $N_{\Omega 0}$  – односторонняя  
 спектральная плотность шума  $N_{\Omega}(t)$ .

Процесс  $\Omega = \Omega(t)$  определяется в зависимости от причин возникновения задержки, например, отношением случайной радиальной составляющей  $V_R = V_R(t)$  скорости цели  $V = V(t)$  к скорости распространения электромагнитных волн  $c$ , т.е.  $\Omega = c^{-1}V_R$ . Для принятой модели указанные выше условия эквивалентны неравенству  $\Omega < 1$ , вероятность выполнения которого близка к единице, если дисперсия  $\sigma_{\Omega}^2 \ll 1$  [5].

АПВ многокомпонентного смешанного марковского процесса допускает представление

$$W(t, \Theta, \Lambda) = W(t, \Lambda)P(t, \Theta / \Lambda),$$

где  $W(t, \Lambda)$  – АПВ вероятности непрерывных параметров  $\Lambda$ ;  $P(t, \Theta / \Lambda)$  – условная апостериорная вероятность дискретного параметра  $\Theta$ .

Здесь и далее наклонная черта (/) означает выполнение некоторого условия.

Для непрерывных параметров эволюция апостериорного распределения описывается уравнением [7]

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t, \Lambda) = L\{W(t, \Lambda), \mathbf{a}(t, \Lambda), \mathbf{b}(t, \Lambda)\} + [F(t, \Lambda) - F(t)]W(t, \Lambda), \quad (5)$$

где

$$F(t, \Lambda) = \sum_{i=1}^n F_i(t, \Lambda)P(t, \Theta = i / \Lambda),$$

$$F_i(t, \Lambda) = N_0^{-1} \left[ 2\Xi(t)S(t - rT - \tau, \Theta = i, \Lambda) - S^2(t - rT - \tau, \Theta = i, \Lambda) \right],$$

$$F(t) = \int F(t, \Lambda)W(t, \Lambda)d\Lambda.$$

В параграфах 7.8 и 7.9 из монографии [7] (см. стр. 355-362), а также статьи [5] даны детальные пояснения к выражению (5).

Решение уравнения (5) в непараметрическом виде на всем пространстве  $\mathbb{R}^m$  не представляется возможным, поэтому прибегают к различным усечениям,

позволяющим формировать приближенные решения на соответствующих компактных множествах. Далее будет предложен эффективный способ такого усечения, обеспечивающий выполнение требований по точности формируемых решений.

Полагаем заданным множество

$$\Psi = [-\Psi_1 + \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1 + \Psi_1] \times \dots \times [-\Psi_m + \bar{\lambda}_m, \bar{\lambda}_m + \Psi_m]$$

наиболее вероятных значений векторного процесса  $\Lambda(t)$ , где  $\bar{\lambda}_i = \bar{\lambda}_i(t)$  – математическое ожидание скалярного процесса  $\lambda_i(t)$ , а  $[-\Psi_i + \bar{\lambda}_i, \bar{\lambda}_i + \Psi_i]$  – диапазон его наиболее вероятных значений,  $\Psi_i > 0$ . Считается, что множество  $\Psi$  имеет такие размеры, когда для заданного  $\varepsilon > 0$ , не зависящего от конкретной реализации процесса  $\Lambda(t)$ , выполняется неравенство  $P[\Lambda(t) \notin \Psi] < \varepsilon$  для всех  $t$  из интервала наблюдения, где  $P[\cdot]$  – вероятность события, указанного в квадратных скобках.

Интегрирование уравнения (5) оказывается весьма сложным, вследствие чего на практике обычно ограничиваются гауссовским параметрическим подходом к решению задачи дискретно-непрерывной фильтрации, который справедлив при больших отношениях сигнал-шум. Рассмотрим другой подход, основанный на непараметрическом интегрировании уравнения (5) с использованием математического аппарата срезающих функций и алгоритма БПФ, позволяющий работать с апостериорными распределениями произвольного вида, т.е. не только с гауссовскими. При этом должны выполняться требования по точности формируемого приближенного решения и дискретно-непрерывной фильтрации в целом.

