

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.4.6>

УДК: 535.14

## МОДЕЛЬ ОТКРЫТОЙ КВАНТОВОЙ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОПИСАНИЯ РАБОТЫ ЭРБИЕВОГО ЛАЗЕРА

И.В. Вовченко<sup>1,4</sup>, Е.С. Андрианов<sup>1,2,3</sup>, А.В. Дорофеев<sup>1,2,3,4</sup>

<sup>1</sup> МФТИ (НИУ), 141701, Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

<sup>2</sup> ИТПЭ РАН, 125412, Москва, ул. Ижорская, 13, стр. 6

<sup>3</sup> ВНИИА им. Н.Л. Духова, 127055, Москва, ул. Сущевская, 22

<sup>4</sup> ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН, 125009, Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7

Статья поступила в редакцию 5 марта 2024 г.

**Аннотация.** Рассмотрена квантово-механическая система, состоящая из электромагнитной моды, взаимодействующей с набором атомов эрбия. Для матрицы плотности данной системы построено управляющее уравнение Горини-Коссаковского-Сударшана-Линдблада в локальном подходе. Из данного управляющего уравнения получены уравнения, описывающие средние заселенности электромагнитной моды и атомов эрбия. Для данных уравнений получены кривые генерации лазерного излучения и проведен сравнительный анализ со скоростными уравнениями. Показано, что наличие слагаемых, отвечающих за спонтанное излучение в полученных уравнениях, приводит к сглаживанию порога генерации лазерного излучения.

**Ключевые слова:** лазер, волоконный лазер, физика открытых квантовых систем.

**Финансирование:** исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-72-10057).

**Автор для переписки:** Вовченко Иван, [vovchenko@phystech.edu](mailto:vovchenko@phystech.edu)

## Введение

Волоконные лазерные системы привлекают интенсивное внимание исследователей в связи с большим числом приложений в промышленности, медицине, связи и научных исследованиях [1]. Волоконные лазеры – это оптическое волокно с сердцевинной, допированной атомами активной среды. Такая конструкция делает волоконные лазеры крайне удобными в использовании и компактными.

В качестве активной среды волоконного лазера могут быть использованы различные вещества [1,2]. Одним из перспективных веществ является эрбий [2]. Волоконные лазеры с сердцевинной, допированной эрбием, позволяют осуществлять накачку на различных частотах и получать высокое усиление сигнала, при сохранении низкого уровня шума [3,4].

Описание работы волоконного эрбиевого лазера обычно происходит при помощи скоростных уравнений [5]. Такая модель является, в известном смысле, феноменологической. В связи с этим интерес представляет построение более строгой квантово-механической модели, описывающей динамику лазерного излучения и заселенностей атомов активной среды. Подходящий для этой цели математический аппарат предлагает теория открытых квантовых систем [6].

В рамках данной работы была построена квантовая модель системы, состоящей из электромагнитной моды, взаимодействующей с набором атомов эрбия. Описание динамики матрицы плотности данной системы было проведено при помощи управляющего уравнения Горини-Коссаковского-Сударшана-Линдблада в локальном подходе, которое учитывает эффекты диссипации энергии из системы, а также обеспечивает положительные заселенности уровней атомов эрбия во все моменты времени, что не гарантируется в скоростных уравнениях. Были получены уравнения на средние заселенности электромагнитной моды и атомов эрбия. Показано, что в разработанном подходе в данных уравнениях присутствуют слагаемые, отвечающие за спонтанное излучение. Показано, что наличие данных слагаемых приводит к сглаживанию порога генерации лазерного излучения.

## 1. Квантово-механическая модель.

Для построения квантово-механической модели динамики излучения в среде, заполненной атомами эрбия, необходимо, во-первых, зафиксировать используемую модель структуры электронных энергетических уровней атома эрбия. Накачку эрбиевого лазера обычно проводят на одной из трех длин волн 514.5 нм, 810 нм, 980 нм [1,2,5]. В последних двух вариантах накачки, структура электронных энергетических уровней атома эрбия может быть эффективно представлена в виде трехуровневой системы. Обозначим верхний уровень данной системы  $|\alpha\rangle$  – уровень накачки, средний уровень  $|\beta\rangle$  – рабочий уровень, и основное состояние  $|g\rangle$ . Поставим данным уровням в соответствие энергии  $\omega_\alpha$ ,  $\omega_\beta$ , 0. Данная система уровней представлена на рис. 1.

