

DOI 10.30898/1684-1719.2020.4.7

ПРИМЕНЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ ГАУССА-ЛЕЖАНДРА И ЭРМИТА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В МЕТОДЕ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

Е. И. Лаврецкий

АО НИИ Точных Приборов, 127490, Москва, ул. Декабристов, владение 51

Статья поступила в редакцию 31 марта 2020 г.

Аннотация. Разработан эффективный метод вычисления интегралов по телесному углу, возникающих при решении интегральных уравнений электрического поля с помощью метода мультипольных разложений. Предложено в подынтегральных функциях перейти от тригонометрических полиномов к алгебраическим полиномам, чтобы затем вычислить интегралы с помощью квадратурных формул Гаусса-Лежандра и Эрмита. Способ интегрирования обеспечивает высокую точность с наименьшим порядком квадратурных формул, что позволяет уменьшить размерность хранимых массивов и, в итоге, повысить быстродействие метода мультипольных разложений.

Ключевые слова: метод мультипольных разложений, интегралы по телесному углу, квадратурные формулы Гаусса-Лежандра и Эрмита.

Abstract: The effective method was developed for calculation of solid angle integrals arising in solving electric field integral equations with the help of fast multipole algorithm (FMA) or multi-level fast multipole algorithm (MLFMA). It has been suggested to replace variables in integrated functions to obtain algebraic polynomials from trigonometric polynomials and, thus, calculate the integrals with the help of Gauss-Legendre and Hermit quadrature formulas. The method permits exact calculations of mutual impedances with minimal quadratures and substantial reduction of required memory for saved arrays and the resulting improvement of performance in fast multipole algorithms.

Key words: FMA and MLFMA, solid angle integration, Gaussian and Hermit quadrature formulas.

1. Введение

Для увеличения скорости решения интегральных уравнений в задачах большой электрической размерности применяется метод мультипольных разложений (в англоязычной литературе приняты названия fast multipole algorithm (FMA) и multi-level fast multipole algorithm (MLFMA)). Метод мультипольных разложений позволил не только увеличить скорость решения СЛАУ, к которым сводятся интегральные уравнения, но и значительно уменьшить объем памяти для хранения данных при решении задач.

Решение больших СЛАУ выполняется в настоящее время итерационными методами, базовой операцией при этом является умножение матрицы на вектор-столбец, которое требует при обычном применении N^2 операций умножения, где N - число неизвестных. Увеличение скорости решения СЛАУ в методе мультипольных разложений обеспечивается меньшим числом операций при умножении матрицы на столбец [1]. Так, для одноуровневого алгоритма (FMA) требуется $O(N^3)$ операций для умножения матрицы на столбец, для многоуровневой версии алгоритма (MLFMA) выигрыш еще больше, количество операций умножения оценивают как $O(N \log_2 N)$. Объем оперативной памяти для хранения данных при решении задачи снижается пропорционально снижению числа операций умножения.

В литературе основы метода мультипольных разложений достаточно подробно изложены в [1-6]. Пионером метода является, по всей видимости, математик Владимир Владимирович Рохлин, который после переезда в США опубликовал единолично и с соавторами ряд статей [1]. Сначала метод был применен для решения уравнения Пуассона в статических задачах, затем был распространен для решения уравнения Гельмгольца для двумерных и трехмерных задач. Метод имеет аналогию с быстрым преобразованием Фурье [1], дающим известный выигрыш по сравнению с обычным преобразованием Фурье. В настоящее время метод MLFMA входит в состав ряда коммерческих программ электродинамического расчета (Ansoft HFSS, CST Microwave Studio и др.).

Основой метода мультипольных разложений является использование представления скалярной функции Грина в виде двумерного интеграла по телесному углу. Возникающие при решении интегрального уравнения матричные элементы СЛАУ также представляются в виде интегралов по телесному углу, рассчитываемых численно. Ряд исследователей в своих работах используют равномерную сетку точек интегрирования по обеим координатам [6], без использования квадратурных формул. В других работах [2-5] предложено использовать квадратурную формулу Гаусса-Лежандра порядка $L+1$ по координате θ и метод трапеций или метод Симпсона с $2L+1$ точками по координате φ .

В настоящей статье показано, что более высокая точность вычисления интегралов по телесному углу может быть достигнута при проведении замен переменных по обеим координатам для перехода в подынтегральных функциях от полиномов из тригонометрических функций к алгебраическим полиномам, что позволяет использовать квадратурные формулы Гаусса-Лежандра и Эрмита. При обеспечении высокой точности вычислений объем хранимых в памяти данных будет меньшим, чем в методе источников [2-6].

2. Вывод выражений для матричных взаимных импедансов

Запишем интегральное уравнение электрического поля относительно неизвестного электрического тока на поверхности идеально-проводящего тела (знак минус в левой части введен, чтобы действительные части собственных матричных импедансов были положительны)

$$-\vec{E}_\tau(\vec{J}^s)|_S = \vec{E}_\tau^{\text{пад}}|_S \quad (1)$$

Будем рассматривать случай свободного пространства, когда диэлектрическая и магнитная проницаемости равны проницаемостям вакуума.

Напряженность электрического поля, создаваемая поверхностным электрическим током \vec{J}^s , равна [7]

$$\vec{E}(\vec{J}^{\exists}) = \frac{1}{i\omega\epsilon_0} (\text{grad} \cdot \text{div} + k_0^2) \int_{S'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{J}^{\exists}(\vec{r}') dS' \quad , \quad (2)$$

где $G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}$ - скалярная функция Грина свободного пространства,

$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ – волновое число, зависимость от времени задаем в виде $e^{i\omega t}$.

Поверхностный электрический ток представим в виде разложения по базисным функциям \vec{f}_q с неизвестными коэффициентами I_q

$$\vec{J}^{\exists} = \sum_q I_q \vec{f}_q \quad (3)$$

Для перехода к СЛАУ разложение тока (3) подставим в интегральное уравнение (1), выполняем проецирование на базисные функции \vec{f}_p , в результате чего получаем следующие матричные импедансы:

$$\begin{aligned} Z_{pq} &= - \int_S \vec{f}_p \vec{E}(\vec{f}_q) dS = \\ &= \frac{-1}{i\omega\epsilon_0} \left(\int_S \vec{f}_p(\vec{r}) \cdot \nabla \nabla \int_{S'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{f}_q(\vec{r}') dS' dS + k_0^2 \int_S \vec{f}_p(\vec{r}) \cdot \int_{S'} G(\vec{r}, \vec{r}') \vec{f}_q(\vec{r}') dS' dS \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Выведем методически последовательно выражения для взаимных импедансов в мультипольном представлении. Для этого применим известную формулу для скалярной функции Грина в виде разложения в бесконечный ряд по полиномам Лежандра [7,8].

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= \\ &= \frac{-ik_0}{4\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) P_n(\cos\theta) \cdot \begin{cases} h_n^{(2)}(k_0|\vec{r}'|) j_n(k_0|\vec{r}|), & |\vec{r}| < |\vec{r}'| \\ j_n(k_0|\vec{r}'|) h_n^{(2)}(k_0|\vec{r}|), & |\vec{r}| > |\vec{r}'| \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

где $j_n(x)$ – сферическая функция Бесселя, $h_n^{(2)}(x)$ – сферическая функция Ханкеля 2-го рода, $P_n(x)$ – полином Лежандра, $\cos\theta = \frac{(\vec{r}, \vec{r}')}{|\vec{r}||\vec{r}'|}$.

Ряд (5) дает сумму полей, возбуждаемых разными мультиполями (классификация по форме ДН членов разложения: источник осесимметричного поля, диполь, квадруполь и т.д.), отсюда идет терминология «разложение на мультиполи» [8].

В добавление к точке источника \vec{r}' и точке наблюдения \vec{r} введем новые точки a и b для центров групп (кластеров), что иллюстрируется рис. 1. Вектор \vec{r}_{ab} направлен между центрами кластеров, \vec{r}_{ra} – вектор от центра кластера a до точки наблюдения, $\vec{r}_{r'b}$ – вектор от центра кластера b до точки источника. При этом разность радиус-векторов точки наблюдения и источника может быть представлена в виде

$$\vec{r} - \vec{r}' = \vec{r}_{ra} + \vec{r}_{ab} - \vec{r}_{r'b} = \vec{r}_{ab} + (\vec{r}_{ra} - \vec{r}_{r'b}) = \vec{r}_{ab} + \vec{d} \quad (6)$$

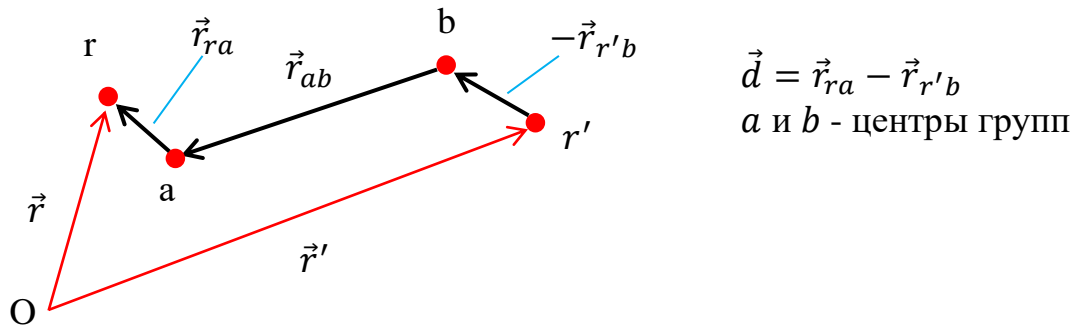


Рис. 1. Точки наблюдения и источника, центры кластеров.

Для случая $|\vec{d}| < |\vec{r}_{ab}|$ скалярную функцию Грина (5) можно записать в виде

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{-ik_0}{4\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n + 1) j_n(k_0 |\vec{d}|) h_n^{(2)}(k_0 |\vec{r}_{ab}|) P_n(\hat{d} \cdot \hat{r}_{ab}), \quad (7)$$

где единичные вектора равны $\hat{r}_{ab} = \frac{\vec{r}_{ab}}{|\vec{r}_{ab}|}$ и $\hat{d} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$.