### 3. Решение задачи

Известно, что реализация операций дифференцирования, соответствующих оператору  $L\{\cdot\}$ , на базе алгоритма БПФ существенно зависит от уровня усечения и гладкости функции  $p(t, \Lambda)$  (соответственно и  $W(t, \Lambda)$ ) на границе множества  $\Psi$ . Для корректного выполнения данных операций воспользуемся

продолжением  $p(t, \Lambda)$  с множества  $\Psi$  на расширенное множество  $\Psi_\delta \supset \Psi$  с использованием математического аппарата срезывающих функций, где символ  $\delta$  является параметром расширения [12]. Данный аппарат позволяет сформировать вспомогательную функцию-регуляризатор  $\mu(\Lambda)$ , которая является нефинитной функцией, бесконечно дифференцируемой на всем пространстве  $\mathbb{R}^m$ . Кроме того, как  $\mu(\Lambda)$ , так и все её частные производные равны нулю при  $\Lambda \notin \Psi_\delta = [-\Psi_{1\delta} + \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_1 + \Psi_{1\delta}] \times \dots \times [-\Psi_{m\delta} + \bar{\lambda}_m, \bar{\lambda}_m + \Psi_{m\delta}]$ . На множестве  $\Psi$  функция  $\mu(\Lambda)$  тождественно равна единице, а на множестве  $\overline{\Psi_\delta \cap \Psi}$  (в которое входят все точки из  $\Psi_\delta \subset \mathbb{R}^m$ , которые не попали в  $\Psi \subset \mathbb{R}^m$ ) данная функция гладко убывает до нуля вместе со своими производными.

Используя функцию  $\mu(\Lambda)$ , преобразуем плотность  $p(t, \Lambda)$  к виду

$$p_\mu(t, \Lambda) = \mu(\Lambda)p(t, \Lambda), \quad \Lambda \in \Psi_\delta \supset \Psi.$$

Если воспользоваться [4] (см. параграф 3.7, стр. 37–39), то несложно показать, что функция  $p_\mu(t, \Lambda)$ , а так же ее частные производные, до второго порядка включительно, непрерывны на множестве  $\Psi_\delta$ , а на его границе равны нулю. Срезывающая функция  $\mu(\Lambda)$  может рассматриваться как некий регуляризатор и позволяет преобразовать плотность  $p(t, \Lambda)$  в функцию  $p_\mu(t, \Lambda)$ , которая повторяет  $p(t, \Lambda)$  на множестве  $\Psi$ , а вне множества  $\Psi_\delta$  срезает ее. На всем множестве  $\Psi_\delta$  функция  $p_\mu(t, \Lambda)$  является гладкой функцией, обнуляющейся вместе со своими производными на его границе.

Для получения решения уравнения (3) с заданной точностью в реальном времени по аналогии с [4] воспользуемся рекуррентным представлением данного уравнения в дискретной форме. Для этого перейдем от (3) к уравнению для ненормированной меры  $U(t, \Lambda)$ :

$$\frac{\partial U(t, \Lambda)}{\partial t} = L\{U(t, \Lambda), \mathbf{a}(t, \Lambda), \mathbf{b}(t, \Lambda)\} + F(t, \Lambda)U(t, \Lambda). \quad (6)$$

На основе известного метода Эйлера (для решения дифференциальных уравнений) и срезающих функций применительно к (6) составим рекуррентное соотношение [8]

$$U_{\mu}(t + \Delta t, \Lambda) = U_{\mu}(t, \Lambda) + \Delta t \left\{ L \left\{ U_{\mu}(t, \Lambda), \mathbf{a}(t, \Lambda), \mathbf{b}(t, \Lambda) \right\} + F(t, \Lambda) U_{\mu}(t, \Lambda) \right\}, \quad (7)$$

где  $U_{\mu}(t, \Lambda) = c(t)W_{\mu}(t, \Lambda)$ ,  $W_{\mu}(t, \Lambda) = \mu(\Lambda)W(t, \Lambda)$ ,

$$c(t) = \int_{\Psi} \dots \int U_{\mu}(t, \Lambda) \prod_{i=1}^m d\lambda_i. \quad \text{– коэффициент нормировки.}$$