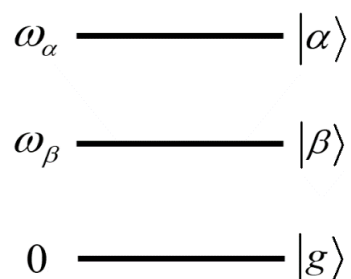


Рис. 1. Модель электронных энергетических уровней атома эрбия.

Введем проекционные операторы, которые описывают переходы между электронными энергетическими уровнями атома эрбия. Так, переход с верхнего электронного уровня на средний описывается оператором  $\hat{\alpha} = |\beta\rangle\langle\alpha|$ , а переход со среднего электронного уровня на основной уровень оператором  $\hat{\beta} = |g\rangle\langle\beta|$ . Обратные переходы описываются соответствующими сопряженными операторами  $\hat{\alpha}^\dagger$  и  $\hat{\beta}^\dagger$ . Используя данные операторы, можно записать гамильтониан атома эрбия в виде

$$\hat{H}_{Er} = \omega_\alpha \hat{\alpha}^\dagger \hat{\alpha} + \omega_\beta \hat{\beta}^\dagger \hat{\beta}. \quad (1)$$

Рассмотрим квантованную моду электромагнитного излучения. Ее гамильтониан имеет вид  $\hat{H}_{mod} = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , где  $\hat{a}$  – оператор уничтожения фотона в

моды резонатора,  $\omega_a$  – частота этой моды. Пусть данная мода дипольно взаимодействует с набором атомов эрбия. В приближении вращающейся волны, гамильтониан такой системы имеет вид [6]

$$\hat{H}_S = \omega_a \hat{a}^\dagger \hat{a} + \sum_m \left( \omega_\alpha \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m + \omega_\beta \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m + \Omega_\alpha (\hat{a}^\dagger \hat{\alpha}_m + \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{a}) + \Omega_\beta (\hat{a}^\dagger \hat{\beta}_m + \hat{\beta}_m^\dagger \hat{a}) \right). \quad (2)$$

Здесь индекс  $m$  пробегает по всем атомам эрбия,  $\Omega_\alpha$  – константа Раби дипольного взаимодействия между переходом с верхнего уровня на рабочий и модой электромагнитного излучения,  $\Omega_\beta$  – константа Раби дипольного взаимодействия между переходом с рабочего уровня в основное состояние и модой электромагнитного излучения. Тут принято, что энергии взаимодействия между дипольными переходами разных атомов и модой одинаковы, что верно, если взаимодействие между атомами эрбия мало.

Данная система является замкнутой, т.е. ее полная энергии сохраняется. Взаимодействие данной системы с окружением приводит к потере энергии. Пусть данная система взаимодействует с окружением, представленным полем электромагнитного излучения и локальными резервуарами дефазировки. Тогда, динамика системы становится необратимой, а гамильтониан  $\hat{H}_S$  называют гамильтонианом открытой квантовой системы (ОКС). Для ОКС можно составить уравнение Горини-Коссаковского-Сударшана-Линдблада (ГКСЛ) в локальном подходе. Для данного гамильтониана  $\hat{H}_S$  оно имеет вид [6]

$$\frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = -i[\hat{H}_S, \hat{\rho}] + L_{\text{mod}}[\hat{\rho}] + \sum_m L_{Er,m}[\hat{\rho}]. \quad (3)$$