Далее используем интегральное представление сферической гармоники [8]:

$$j_n(k_0|\vec{d}|)P_n(\vec{d} \cdot \vec{r}_{ab}) = \frac{i^n}{4\pi} \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} e^{-ik_0\vec{k}\vec{d}} \cdot P_n(\vec{k} \cdot \vec{r}_{ab}) \cdot \sin\alpha d\alpha d\beta, \quad (8)$$

где единичный радиальный вектор равен

$$\vec{k} = \vec{x}^0 \sin\alpha \cos\beta + \vec{y}^0 \sin\alpha \sin\beta + \vec{z}^0 \cos\alpha. \quad (9)$$

Скалярную функцию Грина (7) при выполнении условия $|\vec{r}_{ra} - \vec{r}_{r'b}| < |\vec{r}_{ab}|$ представим в виде, удобном для вычислений:

$$\begin{aligned} G(\vec{r}, \vec{r}') &= \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = \\ &= \frac{k_0}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^{n+1} (2n+1) h_n^{(2)}(k_0|\vec{r}_{ab}|) \iint_1 e^{-ik_0\vec{k}(\vec{r}_{ra}-\vec{r}_{r'b})} \cdot P_n(\vec{k} \cdot \vec{r}_{ab}) d\Omega, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\iint_1 \{...\} d\Omega = \int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} \{...\} \sin\alpha d\alpha d\beta$ - интеграл по телесному углу.

Достоинством представления (10) является то, что для фиксированных векторов \vec{r}_{ab} координатные зависимости представлены в виде экспоненциальных функций под знаком интеграла $\iint_1 \{...\} d\Omega$. Это позволяет применить оператор $grad \cdot div$ к подынтегральной экспоненте и получить достаточно простое выражение для напряженности электрического поля.

Прежде, чем записать выражение для электрического поля, выполним ряд действий с формулой (10) для скалярной функции Грина. Сначала ограничим число членов бесконечного ряда. Ограничение числа членов ряда означает, что мы обеспечиваем при данном выборе длины конечного ряда необходимую точность вычисления скалярной функции Грина.

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ik_0|\vec{r}-\vec{r}'|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \quad (11)$$

$$\approx \frac{k_0}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^L (-i)^{n+1} (2n+1) h_n^{(2)}(k_0 |\vec{r}_{ab}|) \iint_1 e^{-ik_0 \vec{k}(\vec{r}_{ra} - \vec{r}_{r'b}) \cdot \vec{k}} \cdot P_n(\vec{k} \cdot \vec{r}_{ab}) d\Omega.$$

Вопрос числа членов ряда для достижения заданной точности суммирования подробно исследован в монографии [3, р.88], где выведена формула:

$$L = k_0 d + 1,8 \left(\lg \frac{1}{\varepsilon} \right)^{2/3} \cdot (k_0 d)^{1/3}, \quad (12)$$

$d = |\vec{r}_{ra} - \vec{r}_{r'b}|$ - диаметр группы (кластера), ε - относительная погрешность суммирования ряда. Например, для $\varepsilon = 10^{-6}$ имеем коэффициент $1,8 \left(\lg \frac{1}{\varepsilon} \right)^{2/3} \approx 6$.

Далее перенесем конечный ряд под знак интеграла, что абсолютно законно с формальной математической точки зрения (не возникнет вопросов о законности замены порядка интегрирования и суммирования бесконечного ряда).

$$G(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{e^{-ik_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \iint_1 e^{-ik_0 \vec{k}(\vec{r}_{ra} - \vec{r}_{r'b}) \cdot \vec{k}} \cdot \frac{k_0}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^L (-i)^{n+1} (2n+1) h_n^{(2)}(k_0 |\vec{r}_{ab}|) P_n(\vec{k} \cdot \vec{r}_{ab}) d\Omega \quad (13)$$

Введем обозначение для передаточной функции (transfer function [3-6]):

$$T_L(k_0, \vec{k}, \vec{r}_{ab}) = \frac{k_0}{(4\pi)^2} \sum_{n=0}^L (-i)^{n+1} (2n+1) h_n^{(2)}(k_0 |\vec{r}_{ab}|) P_n(\vec{k} \cdot \vec{r}_{ab}). \quad (14)$$

Тогда скалярная функция Грина в итоге дается формулой:

$$G = \frac{e^{-ik_0 |\vec{r} - \vec{r}'|}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \iint_1 e^{-ik_0 \vec{k}(\vec{r}_{ra} - \vec{r}_{r'b}) \cdot \vec{k}} T_L(k_0, \vec{k}, \vec{r}_{ab}) d\Omega. \quad (15)$$

Подставляем выражение для скалярной функции Грина (15) в (2), получаем формулу напряженности электрического поля

$$\vec{E} = \frac{k_0^2}{i\omega\epsilon_0} \cdot \iint_1 \int_{V'} \left\{ \vec{j}^{\text{э}} - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{j}^{\text{э}}) \right\} \cdot e^{-ik_0\vec{k}(\vec{r}_{ra}-\vec{r}_{r'b})} \cdot T_L(k_0, \vec{k}, \vec{r}_{ab}) d\Omega dV' \quad (16)$$

При использовании формулы (16) взаимный импеданс между базисными функциями электрического тока записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} Z_{pq} &= \quad (17) \\ &= \frac{-k_0^2}{i\omega\epsilon_0} \cdot \iint_1 \int_S \int_{S'} \vec{f}_p \left\{ \vec{f}_q - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{f}_q) \right\} e^{-ik_0\vec{k}(\vec{r}_{ra}-\vec{r}_{r'b})} \cdot T_L(k_0, \vec{k}, \vec{r}_{ab}) dS' dS d\Omega . \end{aligned}$$

Поскольку в векторной функции $\left\{ \vec{f}_q - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{f}_q) \right\}$ ненулевыми на сфере являются только касательные компоненты, то для скалярного произведения справедливо равенство

$$\vec{f}_p \cdot \left\{ \vec{f}_q - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{f}_q) \right\} = \left\{ \vec{f}_p - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{f}_p) \right\} \cdot \left\{ \vec{f}_q - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{f}_q) \right\} \quad (18)$$

Тогда взаимные матричные импедансы (17) можем записать в удобной форме, симметричной с точки зрения проецирующей базисной функции и базисной функции источника:

$$\begin{aligned} Z_{pq} &= \frac{-k_0^2}{i\omega\epsilon_0} \cdot \iint_1 \int_S \left\{ \vec{f}_p - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{f}_p) \right\} e^{-ik_0\vec{k}\vec{r}_{ra}} dS \times \\ &\times \int_{S'} \left\{ \vec{f}_q - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{f}_q) \right\} e^{ik_0\vec{k}\vec{r}_{r'b}} dS' \cdot T_L(k_0, \vec{k}, \vec{r}_{ab}) d\Omega \quad (19) \end{aligned}$$

Введем обозначения для функций, стоящих под знаком интеграла, зависящих от базисных функций. Для проецирующей базисной функции введем так называемую приемную функцию (receive function [4])

$$\vec{R}_{ra}(\vec{k}, \vec{f}_p) = \int_S \left\{ \vec{f}_p - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{f}_p) \right\} e^{-ik_0 \vec{k} \vec{r}_{ra}} dS \quad . \quad (20)$$

Для базисной функции источника введем так называемую излучательную функцию (radiation function [4])

$$\vec{T}_{r'b}(\vec{k}, \vec{f}_q) = \int_{S'} \left\{ \vec{f}_q - \vec{k} \cdot (\vec{k}, \vec{f}_q) \right\} e^{ik_0 \vec{k} \vec{r}'_b} dS' \quad . \quad (21)$$

Заметим, что излучательная функция (21) представляет собой диаграмму направленности базисной функции источника, а приемная функция (20) представляет собой комплексно-сопряженную диаграмму направленности проецирующей базисной функции.

С учетом обозначений (20) и (21) взаимный матричный импеданс примет окончательный вид [4]

$$Z_{pq} = \frac{-k_0^2}{i\omega\epsilon_0} \cdot \iint_1 \vec{R}_{ra}(\vec{k}, \vec{f}_p) \cdot T_L(k_0, \vec{k}, \vec{r}_{ab}) \cdot \vec{T}_{r'b}(\vec{k}, \vec{f}_q) d\Omega \quad . \quad (22)$$

Таким образом, матричный импеданс (22) имеет форму интеграла по телесному углу; подынтегральная функция представлена в виде произведения трех функций: излучательной функции (21), передаточной функции (14) и приемной функции (20). Для интегрирования все три функции должны быть рассчитаны и сохранены в памяти на двумерной сетке значений телесного угла. Для фиксированного вектора \vec{r}_{ab} передаточная функция (14) не зависит от базисных функций, что используется в методах FMA и MLFMA для реализации «экономных» вычислений [3-6].

3. Вычисление интегралов по телесному углу

Для решения интегрального уравнения при использовании взаимных импедансов в форме (22) необходимо рассчитывать интегралы по телесному углу численно с высокой точностью. В статье [2] для интегрирования предложено использовать сетку точек Гаусса-Лежандра по координате θ и

равномерную сетку точек по координате φ . В монографии [3] предложено использовать квадратурную формулу Гаусса-Лежандра порядка $L+1$ по координате θ и метод трапеций с $2L+1$ точками по координате φ . В [4] рекомендовано использовать квадратурную формулу Гаусса-Лежандра порядка L по координате θ и метод Симпсона с $2L+1$ точками по координате φ . Исследователи Ergül и Gürel [6] в своих работах используют равномерную сетку точек интегрирования по обеим координатам, без использования квадратурных формул.

Как известно [9], квадратурная формула Гаусса-Лежандра порядка L дает точный результат интегрирования, если подынтегральная функция является алгебраическим полиномом степени не выше $2L-1$. Из текста источников [2-4] осталось неясным, осуществлялся ли переход к алгебраическим полиномам по координате θ , или квадратура Гаусса-Лежандра применялась лобовым способом по переменной θ (т.е. сетка точек квадратуры вводилась непосредственно для угла θ).

Для определения порядка квадратурной формулы необходимо установить, каковы подынтегральные функции с точки зрения скорости их изменения на области определения. Данный вопрос достаточно подробно исследован в [2-4], где показано, что передаточная функция (14), является функцией ограниченного спектра, имеющей разложение по тригонометрическим полиномам с максимальным порядком L . Приемная и излучательная функции (20), (21) также являются функциями ограниченного спектра с максимальным порядком тригонометрических полиномов $\frac{L}{2}$ [2-4]. При умножении функций происходит образование комбинационных гармоник спектра, поэтому максимальный номер комбинационной гармоники будет суммой номеров гармоник сомножителей. Получаем максимальный порядок пространственной гармоники в подынтегральной функции, равный $\frac{L}{2} + \frac{L}{2} + L = 2L$.

Целесообразно выполнять точное интегрирование при вычислении

взаимных импедансов (22). Очевидно, что это могло бы быть выполнено, если бы подынтегральная функция представляла бы собой алгебраический полином, для интегрирования которого могла бы быть применена соответствующая квадратурная формула. Идея настоящей статьи состоит в том, что необходимо довести метод интегрирования до совершенства. Для этого нужно выполнить в подынтегральной функции подходящие замены переменных, чтобы перейти от полиномов тригонометрических функций к чисто алгебраическим полиномам, причем по обеим координатам интегрирования. При этом можно будет применить квадратурную формулу минимального требуемого порядка.