Выполняя операции дифференцирования, соответствующие оператору  $L\{\cdot\}$ , с использованием прямого  $\Phi[\cdot]$  и обратного  $\Phi^{-1}[\cdot]$  преобразований Фурье и переходя от непрерывных преобразований к дискретным (путем применения теоремы отсчетов в области существования  $U_{\mu}(t, \Lambda)$  по каждому из параметров  $\lambda_i$ , получим

$$U_{\mu}(t + \Delta t, \mathbf{k}) = U_{\mu}(t, \mathbf{k}) - \Delta t \left\{ \Phi^{-1} \left\{ \sum_{i=1}^m \Phi \left[ a_i(t, \mathbf{k}) U_{\mu}(t, \mathbf{k}) \right] j n_i \Delta \mathcal{G}_i + \right. \right. \\ \left. \left. + 2^{-1} \sum_{i,l=1}^m \Phi \left[ b_{i,l}(t, \mathbf{k}) U_{\mu}(t, \mathbf{k}) \right] n_i \Delta \mathcal{G}_i n_l \Delta \mathcal{G}_l \right\} - F(t, \mathbf{k}) U_{\mu}(t, \mathbf{k}) \right\}, \quad (8)$$

где  $j = \sqrt{-1}$  – мнимая единица,  $\mathbf{k} = [k_i \Delta \lambda_i, i = \overline{1, m}]^T$ ,  $\mathbf{n} = [n_i \Delta \mathcal{G}_i, i = \overline{1, m}]^T$ ,  $\Delta \mathcal{G}_i = 2\pi(\Delta \lambda_i K_i)^{-1}$ ,  $k_i, n_i \in \overline{1, K}$ ,  $\Delta \lambda_i$  – шаг квантования по  $\lambda_i$ ,  $K_i$  – размерность сетки по параметру  $\lambda_i$ .

Применение в (8) тождественного преобразования (в виде прямого и обратного преобразований Фурье) продиктовано только необходимостью представления операций дифференцирования в операторе Фоккера-Планка-Колмогорова в алгебраической форме применительно к частотной области (для первой производной это аналогично умножению на множитель  $j n_i \Delta \mathcal{G}_i$ , а для второй – умножению на множитель  $j n_i \Delta \mathcal{G}_i j n_l \Delta \mathcal{G}_l = -n_i \Delta \mathcal{G}_i n_l \Delta \mathcal{G}_l$ ). Более подробно этот вопрос рассмотрен в [8–11].



В дальнейшем отсчеты  $U_\mu(t, \mathbf{k})$ , приходящиеся на множество  $\Psi$ , будем называть «естественными», а на разности множеств  $\Psi_\delta$  и  $\Psi$  – «искусственными». Следует помнить, что только при наличии «искусственных» отсчетов достигается регуляризирующий эффект от применения срезающей функции-регуляризатора  $\mu(\Lambda)$  (то есть, не накапливается большая ошибка при выполнении операций дифференцирования с помощью БПФ). Рекуррентный алгоритм (8) позволяет вычислить значения ненормированной меры в узлах пространственной сетки по непрерывному векторному параметру  $\Lambda$ . Переход от ненормированной меры к искомой АПВ производится по формуле

$$W_\mu(t, \mathbf{k}) = c^{-1}(t)U_\mu(t, \mathbf{k}), \quad (9)$$

где

$$c(t) = \int_{\Psi} \dots \int_{\Psi} \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \dots \sum_{k_m=0}^{K_m-1} U_\mu(t, \mathbf{k}) \prod_{i=1}^m \operatorname{sinc} \left[ \frac{\pi}{\Delta\lambda_i} (\lambda_i - k_i \Delta\lambda_i) \right] \prod_{i=1}^m d\lambda_i,$$

$$\operatorname{sinc}[x] = x^{-1} \sin x.$$

Если  $\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_2 = \dots = \Delta\lambda_m = \Delta\lambda$ , то

$$c(t) = (\Delta\lambda)^m \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \dots \sum_{k_m=0}^{K_m-1} U_\mu(t, \mathbf{k}).$$