Тут введены следующие супероператоры для описания диссипации энергии из ОКС

$$\begin{aligned} L_{\text{mod}}[\hat{\rho}] = & \frac{G_{\text{rad}}(-\omega_a)}{2} (2\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}) + \\ & + \frac{G_{\text{rad}}(\omega_a)}{2} (2\hat{a}^\dagger\hat{\rho}\hat{a} - \hat{\rho}\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{\rho}) + \\ & + \frac{G_{\varphi,\text{mod}}(0)}{2} (2\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a} - \hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho}), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 L_{Er,m}[\hat{\rho}] = & \frac{G_{rad}(-(\omega_\alpha - \omega_\beta))}{2} (2\hat{\alpha}_m \hat{\rho} \hat{\alpha}_m^\dagger - \hat{\rho} \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m - \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m \hat{\rho}) + \\
 & + \frac{G_{rad}(\omega_\alpha - \omega_\beta)}{2} (2\hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\rho} \hat{\alpha}_m - \hat{\rho} \hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_m^\dagger - \hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\rho}) + \\
 & + \frac{G_{rad}(-\omega_\beta)}{2} (2\hat{\beta}_m \hat{\rho} \hat{\beta}_m^\dagger - \hat{\rho} \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m - \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\rho}) + \\
 & + \frac{G_{rad}(\omega_\beta)}{2} (2\hat{\beta}_m^\dagger \hat{\rho} \hat{\beta}_m - \hat{\rho} \hat{\beta}_m \hat{\beta}_m^\dagger - \hat{\beta}_m \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\rho}) + \\
 & + \frac{G_\Lambda(-\omega_\alpha)}{2} (2\hat{\beta}_m \hat{\alpha}_m \hat{\rho} \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\beta}_m^\dagger - \hat{\rho} \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\alpha}_m - \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\alpha}_m \hat{\rho}) + \\
 & + \frac{G_\Lambda(\omega_\alpha)}{2} (2\hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\rho} \hat{\beta}_m \hat{\alpha}_m - \hat{\rho} \hat{\beta}_m \hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\beta}_m^\dagger - \hat{\beta}_m \hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\rho}) + \\
 & + \frac{G_{\varphi,\alpha}(0)}{2} (2\hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m \hat{\rho} \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m - \hat{\rho} \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m - \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m \hat{\rho}) + \\
 & + \frac{G_{\varphi,\beta}(0)}{2} (2\hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\rho} \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m - \hat{\rho} \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m - \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\rho}) + \\
 & + \frac{G_{\varphi,\alpha\beta}(0)}{2} (2\hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m \hat{\rho} \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m - \hat{\rho} \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m - \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m \hat{\rho}) + \\
 & + \frac{G_{\varphi,\alpha\beta}(0)}{2} (2\hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\rho} \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m - \hat{\rho} \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m - \hat{\alpha}_m^\dagger \hat{\alpha}_m \hat{\beta}_m^\dagger \hat{\beta}_m \hat{\rho}).
 \end{aligned} \tag{5}$$

Тут  $\hat{\rho}$  – матрица плотности ОКС,  $G_\bullet(\pm\omega) = \gamma_\bullet^2(\omega) g_\bullet(\omega) (n_\bullet(\omega) + 1/2 \pm 1/2)$ ,  $\omega > 0$  – корреляционная функция соответствующего резервуара, где  $g_\bullet(\omega)$  – плотность состояний в соответствующем резервуаре на частоте  $\omega$ ,  $n_\bullet(\omega) = 1 / (\exp(\hbar\omega / kT_\bullet) - 1)$  – средняя заселенность соответствующего резервуара,  $\gamma_\bullet(\omega)$  – функция, задающая силу взаимодействия между частотой  $\omega$  в ОКС и соответствующим резервуаром [6]. В данном случае мода электромагнитного излучения взаимодействует с резервуаром электромагнитного излучения ( $G_{rad}(\pm\omega)$ ) и дефазирующим резервуаром ( $G_{\varphi,mod}(0)$ ). Аналогично взаимодействуют с резервуарами и атомы эрбия ( $G_{rad}(\pm\omega)$  – излучение и  $G_{\varphi,\bullet}(\pm\omega)$  – дефазировка), однако, помимо обозначенных резервуаров, атомы эрбия взаимодействуют еще и с резервуаром накачки

$(G_{\Lambda}(\pm\omega))$ : эффект накачки достигается за счет присвоения отрицательной температуры данному резервуару, и  $G_{\varphi,\alpha\beta}(0) = \sqrt{G_{\varphi,\alpha}(0)G_{\varphi,\beta}(0)}$  так как резервуар дефазировки у электронной подсистемы атома эрбия один, но матричные элементы переходов между уровнями, за счет взаимодействия с данным резервуаром, различны.