Рассчитываемая функция (взаимный импеданс) в общем виде есть двойной интеграл по телесному углу:

$$\int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} F(\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta) \cdot \sin\alpha d\alpha d\beta \quad (23)$$

Рассмотрим сначала интеграл по углу α , как более простой, в котором переход к алгебраическому полиному осуществляется элементарным образом. Функция $\cos\alpha$ однозначна на отрезке интегрирования $\alpha \in [0, \pi]$, функция $\sin\alpha$ определяется однозначно на данном отрезке как $\sin\alpha = \sqrt{1 - x^2}$. Вводим замену переменных $x = \cos\alpha$.

$$\begin{aligned} \int_{\alpha=0}^{\pi} F(\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta) \cdot \sin\alpha d\alpha &= \\ &= - \int_{\alpha=0}^{\pi} F(\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta) \cdot d(\cos\alpha) = \int_{x=-1}^1 F(\sqrt{1 - x^2}, x) \cdot dx \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, привели первый интеграл к форме без тригонометрических функций, пригодной для непосредственного применения квадратурной формулы Гаусса-Лежандра с введением сетки по координате x (даже область интегрирования автоматически есть отрезок $[-1, 1]$). Возможно, что таким образом действовали исследователи в [2-4].

Рассмотрим теперь интеграл по углу β , разобьем его на сумму двух интегралов.

$$\begin{aligned} \int_{\beta=0}^{2\pi} F(\sin\beta, \cos\beta) \cdot d\beta &= \\ &= \int_{\beta=0}^{\pi} F(\sin\beta, \cos\beta) \cdot d\beta + \int_{\beta=\pi}^{2\pi} F(\sin\beta, \cos\beta) \cdot d\beta \end{aligned} \quad (25)$$

Во втором интеграле сделаем замену переменных для перехода к отрезку интегрирования $[0, \pi]$.

$$\begin{aligned} \int_{\beta=0}^{2\pi} F(\sin\beta, \cos\beta) \cdot d\beta &= \\ &= \int_{\beta=0}^{\pi} F(\sin\beta, \cos\beta) \cdot d\beta + \int_{\beta=0}^{\pi} F(-\sin\beta, -\cos\beta) \cdot d\beta \end{aligned} \quad (26)$$

Далее нужно выполнить замену переменных, чтобы избавиться от тригонометрических функций и перейти к алгебраическим полиномам. На отрезке $\beta \in [0, \pi]$ обе функции $\sin\beta$ и $\cos\beta$ являются однозначными, поэтому можно ввести для них замену переменных. Введем замену переменных:

$$\cos\beta = y, \text{ тогда } \beta = \arccos(y), \sin\beta = \sqrt{1-y^2}, d\beta = \frac{-1}{\sqrt{1-y^2}} dy. \quad (27)$$

Для всего интеграла по углу β получаем:

$$\int_{\beta=0}^{2\pi} F(\sin\beta, \cos\beta) \cdot d\beta = \int_{y=-1}^1 \frac{F(\sqrt{1-y^2}, y) + F(-\sqrt{1-y^2}, -y)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot dy. \quad (28)$$

В интеграле (28) при проведении замены переменных возникла весовая функция в знаменателе в виде радикала, являющаяся весовой функцией для полиномов Чебышева 1-го рода. Для вычисления таких интегралов может использоваться квадратурная формула Эрмита [9], являющаяся квадратурной формулой наивысшей алгебраической степени точности. Квадратурная

формула Эрмита вводится для нормированного отрезка $[-1,1]$. Достоинством квадратурной формулы Эрмита является то, что веса и абсциссы вычисляются элементарным образом [9], в отличие от формулы Гаусса-Лежандра.

Заметим, что интеграл по углу β свелся к сумме двух интегралов. Для каждого слагаемого в подынтегральной функции возник свой алгебраический полином (из-за знаков при заменах переменных), соответствующий своему угловому полупространству.

После замен переменных двойной интеграл по телесному углу (23) можно записать в виде:

$$\int_{\alpha=0}^{\pi} \int_{\beta=0}^{2\pi} F(\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta) \cdot \sin\alpha d\alpha d\beta = \quad (29)$$

$$= \int_{x=-1}^1 \int_{y=-1}^1 \frac{F(\sqrt{1-x^2}, x, \sqrt{1-y^2}, y) + F(\sqrt{1-x^2}, x, -\sqrt{1-y^2}, -y)}{\sqrt{1-y^2}} \cdot dx dy$$

При расчетах подынтегральных функций единичный радиальный вектор (9) будем вычислять следующим образом (тригонометрические функции $\sin\alpha, \cos\alpha, \sin\beta, \cos\beta$ входят только в него):

$$\vec{k} = \begin{cases} \vec{x}^0 \sqrt{1-x^2} \cdot y + \vec{y}^0 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} + \vec{z}^0 x & , \text{ при } \beta \in [0, \pi] \\ -\vec{x}^0 \sqrt{1-x^2} \cdot y - \vec{y}^0 \sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-y^2} + \vec{z}^0 x & , \text{ при } \beta \in [\pi, 2\pi] \end{cases} \quad (30)$$

Формальная запись квадратурной формулы для взаимных импедансов (22) в виде двумерного ряда (пусть индекс n введен для сферического угла α) имеет вид:

$$Z_{pq} \approx ik_0 W_0 \sum_n \sum_m w_n \hat{w}_m \cdot \vec{R}_{ra}(\vec{k}_{nm}, \vec{f}_p) \cdot T_L(k_0, \vec{k}_{nm}, \vec{r}_{ab}) \cdot \vec{T}_{r'b}(\vec{k}_{nm}, \vec{f}_q), \quad (31)$$

где w_n - веса квадратурной формулы Гаусса-Лежандра, \hat{w}_m – веса квадратурной формулы Эрмита, $W_0 = 120\pi$ Ом. Ряд $\sum_n \{ \dots \}$ введен по узлам x_n квадратурной формулы Гаусса-Лежандра; ряд $\sum_m \{ \dots \}$ введен по узлам y_m квадратурной формулы Эрмита (с учетом двух полупространств).

4. Результаты расчетов взаимных импедансов

Применим в качестве базисных функций так называемые RWG- базисные функции, названные по фамилиям авторов пионерской статьи Rao, Wilton, Glisson [10]. Базисная функция задается на двух треугольниках, имеющих общую сторону.

Проведем расчеты взаимных импедансов между базисными функциями поверхностного электрического тока при разных способах их вычисления. Вычисления импедансов обычным способом (без применения мультипольного разложения) были выполнены по методике [11].

На рис. 2 показано расположение базисных функций и обозначения размеров (рассмотрены случаи связи в Н-плоскости и в Е-плоскости), D - расстояние между центрами базисных функций. Для расчета выбран вариант расположения базисных функций в плоскости xOy , так как он соответствует худшему случаю, когда в передаточной функции (14) имеется максимальный порядок L для тригонометрических полиномов по обоим углам α и β . Заметим, что существует более благоприятный случай для интегрирования, когда вектор \vec{r}_{ab} направлен вдоль оси z (базисные функции расположены на оси z), при этом аргумент полинома Лежандра равен $\vec{k} \cdot \vec{r}_{ab} = \cos\alpha$, поэтому передаточная функция (14) имеет максимальный порядок L только для тригонометрических полиномов по углу α .

При выполнении расчетов базисные функции были расположены в центрах соответствующих кластеров, диаметры кластеров были равны размерам базисных функций. Заметим, что мультипольное представление взаимных импедансов (22) справедливо при $D > d$, поэтому при сравнении результатов расчета следует рассматривать только указанную область по оси абсцисс на графиках. При реализации методов FMA и MLFMA расчет взаимных импедансов с помощью мультипольных разложений выполняется только между базисными функциями в несоседних кластерах, которые не касаются друг друга (между кластерами всегда расположен еще один кластер).

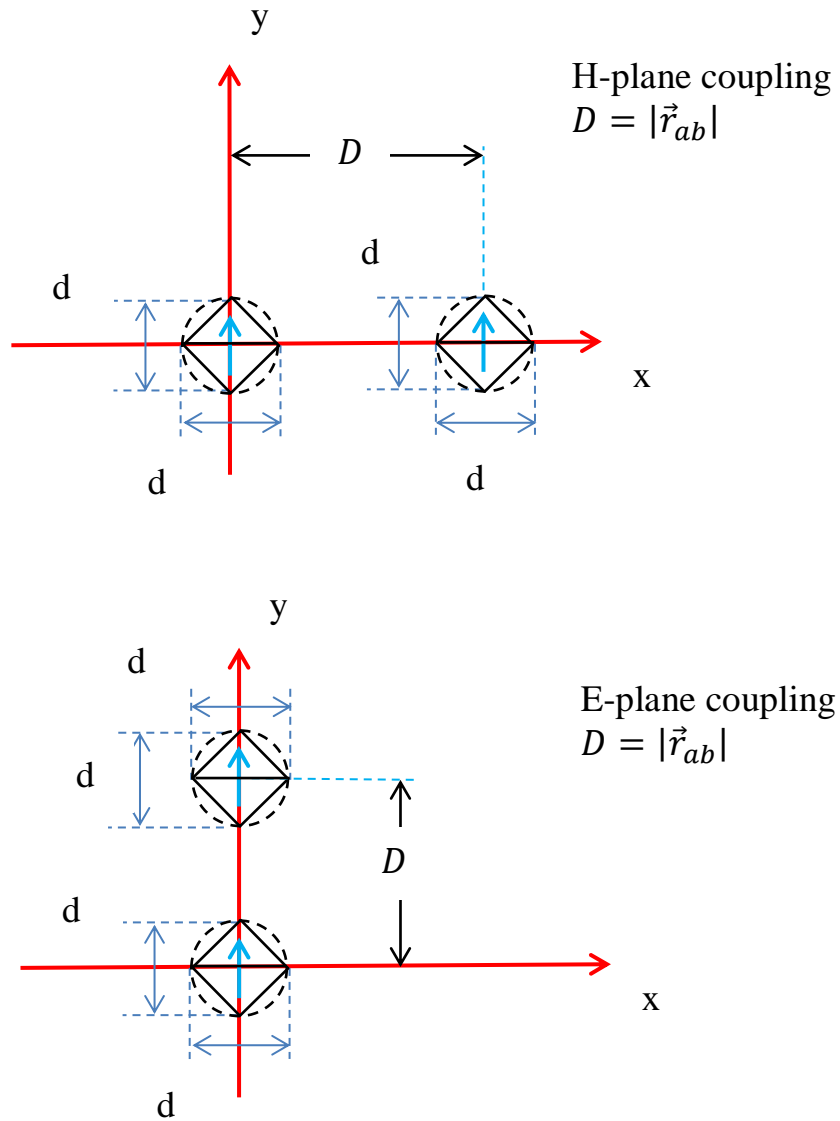


Рис. 2. Расположение базисных функций на плоскости xOy.