Приближенная искомая АПВ для всех  $t$  восстанавливается в соответствии с теоремой отсчетов:

$$W_\mu(t, \Lambda) = \sum_{k_1=0}^{K_1-1} \dots \sum_{k_m=0}^{K_m-1} W_\mu(t, \mathbf{k}) \prod_{i=1}^m \operatorname{sinc} \left[ \frac{\pi}{\Delta\lambda} (\lambda_i - k_i \Delta\lambda) \right], \lambda \in \Psi. \quad (10)$$

Для выбора пространственной сетки и оценки возникающих погрешностей при практической реализации развиваемого метода можно воспользоваться результатами работ [7–9]. Реализация рекуррентного алгоритма (7)–(10) в реальном времени обеспечивается за счет применения эффективных алгоритмов БПФ для выполнения операций дискретного преобразования Фурье, допускающих высокую степень параллелизма вычислений.

Условная вероятность дискретного параметра [6]

$$P(t, \Theta = i / \Lambda) = \exp\left[\int_{rT+\tau}^t F_i(t, \Lambda)dt\right]p(t = rT + \tau + 0, \Theta = i / \Lambda) \times$$

$$\times \sum_{i=1}^n \exp\left[\int_{rT+\tau}^t F_i(t, \Lambda)dt\right]p(t = rT + \tau + 0, \Theta = i / \Lambda)$$
(11)

для точек  $t$ , лежащих внутри тактового интервала,

$$P(t + 0, \Theta = i / \Lambda) = \sum_{j=1}^n \pi_{ij} P(t - 0, \Theta = j / \Lambda)$$

для  $t = \tau + rT$ .

Оптимальный приемник должен принимать решение по максимуму смешанной АПВ, т. е.

$$\Theta_r^* = \arg \max_{\Theta} \left\{ \int W_{\mu} [rT + \tau, \Theta = i, \Lambda] d\Lambda \right\},$$
(12)

где  $\Theta_r^*$  – оптимальная оценка дискретного параметра.

При высокой точности фильтрации непрерывных параметров  $\Lambda$  и в наиболее распространенном на практике случае, когда значения  $\Theta_r^*$  независимы для разных  $r$  (т. е.  $P(t = rT + \tau^*, \Theta = i / \Lambda^*) = P_i$ ), справедлив упрощенный алгоритм оценки дискретного параметра [6]

$$\Theta_r^* = \arg \max_{\Theta} \left\{ \int_{rT+\tau^*}^{(r+1)T+\tau^*} F_i(t, \Lambda^*) dt + \ln P_i \right\}.$$
(13)

Зная  $\Theta_r^*$ , путем специальной перекодировки находятся информационные символы сообщения, заложенного в принимаемый сигнал.

#### 4. Пример синтеза оптимального приемника с двукратной фазоразностной модуляцией

Рассмотрим применение полученного алгоритма (7)–(13) для построения оптимальных приемников сигналов с двукратной фазоразностной модуляцией первого порядка (ФРМ-1). Пусть на  $k$ -м тактовом интервале передается один из четырех возможных сигналов (принимая  $m = 2$ ,  $\Lambda = [\lambda_1, \lambda_2]^T$ ,  $\lambda_1 = \Omega$ ,  $\lambda_2 = \tau$ ,  $n = 4$ )

$$S(t, \Theta, \Omega, \tau) = A \cos[\omega_0(1 + \Omega)(t - kT - \tau) + 2^{-1}\Theta\pi] =$$

$$= \begin{cases} A \cos[\omega_0(1 + \Omega)(t - rT - \tau)], & \Theta = 0; \\ -A \sin[\omega_0(1 + \Omega)(t - rT - \tau)], & \Theta = 1; \\ -A \cos[\omega_0(1 + \Omega)(t - rT - \tau)], & \Theta = 2; \\ A \sin[\omega_0(1 + \Omega)(t - rT - \tau)], & \Theta = 3; \end{cases} \quad (14)$$

где  $A, \omega_0$  – известные константы;  $\Theta$  – характеризуется равновероятными значениями с вероятностями перехода  $\pi_{ij} = 4^{-1}$ ,  $i, j = \overline{0,3}$ ,  $rT + \tau < t < (r+1)T + \tau$ .