## 2. Уравнения на средние числа заполнения.

Из управляющего уравнения можно получить уравнения на средние числа заполнения мод и атомов эрбия, при помощи следующей формулы (тут  $\hat{A}$  – некоторый оператор)

$$\frac{\partial \langle A \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \text{tr}(\rho A) = \text{tr} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} A \right) + \text{tr} \left( \rho \frac{\partial A}{\partial t} \right). \quad (6)$$

Используя эту формулу, можно получить уравнения на  $I = \langle a^\dagger a \rangle$ ,  $J_{\alpha m} = \langle a^\dagger \alpha_m \rangle$ ,  $J_{\beta m} = \langle a^\dagger \beta_m \rangle$ ,  $n_{\alpha m} = \langle \alpha_m^\dagger \alpha_m \rangle$ ,  $n_{\beta m} = \langle \beta_m^\dagger \beta_m \rangle$ . Заменяя в данных уравнениях средние от произведения четырех операторов на произведения средних от произведения двух операторов следующим образом

$$\langle a^\dagger a^\dagger \beta_m \alpha_m \rangle = \langle a^\dagger \beta_m \rangle \langle a^\dagger \alpha_m \rangle = J_{\beta m} J_{\alpha m},$$

$$\langle \alpha_m^\dagger \alpha_m a^\dagger a \rangle = \langle \alpha_m^\dagger \alpha_m \rangle \langle a^\dagger a \rangle = n_{\alpha m} I,$$

$$\langle \beta_m^\dagger \beta_m a^\dagger a \rangle = \langle \beta_m^\dagger \beta_m \rangle \langle a^\dagger a \rangle = n_{\beta m} I,$$

получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I &= i\Omega_\alpha \sum_m (-J_{\alpha m} + J_{\alpha m}^*) + i\Omega_\beta \sum_m (-J_{\beta m} + J_{\beta m}^*) + \\ &+ 2 \frac{G_{\text{rad}}(\omega_a) - G_{\text{rad}}(-\omega_a)}{2} I + G_{\text{rad}}(\omega_a), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_{\alpha m} &= -i(\omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_a) J_{\alpha m} + i\Omega_\alpha (n_{\alpha m} + n_{\alpha m} I - n_{\beta m} I) + \\ &+ i\Omega_\beta J_{\beta m} J_{\alpha m} + (K_\alpha + K_\alpha) J_{\alpha m}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} J_{\beta m} = & -i(\omega_{\beta} - \omega_a) J_{\beta m} - i\Omega_{\alpha} J_{\beta m} J_{\alpha m} + \\ & + i\Omega_{\beta} (n_{\beta m} + n_{\beta m} I - (1 - n_{\alpha m} - n_{\beta m}) I) + (K_a + K_{\beta}) J_{\beta m}, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_{\alpha m} = & i\Omega_{\alpha} (J_{\alpha m} - J_{\alpha m}^*) - 2 \frac{G_{\text{rad}}(-(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta}))}{2} n_{\alpha m} + 2 \frac{G_{\text{rad}}(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})}{2} n_{\beta m} - \\ & - 2 \frac{G_{\Lambda}(-\omega_{\alpha})}{2} n_{\alpha m} + 2 \frac{G_{\Lambda}(\omega_{\alpha})}{2} (1 - n_{\alpha m} - n_{\beta m}), \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} n_{\beta m} = & i\Omega_{\alpha} (-J_{\alpha m} + J_{\alpha m}^*) + i\Omega_{\beta} (J_{\beta m} - J_{\beta m}^*) + 2 \frac{G_{\text{rad}}(-(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta}))}{2} n_{\alpha m} - \\ & - 2 \frac{G_{\text{rad}}(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})}{2} n_{\beta m} - 2 \frac{G_{\text{rad}}(-\omega_{\beta})}{2} n_{\beta m} + 2 \frac{G_{\text{rad}}(\omega_{\beta})}{2} (1 - n_{\alpha m} - n_{\beta m}), \end{aligned} \quad (11)$$

$$K_a = \frac{G_{\text{rad}}(\omega_a) - G_{\text{rad}}(-\omega_a)}{2} - \frac{G_{\varphi, a}(0)}{2}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} K_{\alpha} = & -\frac{G_{\text{rad}}(-(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})) + G_{\text{rad}}(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})}{2} - \frac{G_{\text{rad}}(-\omega_{\beta})}{2} - \\ & - \frac{G_{\Lambda}(-\omega_{\alpha})}{2} - \frac{(\sqrt{G_{\varphi, \alpha}(0)} - \sqrt{G_{\varphi, \beta}(0)})^2}{2}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$K_{\beta} = -\frac{G_{\text{rad}}(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta})}{2} - \frac{G_{\text{rad}}(-\omega_{\beta}) + G_{\text{rad}}(\omega_{\beta})}{2} - \frac{G_{\Lambda}(\omega_{\alpha})}{2} - \frac{G_{\varphi, \beta}(0)}{2}. \quad (14)$$

Пренебрежем нелинейностями типа  $J_{\beta m} J_{\alpha m}$ , в полученных уравнениях.