Сначала была проведена серия расчетов при лобовом применении квадратурной формулы Гаусса-Лежандра порядка $L+1$ по сферическому углу α и формулы Симпсона порядка $2L+1$ для интегрирования по углу β . На рис. 3 и 4 показаны рассчитанные действительные и мнимые части взаимного импеданса в H-плоскости и E-плоскости соответственно, для размера базисных функций $d=0,05\lambda$.

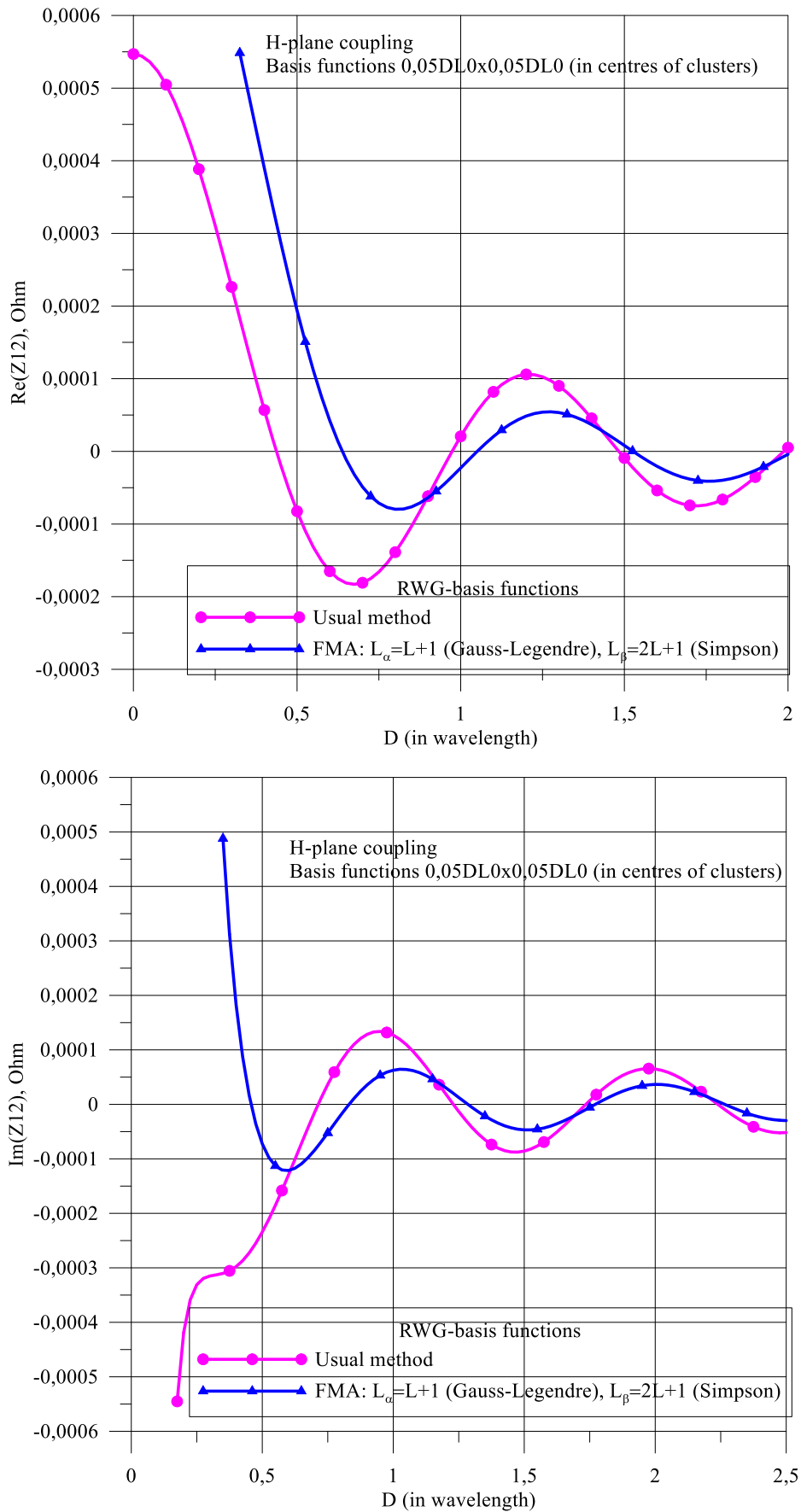


Рис. 3. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в Н-плоскости, базисные функции $d=0,05\lambda$ (лобовое применение квадратурной формулы Гаусса-Лежандра по углу α)

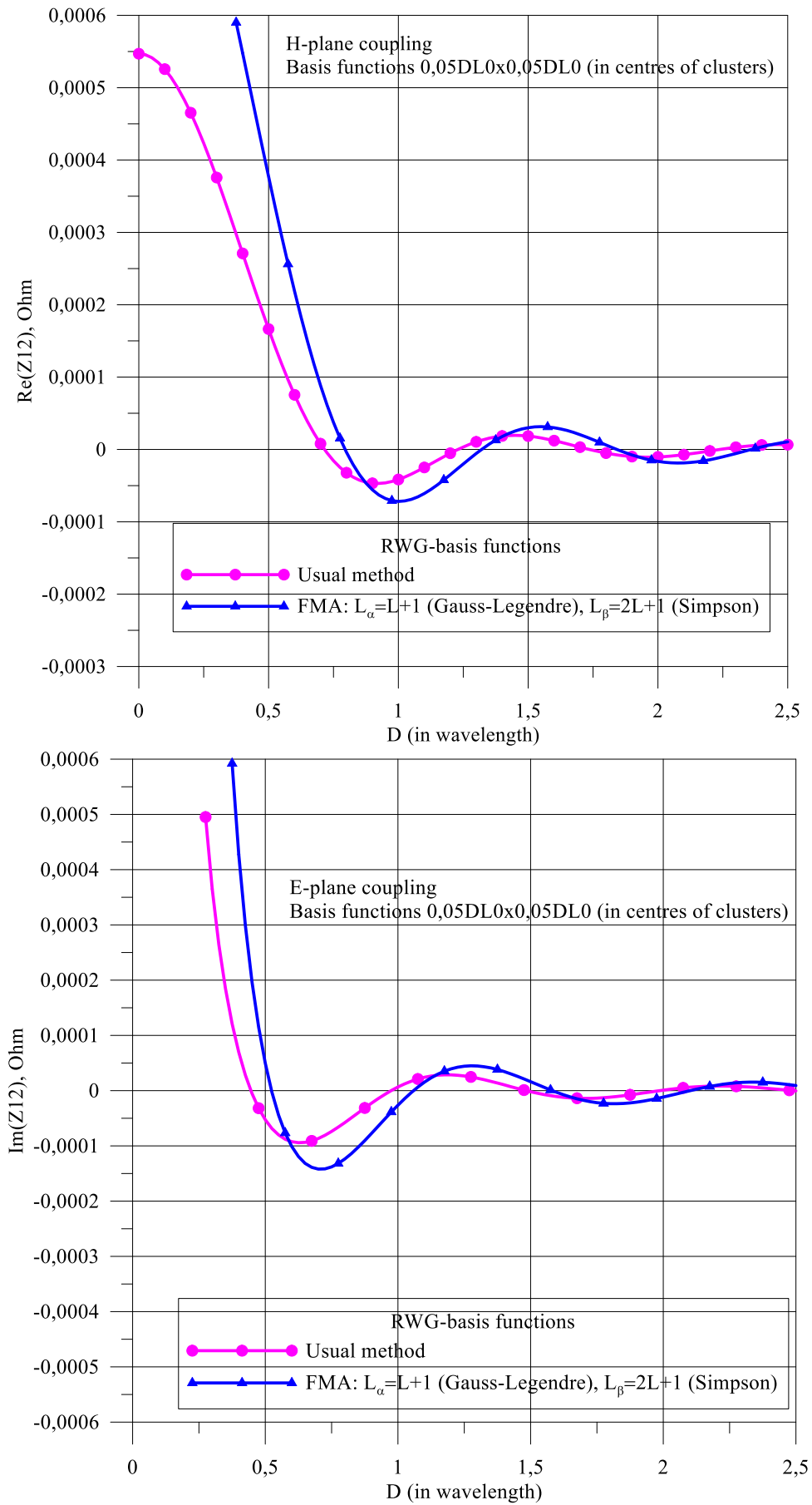


Рис. 4. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в E-плоскости, базисные функции $d=0,05\lambda$ (лобовое применение квадратурной формулы Гаусса-Лежандра по углу α)