Так как некогерентный демодулятор с ФРМ -1 не требует знания начальной фазы  $\varphi_0$  и инвариантен по отношению к флюктуациям фазы  $\varphi(t)$  с интервалом корреляции существенно меньшим длительности тактового интервала, то в выражении для полезного сигнала (14) с целью упрощения принято  $\varphi_0 = 0$ ,  $\varphi(t) = 0$ .

Для неэнергетических параметров [1,2]

$$F_i(t, \Omega, \tau) = 2AN_0^{-1}\Xi(t) \cos[\omega_0(1 + \Omega)(t - rT - \tau) + i2^{-1}\pi], \quad i = \overline{0,3}. \quad (15)$$

Подставляя (15) в выражение для  $F(t, \Lambda)$  из (5), с учетом независимости и равновероятности значений и переходов для дискретного параметра  $\Theta$ , получаем

$$F(t, \Omega, \tau) = \left\{ F_0(t, \Omega, \tau) \operatorname{sh} \left[ \int_{rT+\tau}^t F_0(t, \Omega, \tau) dt \right] - F_1(t, \Omega, \tau) \operatorname{sh} \left[ \int_{rT+\tau}^t F_1(t, \Omega, \tau) dt \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \operatorname{ch} \left[ \int_{rT+\tau}^t F_0(t, \Omega, \tau) dt \right] + \operatorname{ch} \left[ \int_{rT+\tau}^t F_1(t, \Omega, \tau) dt \right] \right\}^{-1}.$$

Раскроем оператор  $L\{\cdot\}$  в (6) с учетом (4)

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t, \Omega, \tau) = -\frac{\partial}{\partial \tau} [\Omega U(t, \Omega, \tau)] + \frac{\partial}{\partial \Omega} [\alpha \Omega U(t, \Omega, \tau)] +$$

$$+ 4^{-1} N_{\Omega 0} \frac{\partial^2}{\partial \Omega^2} U(t, \Omega, \tau) + F(t, \Omega, \tau) U(t, \Omega, \tau). \quad (16)$$

Рекуррентный алгоритм (8) применительно к (16) примет вид (полагая  $k_1 = k_\Omega, k_2 = k_\tau, n_1 = n_\Omega, n_2 = n_\tau$ )

$$U_{\Delta t} = U - \Delta t \{ \Phi^{-1} \{ j [ \Phi(\Omega U) n_\tau \Delta \vartheta_\tau - \Phi(\alpha \Omega U) n_\Omega \Delta \vartheta_\Omega ] \} + \Delta t \Phi^{-1} \{ 4^{-1} N_{\Omega 0} \Phi(U) (n_\Omega \Delta \vartheta_\Omega)^2 \} - \Delta t \Phi^{-1} \{ F(t, k_\Omega, k_\tau) U \} \}, \quad (17)$$

где  $U_{\Delta t} = U(t + \Delta t, k_\Omega, k_\tau), U = U(t, k_\Omega, k_\tau), k_\Omega = k_1 = \overline{0, K_1 - 1}, k_\tau = k_2 = \overline{0, K_2 - 1},$

$n_\Omega = n_1 = \overline{0, K_1 - 1}, n_\tau = n_2 = \overline{0, K_2 - 1},$

$$F(t, k_\Omega, k_\tau) = \left\{ F_0(t, k_\Omega, k_\tau) \operatorname{sh} \left[ \int_{rT+\tau}^t F_0(t, k_\Omega, k_\tau) dt \right] - F_1(t, \Omega, \tau) \operatorname{sh} \left[ \int_{rT+\tau}^t F_1(t, k_\Omega, k_\tau) dt \right] \right\} \times \\ \times \left\{ \operatorname{ch} \left[ \int_{rT+\tau}^t F_0(t, k_\Omega, k_\tau) dt \right] + \operatorname{ch} \left[ \int_{rT+\tau}^t F_1(t, k_\Omega, k_\tau) dt \right] \right\}^{-1}.$$