Пусть  $N$  – концентрация атомов эрбия. Тогда данные уравнения можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} I = & i\Omega_{\alpha} N (-J_{\alpha} + J_{\alpha}^*) + i\Omega_{\beta} N (-J_{\beta} + J_{\beta}^*) + \\ & + 2 \frac{G_{\text{rad}}(\omega_a) - G_{\text{rad}}(-\omega_a)}{2} I + G_{\text{rad}}(\omega_a), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{d}{dt} J_{\alpha} = -i(\omega_{\alpha} - \omega_{\beta} - \omega_a) J_{\alpha} + i\Omega_{\alpha} (n_{\alpha} + n_{\alpha} I - n_{\beta} I) + (K_a + K_{\alpha}) J_{\alpha}, \quad (16)$$

$$\frac{d}{dt} J_{\beta} = -i(\omega_{\beta} - \omega_a) J_{\beta} + i\Omega_{\beta} (n_{\beta} + n_{\beta} I - (1 - n_{\alpha} - n_{\beta}) I) + (K_a + K_{\beta}) J_{\beta}, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_\alpha = i\Omega_\alpha (J_\alpha - J_\alpha^*) - 2\frac{G_{rad}(-(\omega_\alpha - \omega_\beta))}{2}n_\alpha + 2\frac{G_{rad}(\omega_\alpha - \omega_\beta)}{2}n_\beta - \\ - 2\frac{G_\Lambda(-\omega_\alpha)}{2}n_\alpha + 2\frac{G_\Lambda(\omega_\alpha)}{2}(1 - n_\alpha - n_\beta), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n_\beta = i\Omega_\alpha (-J_\alpha + J_\alpha^*) + i\Omega_\beta (J_\beta - J_\beta^*) + 2\frac{G_{rad}(-(\omega_\alpha - \omega_\beta))}{2}n_\alpha - \\ - 2\frac{G_{rad}(\omega_\alpha - \omega_\beta)}{2}n_\beta - 2\frac{G_{rad}(-\omega_\beta)}{2}n_\beta + 2\frac{G_{rad}(\omega_\beta)}{2}(1 - n_\alpha - n_\beta), \end{aligned} \quad (19)$$

где  $J_\alpha = \sum_m \langle a^\dagger \alpha_m \rangle / N$ ,  $J_\beta = \sum_m \langle a^\dagger \beta_m \rangle / N$ ,  $n_\alpha = \sum_m \langle \alpha_m^\dagger \alpha_m \rangle / N$ ,

$n_\beta = \sum_m \langle \beta_m^\dagger \beta_m \rangle / N$ . В этих уравнениях, полагая потоки  $J_\alpha$  и  $J_\beta$  стационарными

(т.е. полагая их производные равными нулю), получаем

$$\frac{d}{dt}I = -\gamma_a I + N(c_\alpha \tilde{n}_i + c_\beta n_i)I + N(c_\alpha n_\alpha + c_\beta n_\beta), \quad (20)$$

$$\frac{d}{dt}n_\alpha = -\gamma_{\alpha\beta} n_\alpha + \Lambda(1 - n_\alpha - n_\beta) - c_\alpha \tilde{n}_i I - c_\alpha n_\alpha, \quad (21)$$

$$\frac{d}{dt}n_\beta = -\gamma_{\beta g} n_\beta + \gamma_{\alpha\beta} n_\alpha + (c_\alpha \tilde{n}_i - c_\beta n_i)I + (c_\alpha n_\alpha - c_\beta n_\beta). \quad (22)$$