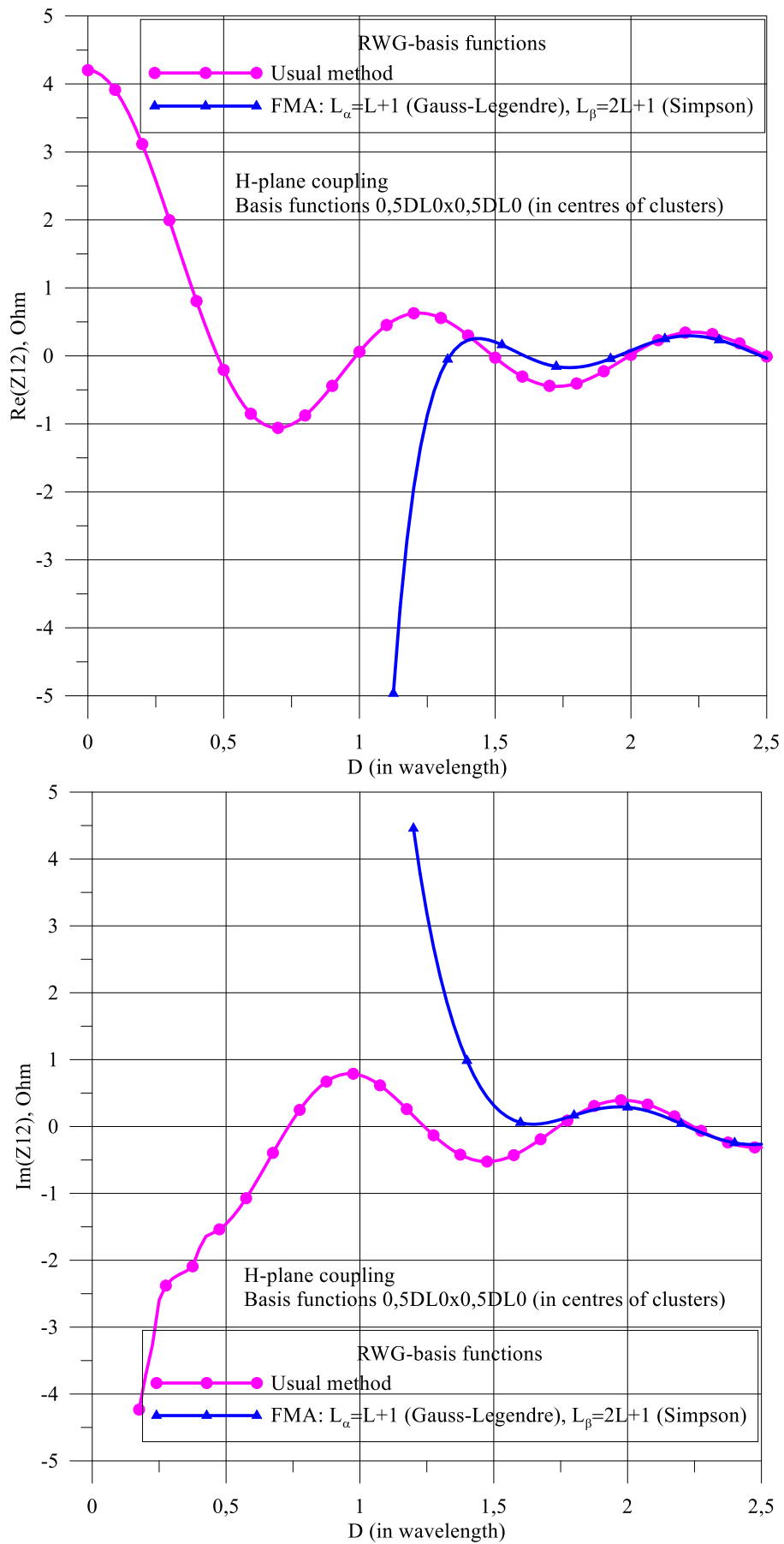


Рис. 5. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в H-плоскости, базисные функции $d=0,5\lambda$ (лобовое применение квадратурной формулы Гаусса-Лежандра по углу α)

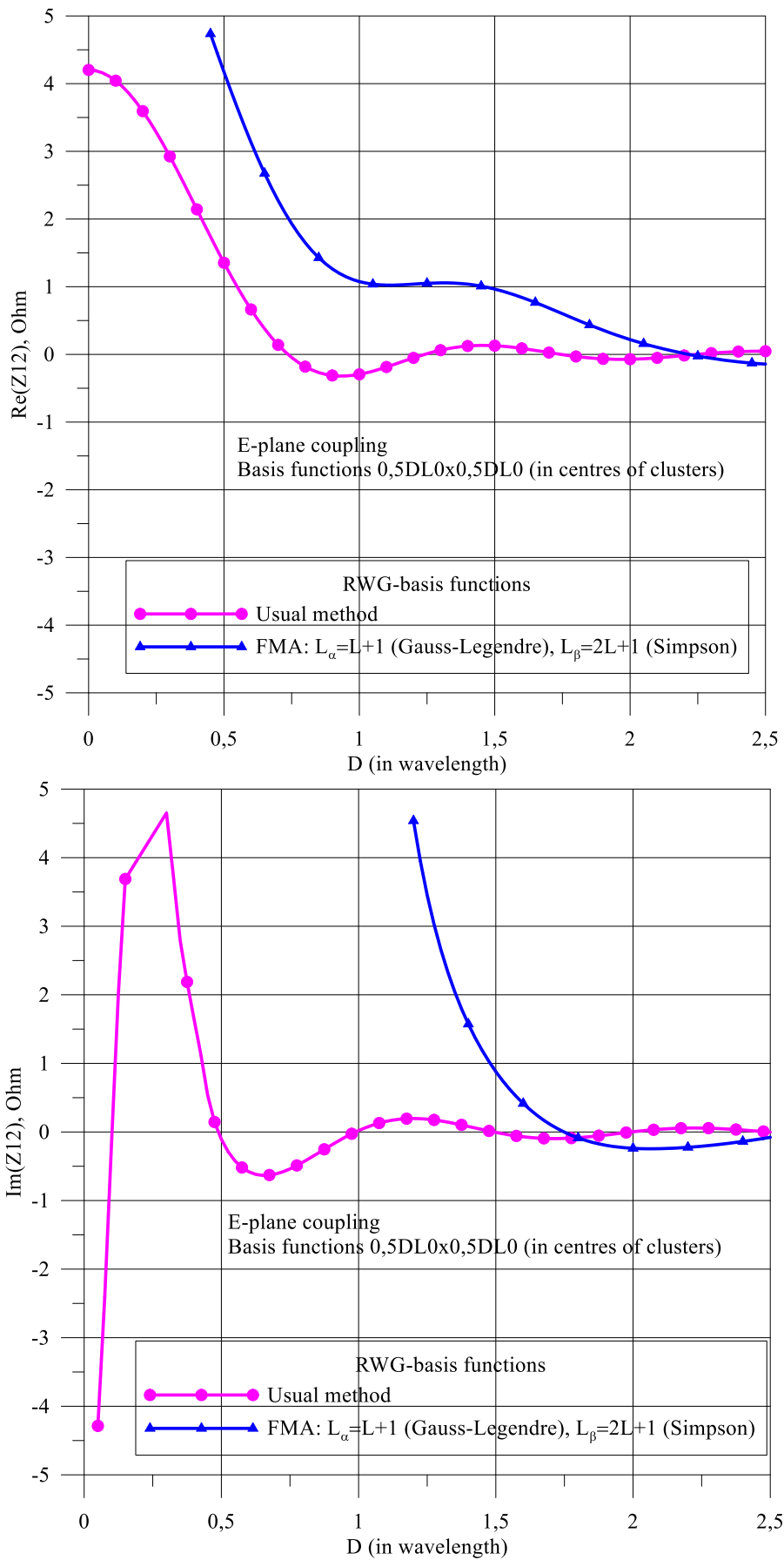


Рис. 6. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в E-плоскости, базисные функции $d=0,5\lambda$ (лобовое применение квадратурной формулы Гаусса-Лежандра по углу α)

На рис. 5 и 6 показаны аналогичные графики для размера базисных функций $d=0,5\lambda$. В соответствии с формулой (12) для базисных функций с размером $d=0,05\lambda$ использовалось разложение (11) с $L=4$, для базисных функций с $d=0,5\lambda$ использовалось $L=11$. Как и следовало ожидать, при таком грубом угловом интегрировании наблюдается разница в значениях, рассчитанных обычным методом и мультипольным методом. Ошибка интегрирования при использовании мультипольного метода уменьшается при увеличении расстояния между базисными функциями. Дополнительные расчеты показали, что ошибка интегрирования становится достаточно малой при числе узлов интегрирования $L+5$ по углу α и числе узлов $2L+5$ по углу β .

Вторая серия расчетов была проведена для случая применения квадратурной формулы Гаусса-Лежандра порядка $L+1$ при переходе к алгебраическим полиномам по сферическому углу α , в то время по углу β применялся все тот же метод Симпсона. На рис. 7 и 8 показаны рассчитанные действительные и мнимые части взаимного импеданса в H-плоскости и E-плоскости соответственно, для размера базисных функций $d=0,05\lambda$. На рис. 9 и 10 показаны аналогичные графики для размера базисных функций $d=0,5\lambda$. Легко видеть, что при реализации интегрирования по углу α с алгебраическими полиномами точность вычисления взаимных импедансов выше, чем при лобовом применении квадратурной формулы. Разница в значениях, рассчитанных обычным методом и мультипольным методом, свидетельствует, что для интегрирования по углу β должна быть применена формула Симпсона более высокого порядка, чем $2L+1$ (дополнительные расчеты показали, что ошибка снижается при постепенном увеличении числа узлов формулы Симпсона).

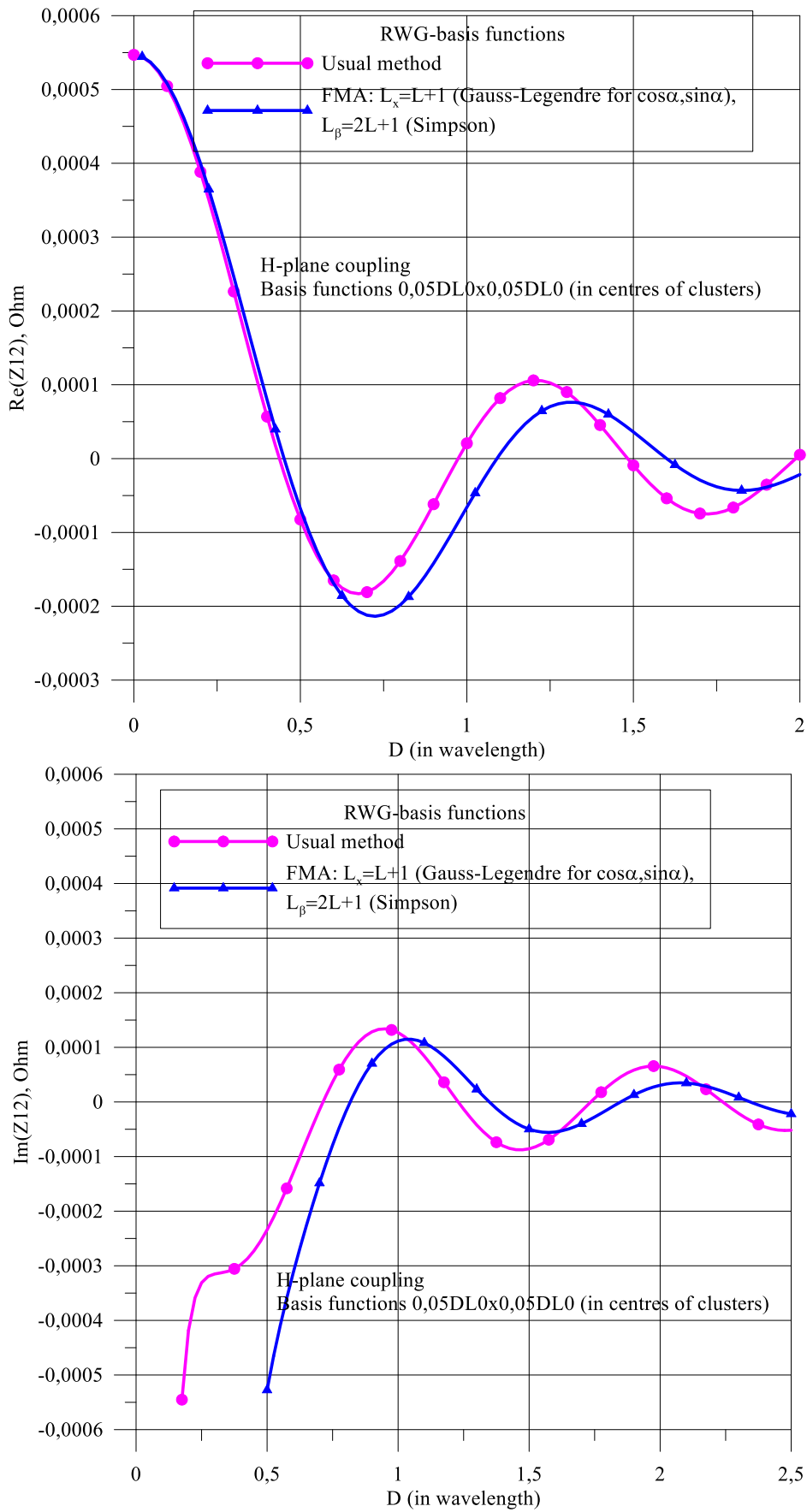


Рис. 7. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в H-плоскости, базисные функции $d=0,05\lambda$ (применение квадратурной формулы Гаусса-Лежандра для алгебраических полиномов по углу α)