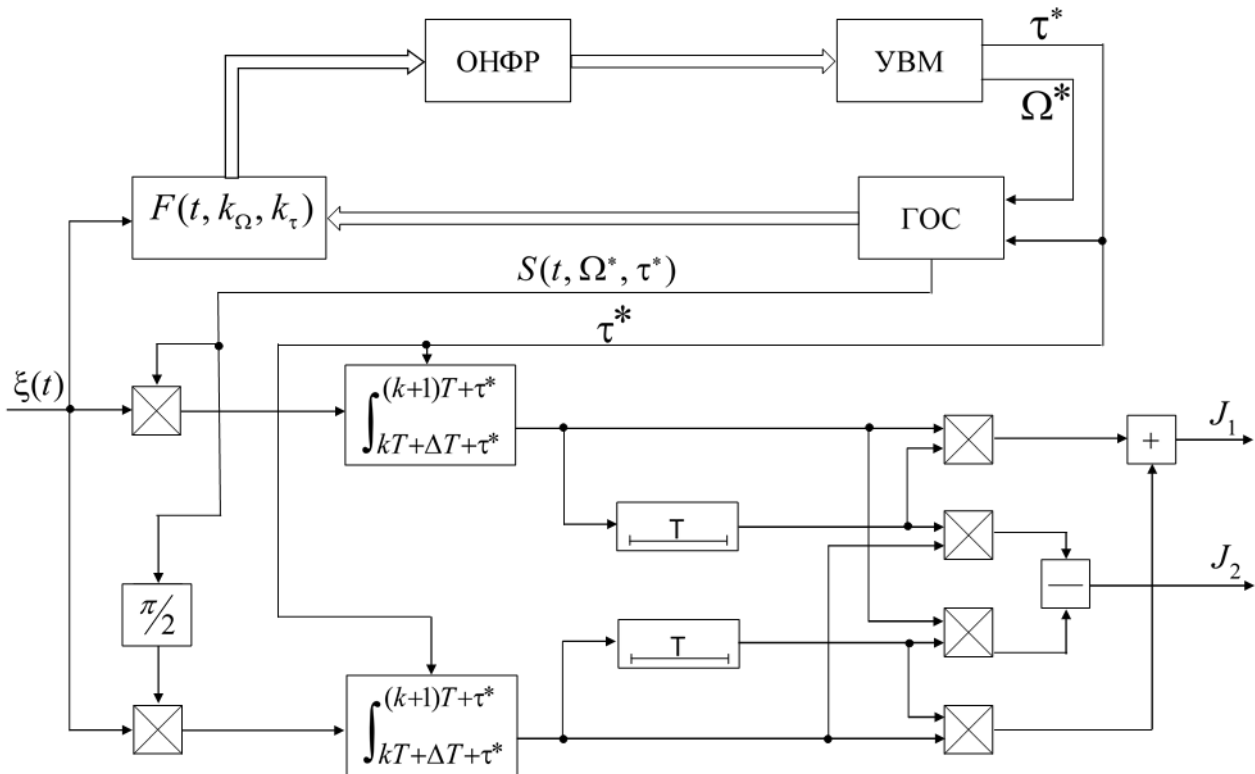


Рис. 1. Структурная схема оптимального приемника сигналов с двукратной ФРМ-1.