Тут учтено, что, обычно,  $\omega/T \gg 1$ , соответственно,  $n(\omega)$  малы во всех резервуарах, и введены следующие обозначения  $\gamma_a = \gamma_{rad}^2(\omega_a)g_{rad}(\omega_a)$ ,

$\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{rad}^2(\omega_\alpha - \omega_\beta)g_{rad}(\omega_\alpha - \omega_\beta)$ ,  $\gamma_{\beta g} = \gamma_{rad}^2(\omega_\beta)g_{rad}(\omega_\beta)$ ,  $\tilde{n}_i = n_\alpha - n_\beta$ ,  $n_i = n_\beta - n_g$ ,

$c_\alpha = \frac{2\Omega_\alpha^2(K_\alpha + K_\alpha)}{(K_\alpha + K_\alpha)^2 + (\omega_\alpha - \omega_\beta - \omega_a)^2}$ ,  $c_\beta = \frac{2\Omega_\beta^2(K_\alpha + K_\beta)}{(K_\alpha + K_\beta)^2 + (\omega_\beta - \omega_a)^2}$ . Ранее введенные

коэффициенты также упрощаются, при  $\omega/T \gg 1$ :  $K_\alpha = (\gamma_a + \gamma_{\phi,\alpha})/2$ ,

$K_\alpha = \left( \gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta g} + \left( \sqrt{\gamma_{\phi,\alpha}} - \sqrt{\gamma_{\phi,\beta}} \right)^2 \right) / 2$ ,  $K_\beta = (\gamma_{\beta g} + \Lambda + \gamma_{\phi,\beta})/2$ ,  $\gamma_{\phi,\alpha} = G_{\phi,\alpha}(0)$ ,

$\gamma_{\phi,\beta} = G_{\phi,\beta}(0)$ ,  $\Lambda = G_\Lambda(\omega_\alpha)$ . Назовем эту систему уравнений системой лазерных уравнений атомов эрбия (СЛУАЭ).

Обсудим физический смысл каждого из слагаемых в СЛУАЭ. Первые слагаемые во всех трех уравнениях отвечают за диссипацию, при переходе с



уровня на уровень в соответствующей подсистеме ОКС (мода или атомы). Второе слагаемое в первом уравнении, третье слагаемое во втором уравнении и третье слагаемое в третьем уравнении СЛУАЭ описывают вынужденные переходы в атомах эрбия под действие излучения лазерной моды. Последние слагаемые во всех уравнениях описывают спонтанные переходы. Второе слагаемое во втором уравнении СЛУАЭ описывает вклад накачки.

Так как  $\gamma_{\alpha\beta} \gg \gamma_{\beta g}$ , полученные уравнения можно упростить, исключив адиабатически уровень накачки:  $dn_{\alpha} / dt = 0$ . Получаем

$$\frac{d}{dt} I = -\gamma_a I + c_{\beta} n_i I + c_{\beta} n_{\beta} + c_{\alpha} \frac{(I+1)\Lambda n_g - \gamma_{\alpha\beta} n_{\beta} I}{\gamma_{\alpha\beta} + c_{\alpha}(1+I)}, \quad (23)$$

$$\frac{d}{dt} n_{\beta} = -\gamma_{\beta g} n_{\beta} - c_{\beta} n_i I - c_{\beta} n_{\beta} + \Lambda n_g. \quad (24)$$

Назовем эту систему уравнений адиабатической системой лазерных уравнений атомов эрбия (АСЛУАЭ).

Исключив уровень накачки, мы уменьшили число переменных, эффективно заменив трехуровневую энергетическую структуру уровней атомов эрбия на двухуровневую. Такой вид системы уравнений полезен для сравнения результатов развитого здесь подхода к описанию динамики лазерного излучения с уже существующими подходами.

### 3. Сравнение кривых генерации уравнений ОКС и скоростных уравнений.

Сравним АСЛУАЭ, с часто применяющимися в лазерной физике скоростными уравнениями. Для двухуровневой системы, взаимодействующей с модой электромагнитного излучения, феноменологические скоростные уравнения имеют вид [5]

$$\frac{d}{dt} I = -\gamma_a I + c_{\beta} n_i I, \quad (25)$$

$$\frac{d}{dt} n_{\beta} = -\gamma_{\beta g} n_{\beta} - c_{\beta} n_i I + \Lambda \gamma_a. \quad (26)$$

Видно, что такие скоростные уравнения не учитывают наличие спонтанного излучения в ОКС. Также в скоростных уравнениях вклад накачки учитывается иначе, чем СЛУАЭ и АСЛУАЭ: мощность накачки не умножается на заселенность основного состояния.