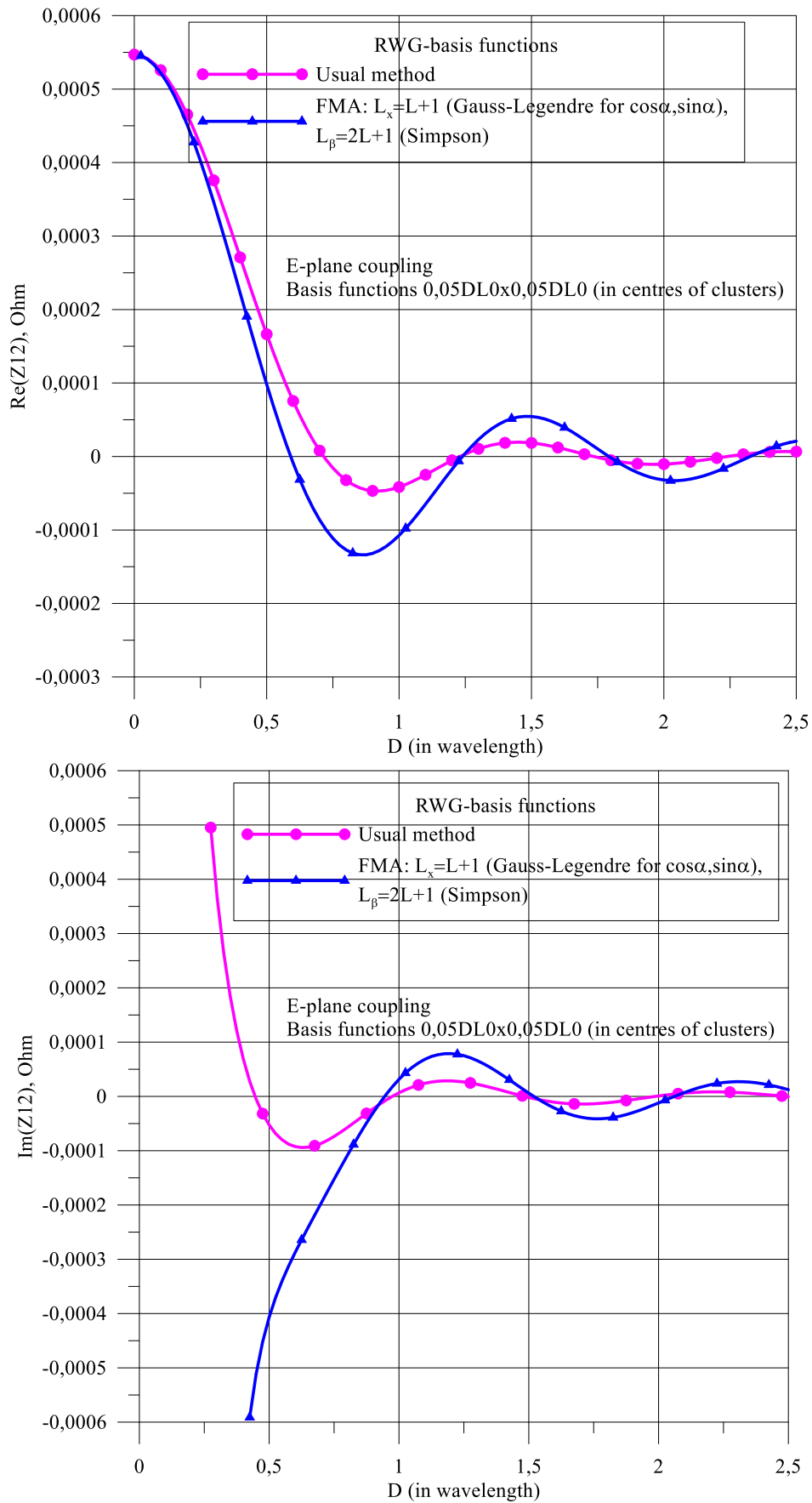


Рис. 8. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в Е-плоскости, базисные функции $d=0,05\lambda$ (применение квадратурной формулы Гаусса-Лежандра для алгебраических полиномов по углу α)

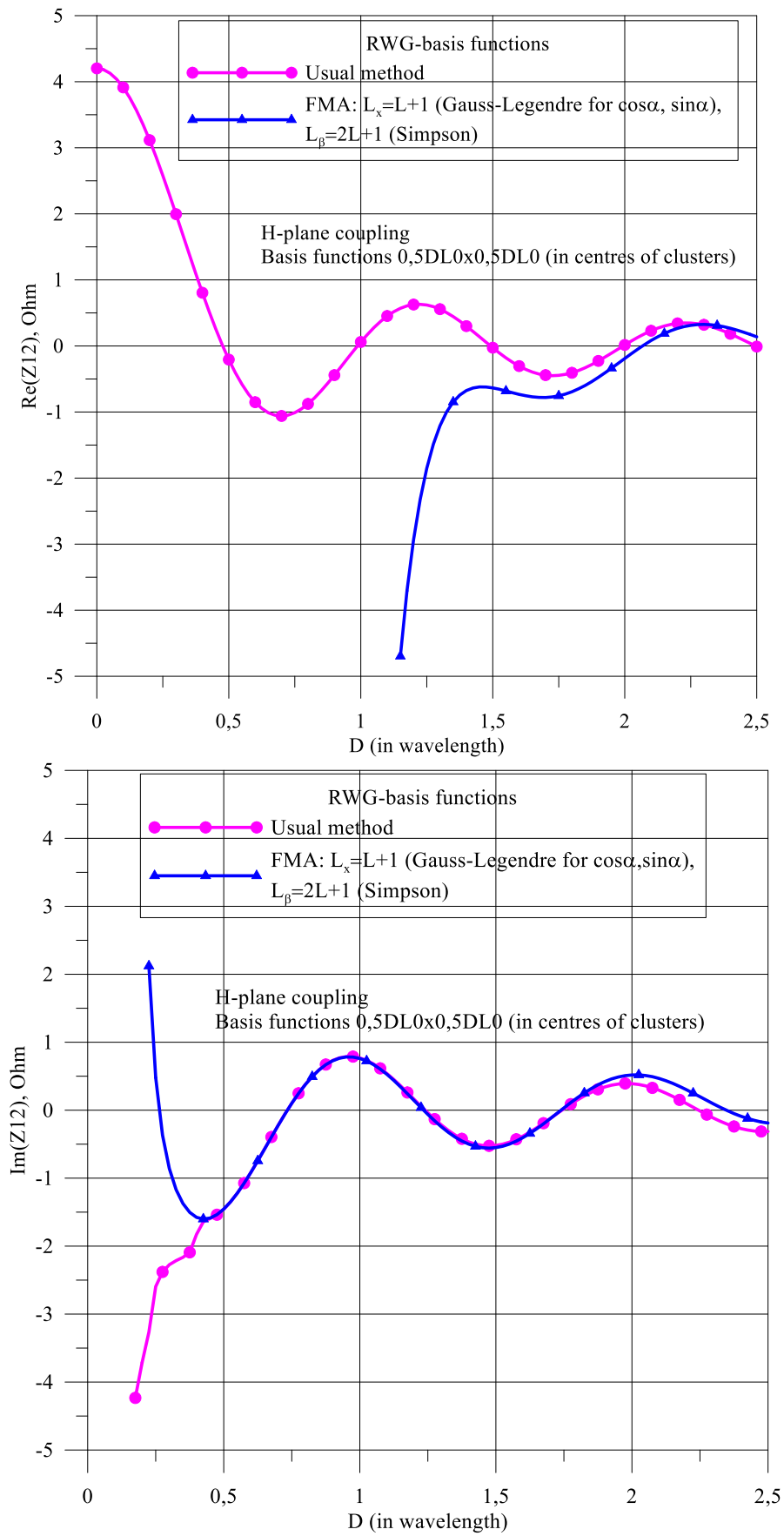


Рис. 9. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в H-плоскости, базисные функции $d=0,5\lambda$ (применение квадратурной формулы Гаусса-Лежандра для алгебраических полиномов по углу α)