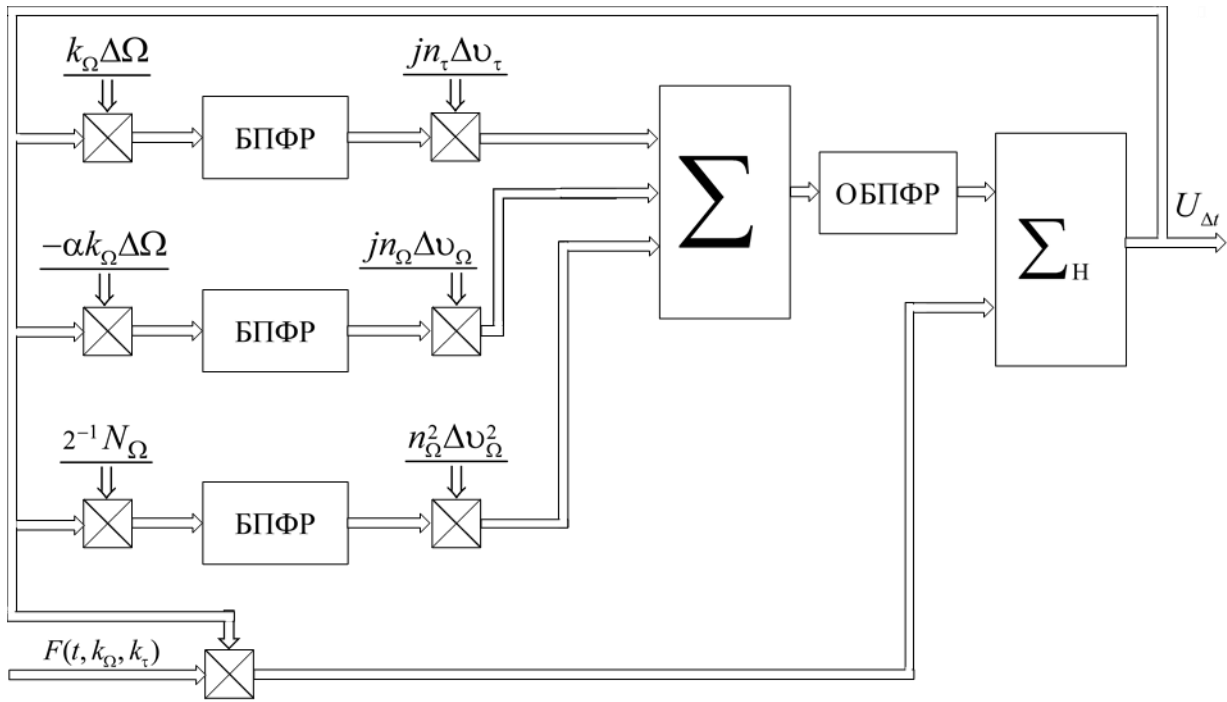


Рис. 2. Структурная схема оптимального нелинейного фильтра с регуляризацией.

Структурная схема оптимального приемника сигналов с двукратной ФРМ-1 представлена на рис. 1, где кроме традиционных приняты следующие обозначения: ОНФР – оптимальный нелинейный фильтр с регуляризацией, ГОС – генератор опорных сигналов, УВМ – устройство выделения максимума АПВ,  $F(t, k_{\Omega}, k_{\tau})$  – блок вычисления функции  $F(t, k_{\Omega}, k_{\tau})$ . Оценка дискретного параметра осуществляется в соответствии с (13) с учетом защитного интервала  $\Delta T$  и равновероятности значений дискретного параметра  $\Theta$ :

$$\Theta_k^* = \arg \max_{\Theta} \left\{ \int_{rT + \Delta T + \tau^*}^{(r+1)T + \tau^*} F_i(t, \Omega^*, \tau^*) dt \right\},$$

где  $\Omega^*$  и  $\tau^*$  – оценки, получаемые по методу максимума АПВ с учетом алгоритма (17).

Информационные символы  $J_1, J_2$  (рис. 1) выделяются путем специального перекодирования значений дискретного параметра  $\Theta$ .

На рис. 2 приведена структурная схема оптимального нелинейного фильтра с регуляризацией, реализующая рекуррентный алгоритм (17). На схеме приняты

обозначения: БПФР – процессор БПФ с регуляризацией; ОБПФР – процессор обратного быстрого преобразования Фурье с регуляризацией;  $\Sigma_n$  – сумматор-накопитель.