Рассмотрим кривые генерации (зависимость стационарной средней заселенности электромагнитной моды от накачки), получаемые из СЛУАЭ, из АСЛУАЭ и из скоростных уравнений. Данные кривые для случая безызлучательного перехода между уровнем накачки и рабочим уровнем представлены на рис. 2. Видно, что выше порога генерации АСЛУАЭ дают схожий результат со скоростными уравнениями, в то же время СЛУАЭ также находятся со скоростными уравнениями в хорошем согласии, но, при увеличении скорости диссипации лазерной моды порог генерации смещается в область меньшей накачки.

Ниже порога генерации разница между полученными уравнениями и скоростными уравнениями значительна. Так, скоростные уравнения прогнозируют нулевую интенсивность. СЛУАЭ и АСЛУАЭ имеют ненулевую интенсивность. Это связано с тем, что в данных уравнениях присутствуют члены, отвечающие за спонтанное излучение, в то время как в скоростных уравнениях оные отсутствуют. Таким образом, в подходе к описанию динамики лазерного излучения, при помощи управляющего уравнения ОКС, порог генерации лазерного излучения сглаживается, за счет удержания слагаемых, отвечающих за спонтанное излучение. СЛУАЭ и АСЛУАЭ ниже порога генерации дают схожие значения интенсивности.