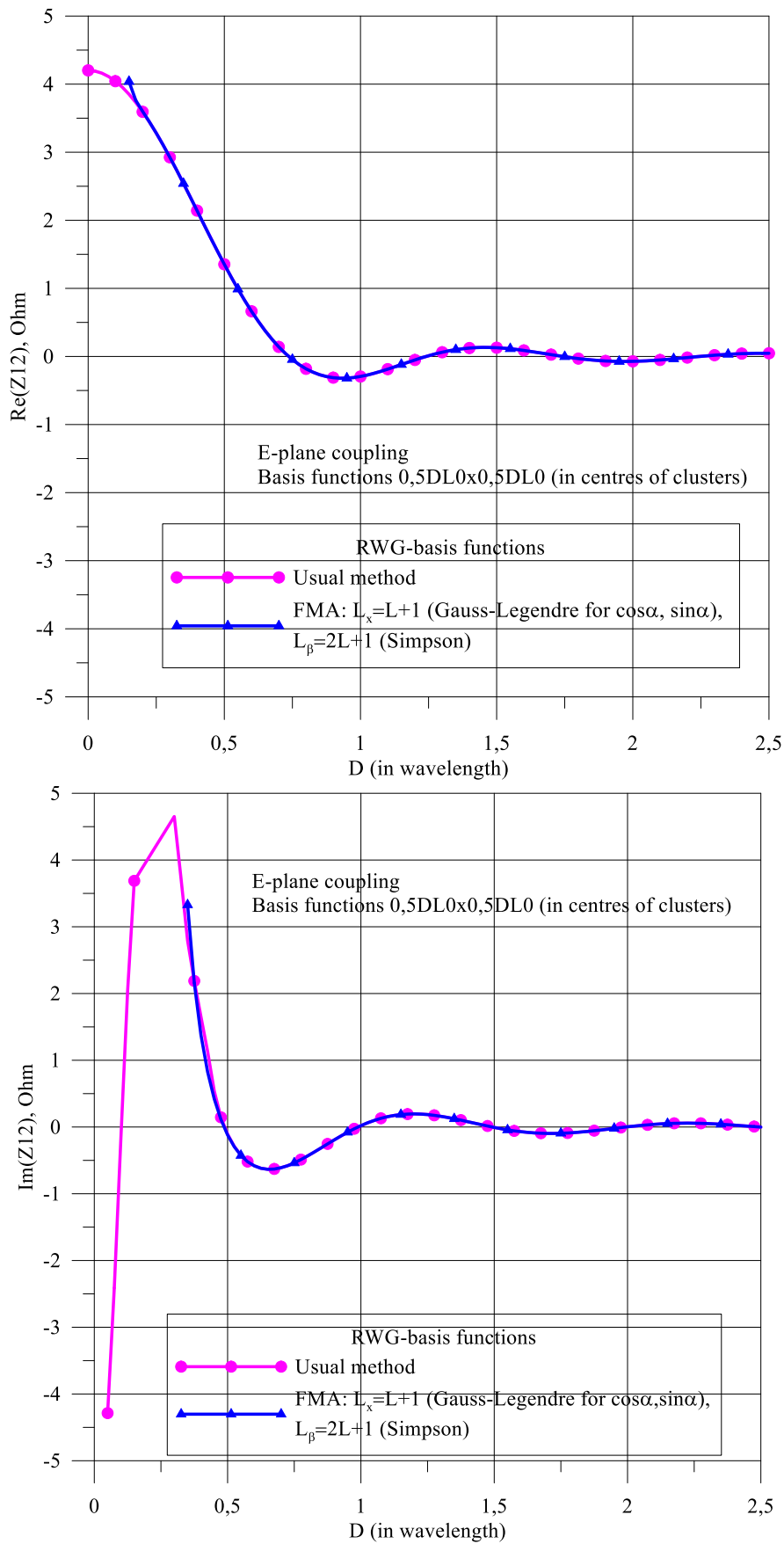


Рис. 10. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в Е-плоскости, базисные функции $d=0,5\lambda$ (применение квадратурной формулы Гаусса-Лежандра для алгебраических полиномов по углу α)

Третья серия расчетов была проведена для разработанного в данной статье метода, когда перед интегрированием были выполнены замены переменных, чтобы в подынтегральной функции иметь алгебраические полиномы по обоим углам α и β . В результате квадратурные формулы наивысшей степени точности Гаусса-Лежандра порядка $L+1$ и Эрмита порядка $L+1$ (для каждой полусферы) обеспечили точное вычисление интегралов. На рис. 11 и 12 показаны рассчитанные действительные и мнимые части взаимного импеданса в H-плоскости и E-плоскости соответственно, для размера базисных функций $d=0,05\lambda$. На рис. 13 и 14 показаны аналогичные графики для размера базисных функций $d=0,5\lambda$. Легко видеть, что имеется совпадение кривых с графической точностью, что свидетельствует о высокой точности интегрирования при вычислении взаимных импедансов.

Расчеты с помощью разработанного метода для ситуаций, когда размеры кластеров превышали размеры базисных функций и/или центры базисных функций были смещены от центров кластеров, также показали графическое совпадение кривых взаимных импедансов, рассчитанных обычным методом и мультипольным методом.

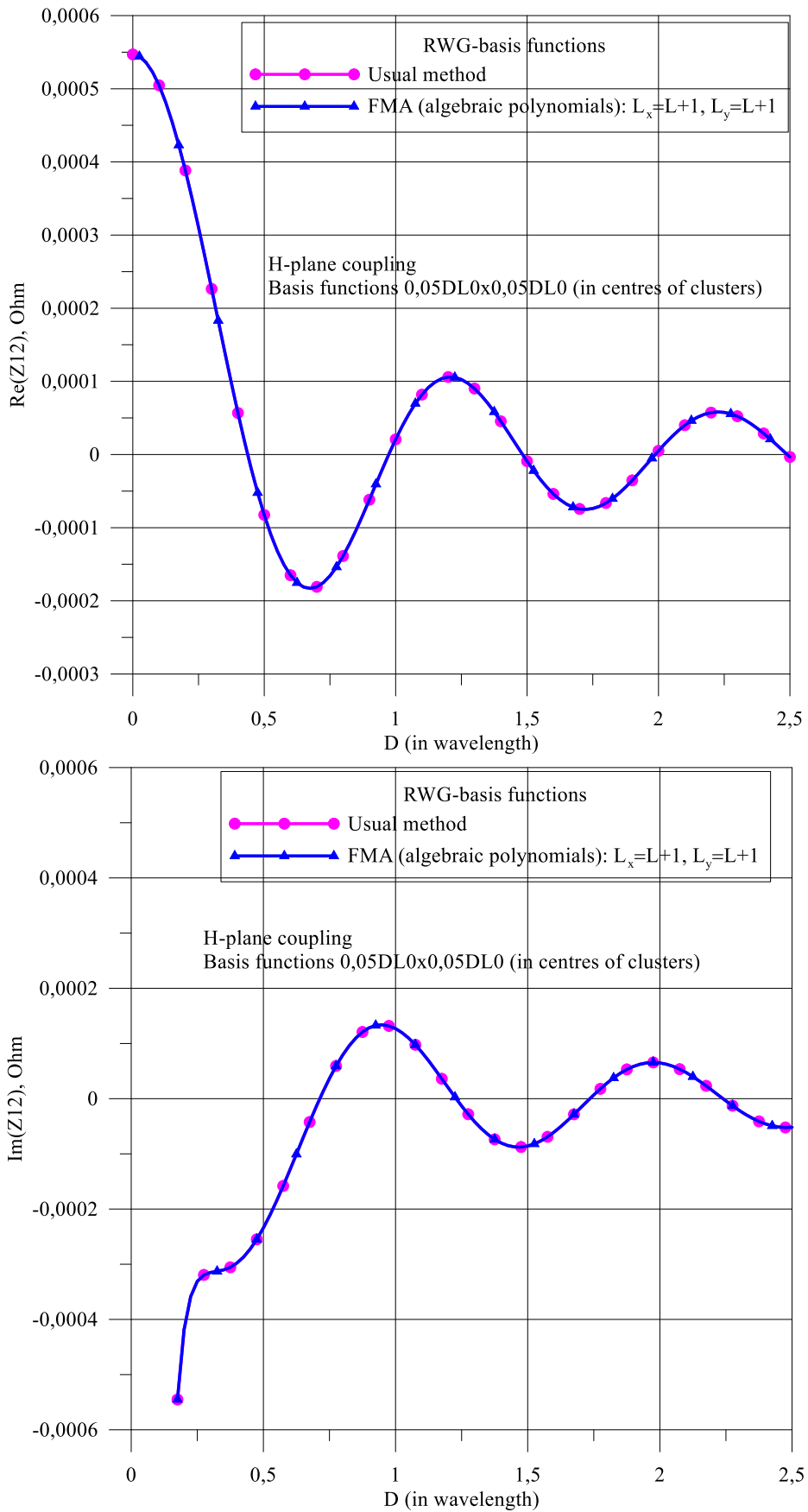


Рис. 11. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в H-плоскости, базисные функции $d=0,05\lambda$ (применение квадратурных формул Гаусса-Лежандра и Эрмита для алгебраических полиномов)

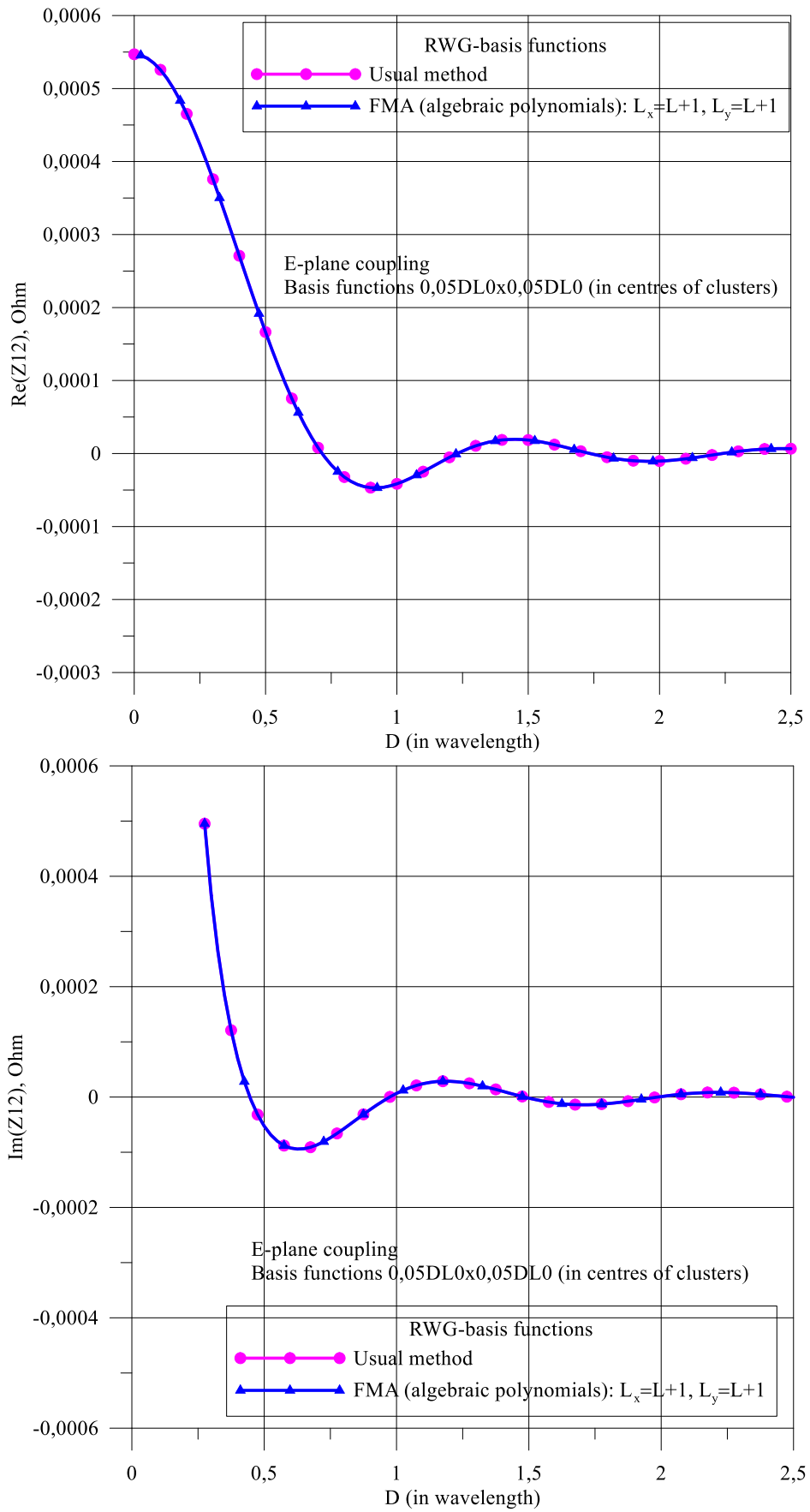


Рис. 12. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в Е-плоскости, базисные функции $d=0,05\lambda$ (применение квадратурных формул Гаусса-Лежандра и Эрмита для алгебраических полиномов)