В качестве  $\mu(\Lambda)$  целесообразно использовать срезающую функцию, которая строится на основе ядра усреднения экспоненциального типа (см. [12], стр.37-38). Для сравнительной оценки разработанного рекуррентного алгоритма можно использовать известную методику [2], позволяющую учесть границы применимости гауссовского приближения, оценить качество формируемых оценок  $\Omega^*$  и  $\tau^*$ , а также определить вероятности ошибочного приема информационных символов  $J_1, J_2$ . Такая сравнительная оценка сопряжена со значительными вычислительными и другими затратами, поэтому данный вопрос авторы детально рассмотрят в следующей публикации с учетом множества различных факторов.

## 5. Заключение

Анализ показал, что практическая реализация алгоритмов БПФ с элементами регуляризации для решения задачи дискретно-непрерывной фильтрации в рамках развитого метода возможна на основе современной микропроцессорной техники и специализированных ЭВМ в реальном времени. Применение функции-регуляризатора в виде срезающей функции необходимо только в том случае, если это существенно влияет на устойчивость вычислительного процесса и позволяет воспользоваться экономными сетками аппроксимации для реализации процедур БПФ. Развитый параметрический метод следует применять в тех условиях, когда невозможно использовать наиболее простой в реализации параметрический метод гауссовской дискретно-непрерывной фильтрации (например, при малых отношениях сигнал/шум). Для придания универсальности целесообразно комплексировать оба метода, что может положительно отразиться на характеристиках применяемой информационно-измерительной системы.

## Литература

1. Тихонов В.И., Кульман Н.К. Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Сов. радио, 1975. 704 с.
2. Ярлыков М.С. Применение марковской теории нелинейной фильтрации в радиотехнике. – М.: Сов. радио, 1980. 360 с.
3. Булычев Ю.Г., Булычев В.Ю., Пархоменко Н.Г. О расширении границ применимости теории нелинейной фильтрации в задачах оценивания параметров движения целей // Вестник КГТУ им. А.Н. Туполева. – 2011. № 4. – С. 95–104.
4. Тихонов В.И., Харисов В.Н., Смирнов В.А. Оптимальная фильтрация дискретно-непрерывных процессов // Радиотехника и электроника. – 1978. – Т. 23. – №7. – С. 1441–1452.
5. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Оптимальный прием дискретных сигналов со случайной задержкой // Радиотехника и электроника. – 1980. Т. 25. – № 3. – С. 530–539.
6. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Оптимальный прием дискретных сигналов и тактовая синхронизация // Радиотехника и электроника. – 1980. – Т. 25. – № 3. – С. 540–551.
7. Тихонов В.И., Харисов В.Н. Статистический анализ и синтез радиотехнических устройств и систем. М.: Радио и связь, 1991. 607 с.
8. Булычев Ю.Г., Погоньшев С.А. Совместная фильтрация дискретно-непрерывных процессов в реальном масштабе времени // Изв. вузов. – 1990. – № 3. – С. 34–39.
9. Булычев Ю.Г., Погоньшев С.А. Методы цифрового моделирования стохастических эволюционных дифференциальных уравнений в дискретных базисах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1990. – Т. 29. – № 18. – С. 1170–1179.
10. Булычев Ю.Г., Погоньшев С.А. Моделирование эволюционных стохастических уравнений в дискретных базисах // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1991. – Т. 31. – № 3. – С. 381–387.

11. Булычев Ю.Г., Погоньшев С.А. Метод статистического синтеза и анализа систем совместного обнаружения и оценивания в дискретно-ортогональных базисах // Автоматика и телемеханика. – 1992. – № 5. – С. 52–63.
12. Треногин В.А. Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. 496 с.

**Для цитирования:**

Булычев Ю.Г., Елисеев А.В., Матершев А.В., Селезнев И.С. Метод непараметрической дискретно-непрерывной фильтрации параметров сигналов с использованием срезающих функций и алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Журнал радиоэлектроники. 2020. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr20/11/text.pdf>. DOI 10.30898/1684-1719.2020.4.11