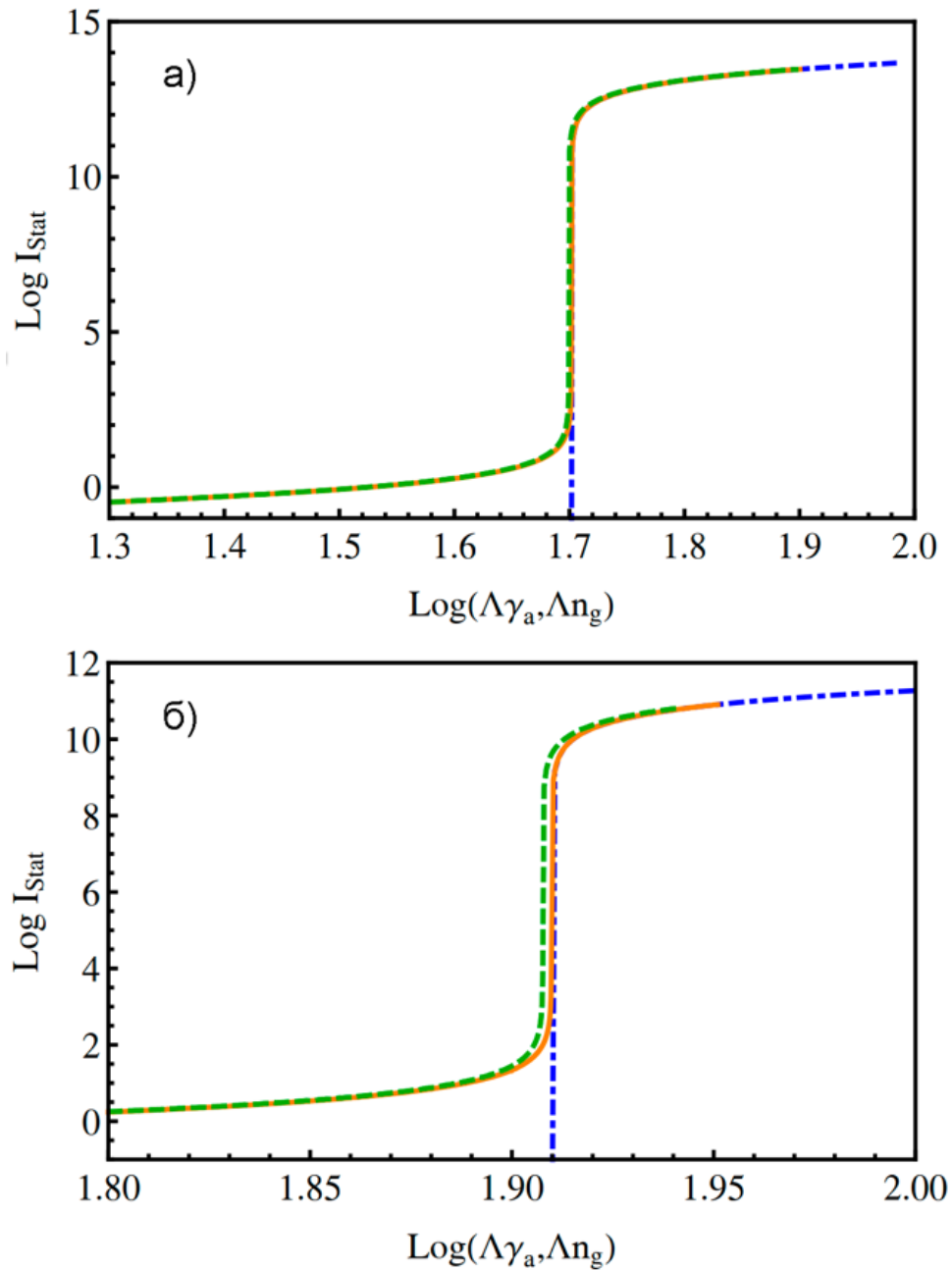


Рис. 2. Кривые генерации для уравнений. Параметры:  $\gamma_{\beta g} = 10^2 \text{ c}^{-1}$ ,  $\gamma_{\alpha\beta} = 10^2 \gamma_{\beta g}$ ,  $c_\alpha = 0$ ,  $c_\beta = 1.6 \cdot 10^{-10} \text{ см}^3 \cdot \text{c}^{-1}$ ,  $N = 5 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  а)  $\gamma_a = 5 \cdot 10^6 \text{ c}^{-1}$ , б)  $\gamma_a = 5 \cdot 10^8 \text{ c}^{-1}$ .

Синяя штрих-пунктирная кривая – кривая генерации, полученная из скоростных уравнений,  
 оранжевая кривая – кривая генерации, полученная из АСЛУАЭ,  
 зеленая пунктирная кривая – кривая генерации, полученная из СЛУАЭ.

## Заключение

Была построена квантово-механическая модель электромагнитной моды, взаимодействующей с набором атомов эрбия. Динамики данной системы была исследована при помощи уравнения Горини-Коссаковского-Сударшана-Линдблада в локальном подходе. Данное уравнение явно учитывает диссипацию энергии, т.е. описание системы было произведено в формализме, используемом в физике открытых квантовых систем.

Были получены уравнения, описывающие динамику средних заселенностей электромагнитной моды и атомов эрбия. Проведено сравнение полученных уравнений со скоростными уравнениями. Показано, что слагаемые, отвечающие за спонтанное излучение в полученных уравнениях, приводят к сглаживанию порога генерации лазерного излучения. Выше порога генерации полученные уравнения дают значения стационарной заселенности электромагнитной моды аналогичные скоростным уравнениям.

**Финансирование:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-72-10057).

## Литература

1. Shi W., Fang Q., Zhu X., Norwood R. A., Peyghambarian N. Fiber lasers and their applications //Applied optics. – 2014. – V. 53. – N 28. – P. 6554-6568.
2. Dragic P. D., Cavillon M., Ballato J. Materials for optical fiber lasers: A review //Applied Physics Reviews. – 2018. – V. 5. – N 4. – P. 041301
3. Naji A.W. et al. Review of Erbium-doped fiber amplifier //International Journal of the Physical Sciences. – 2011. – V. 6. – N 20. – P. 4674-4689.
4. Bouzid B. Analysis and review of Erbium doped fiber amplifier //2013 Saudi International Electronics, Communications and Photonics Conference. – IEEE, 2013. – P. 1-5.

5. Sanchez F., Le Boudec P., François P. L., Stephan G. Effects of ion pairs on the dynamics of erbium-doped fiber lasers //Physical Review A. – 1993. – V. 48. – N 3. – P. 2220.
6. Breuer H. P., Petruccione F. The theory of open quantum systems. – Oxford University Press, USA, 2002.

**Для цитирования:**

Вовченко И.В., Андрианов Е.С., Дорофеев А.В. Модель открытой квантовой системы для описания работы эрбиевого лазера. // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.4.6>