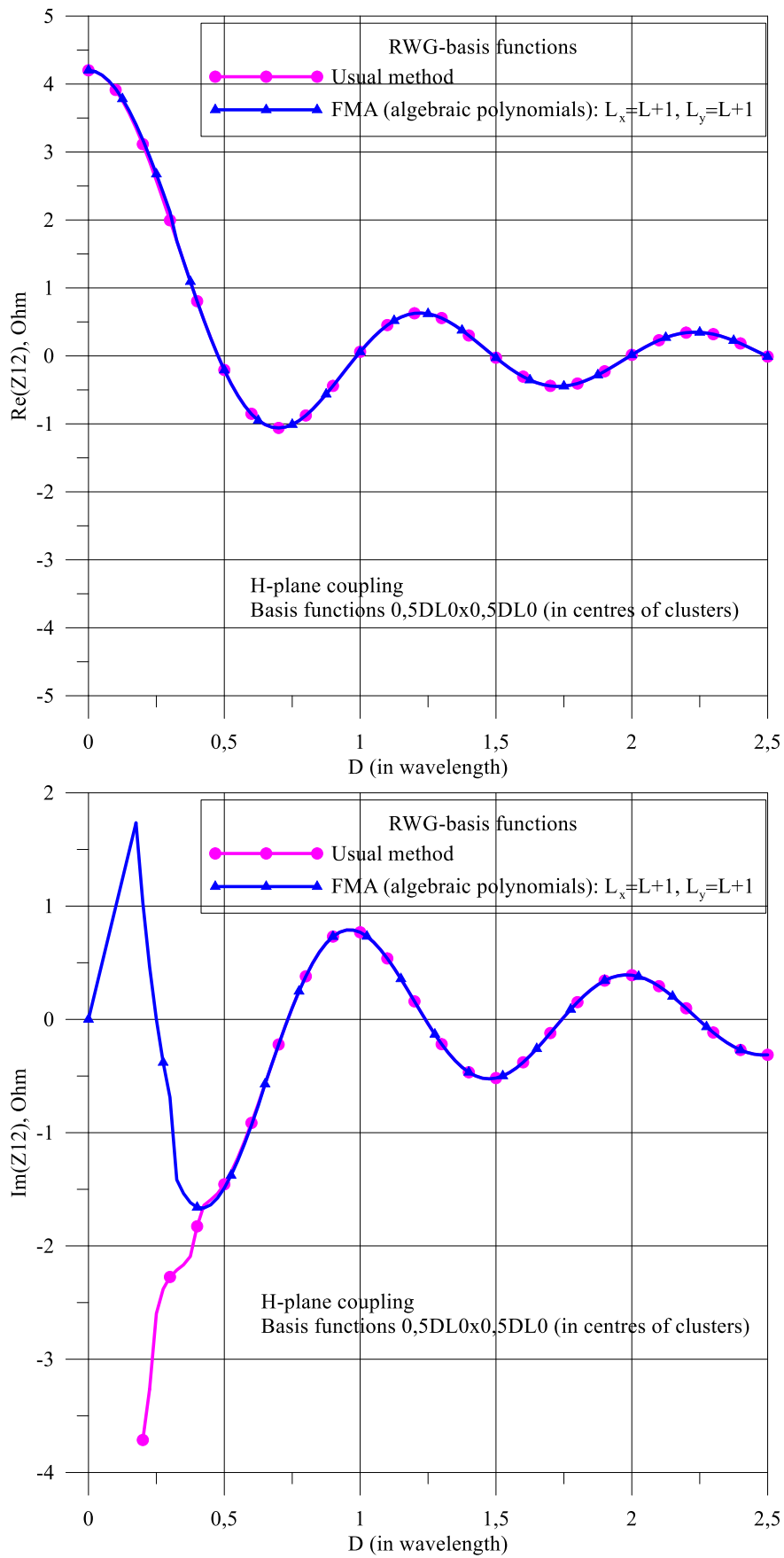


Рис. 13. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в H-плоскости, базисные функции $d=0,5\lambda$ (применение квадратурных формул Гаусса-Лежандра и Эрмита для алгебраических полиномов)

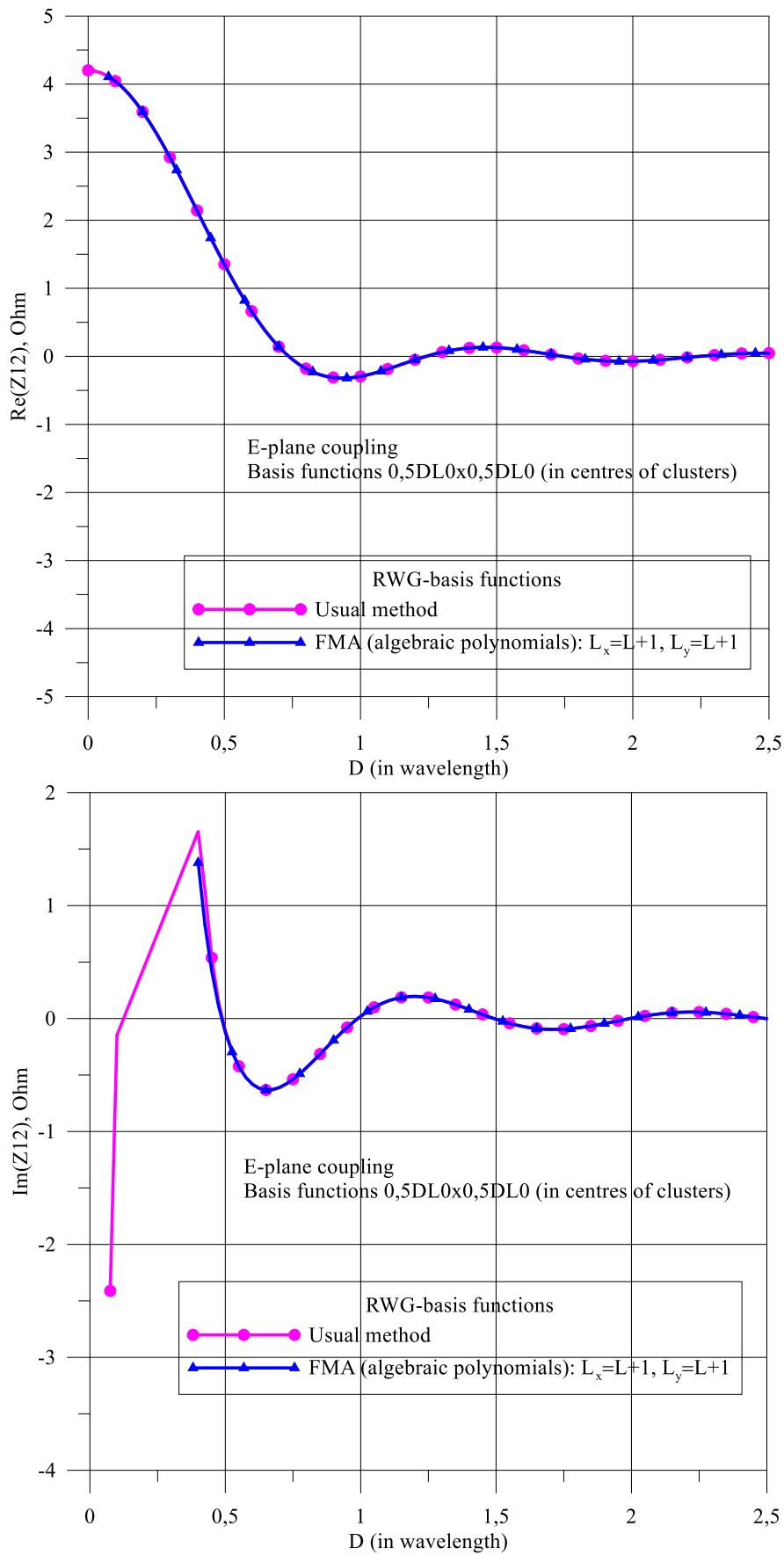


Рис. 14. $Re(Z_{12})$ и $Im(Z_{12})$ в Е-плоскости, базисные функции $d=0,5\lambda$ (применение квадратурных формул Гаусса-Лежандра и Эрмита для алгебраических полиномов)

5. Выводы

Разработан эффективный метод вычисления интегралов по телесному углу, возникающих при решении интегральных уравнений электрического поля с помощью метода мультипольных разложений. Показано, что для обеспечения высокой точности расчетов взаимных импедансов целесообразно в угловых интегралах перейти к подынтегральным функциям в виде алгебраических полиномов, чтобы затем вычислить интегралы с помощью с квадратурных формул Гаусса-Лежандра и Эрмита. Метод дает более высокую точность, чем известный из литературы метод с квадратурой Гаусса-Лежандра по одной координате и интегрированием Симпсона по второй координате, при том же количестве узлов интегрирования. Метод вычисления интегралов по телесному углу применим как для одноуровневой схемы (FMA), так и для многоуровневого мультипольного метода (MLFMA), и обеспечивает высокую точность с наименьшим порядком квадратурных формул, что снижает размерность хранимых массивов и повышает быстродействие метода мультипольных разложений.

Литература

1. Coifman R., Rokhlin V., Vandzura S. The fast multipole method for the wave equation: a pedestrian prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*. 1993. Vol.35. No.3. P.7-12.
2. Darve E. The fast multipole method: numerical implementation. *Int. J. of Computational Physics*. 2000., Vol.160. No.1. P.195-240.
3. Chew W., Jin J., Michielssen E. and Song J. *Fast and efficient algorithms in computational electromagnetics*. 2001. House. 2002. 931 p.
4. Gibson W. *The method of moments in electromagnetics*. Chapman & Hall. 2008.
5. Volakis J., Sertel K. *Integral equation methods for electromagnetics*. Scitech Publishing. 2012. 391 p.
6. Ergül O., Gürel L. *The multilevel fast multipole algorithm (MLFMA) for solving large-scale computational electromagnetics problems*. IEEE Press. 2014. 493 p.

7. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Энергия, 1967. 371 с.
8. Стрэттон Дж. Теория электромагнетизма. М.: ОГИЗ, 1948. 539 с.
9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
10. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape. *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*. 1982. Vol.30. No.3. P.409-418.
11. Maaskant R. *Analysis of large antenna systems*. PhD Thesis. Eindhoven Technische University. 2010. 273 p.

Для цитирования:

Лаврецкий Е.И. Применение квадратурных формул Гаусса-Лежандра и Эрмита для вычисления интегралов в методе мультипольных разложений. Журнал радиоэлектроники. 2020. № 4. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/apr20/7/text.pdf>. DOI 10.30898/1684-1719.2020.4.7