

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.4.7>

УДК: 621.396.67

## МЕТОД ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛА КИРХГОФА

Н.В. Анютин

ПАО «НПО «Алмаз»  
125190, Москва, Ленинградский проспект, д. 80, корп. 16

Статья поступила в редакцию 7 августа 2023 г.

**Аннотация.** В статье предложен способ приближенного вычисления градиента волнового поля по его распределению на единственной замкнутой поверхности. Это позволяет вычислять интеграл Кирхгофа без дополнительных расчетов или измерений электромагнитного поля и открывает возможность для его использования на практике наравне с принципом эквивалентности. Проведенное сравнение точности вычисления интеграла Кирхгофа с его векторными формами показало, что предложенная оценка производной волнового поля по нормали к поверхности вносит дополнительные методические ошибки, которые эквивалентны помехе на уровне не выше  $-40$  дБ. При этом, использование в алгоритмах преобразования электромагнитного поля интеграла Кирхгофа вместо широко распространенного принципа эквивалентности уменьшает их вычислительную сложность до 20 раз.

**Ключевые слова:** интеграл Кирхгофа, принцип эквивалентности, формулы Стрэттона и Чу, ближняя зона, дальняя зона, преобразование электромагнитного поля, измерение характеристик антенн, диагностика антенн.

**Автор для переписки:** Анютин Николай Викторович, [anyutinnv@mail.ru](mailto:anyutinnv@mail.ru)

## Введение

Технологии радиосвязи, радиолокации и радионавигации используют явление излучения и рассеяния электромагнитных волн. По этой причине на этапах разработки и серийного производства соответствующих технических средств проводятся теоретические расчеты и экспериментальные измерения напряженности электрического и магнитного поля. Как правило, наибольший интерес представляет электромагнитное поле в дальней зоне (ДЗ) излучения. Приближенные к ДЗ условия достигаются на больших расстояниях от источников электромагнитного поля. Их реализация для антенн с большими электрическими размерами в некоторых теоретических методах [1] и при измерениях на практике [2] трудно осуществима в виду большой вычислительной сложности и стоимости.

Электромагнитное поле в ДЗ может быть получено по распределениям векторов напряженности электрического и магнитного поля в ближней зоне (БЗ) излучения с помощью различных форм интеграла Кирхгофа [3]. Среди них наибольшее распространение на практике имеет принцип эквивалентности [4]. В сравнении с ним формулы Стрэттона и Чу [5] не имеют очевидных преимуществ и лишь эпизодически появляются в исследованиях [6-11]. С интегралом Кирхгофа ситуация отличается. С одной стороны, он имеет большую область применимости и может использоваться с любыми решениями скалярного волнового уравнения. В случае электромагнитного поля, интеграл Кирхгофа позволяет найти одну из компонент напряженности без информации об остальных компонентах [12-14]. С другой стороны, вычисление интеграла Кирхгофа сталкивается с необходимостью знания производной волнового поля по нормали к замкнутой поверхности, которая охватывает все источники. Если в методе конечных разностей во временной области производную дополнительно вычислять не требуется [15], то в прочих методах вычислительной электродинамики потребуются дополнительный расчет, а в экспериментах – измерение [16]. По-видимому, именно этот недостаток

ограничивает использование интеграла Кирхгофа в известных алгоритмах преобразования электромагнитного поля [17].

Алгоритмы преобразования электромагнитного поля, которые основаны на формах интеграла Кирхгофа, имеют большую вычислительную сложность. Использование в них непосредственно интеграла Кирхгофа вместо принципа эквивалентности или формул Стрэттона и Чу позволяет существенно уменьшить вычислительную сложность. Так при вычислении каждой компоненты векторов электромагнитного поля скалярная функция Грина умножается на значение поля и его производную по нормали к поверхности вместо умножения тензорной функции Грина на вектор из шести компонент.

Цель работы – уменьшение вычислительной сложности алгоритмов преобразования гармонического электромагнитного поля. Для ее достижения решается задача разработки методов приближенного вычисления производной волнового поля по нормали к поверхности по значениям волнового поля только на этой поверхности. Сначала исследуется точность вычисления компонент векторов электромагнитного поля с помощью разных форм интеграла Кирхгофа. Затем предлагаются приближенные формулы для оценки производной волнового поля по нормали к поверхности и исследуется точность вычисления интеграла Кирхгофа с их подстановкой. В конце разработанные методы апробируются на теоретических и экспериментальных данных, и приводятся оценки вычислительной сложности алгоритмов, которые их реализуют.

### **Исследование точности вычисления форм интеграла Кирхгофа**

Рассмотрим объем  $V$  с источниками электромагнитного поля, которые можно описать объемной плотностью электрических  $\mathbf{j}_e$  и магнитных  $\mathbf{j}_m$  токов. Согласно принципу эквивалентности Лава, на границе объема  $V$ , которой является замкнутая поверхность  $S$ , по известным значениям вектора нормали  $\mathbf{n}$ , а также напряженности электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  поля по следующей формуле можно найти поверхностную плотность эквивалентных электрических  $\mathbf{J}_e$  и магнитных  $\mathbf{J}_m$  токов [4]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{J}_e \\ \mathbf{J}_m \end{pmatrix} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n} \times \begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ -\mathbf{E} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Эквивалентные токи (1) можно подставить в известную формулу для расчета гармонического излучения на циклической частоте  $\omega$  (поле зависит от времени  $t$  как  $e^{i\omega t}$ ) через запаздывающие потенциалы [3]:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = -\frac{ik}{c} \oint_S \begin{pmatrix} \mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \mathbf{G}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ -\mathbf{G}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J}_e(\mathbf{r}') \\ \mathbf{J}_m(\mathbf{r}') \end{pmatrix} dS', \quad (2)$$

$$\mathbf{G}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\beta}^{\alpha} = \left( \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{G}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')_{\beta}^{\alpha} = \frac{\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}}{ik} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma}} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

где  $k = \omega / c$  – волновое число;

$c$  – скорость света в вакууме;

$\delta_{\alpha\beta}$  и  $\varepsilon_{\alpha\gamma\beta}$  – символы Кронекера и Леви-Чивиты;

$\mathbf{G}_e$  и  $\mathbf{G}_m$  – тензорные функции Грина;

$G = e^{-ikR} / R$  – скалярная функция Грина;

$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$  – радиус-вектор от точки  $\mathbf{r}'$  с источником электромагнитного поля до точки  $\mathbf{r}$  его расчета.

Формула (2) записана в декартовых координатах, в которых ковариантные и контравариантные тензоры совпадают. По этой причине положение индексов выбрано из удобства записи и выполнения правила суммирования Эйнштейна.

Рассчитанное по формуле (2) электромагнитное излучение эквивалентных токов  $\mathbf{J}_e$  и  $\mathbf{J}_m$  вне объема  $V$  совпадает с электромагнитным излучением реальных токов  $\mathbf{j}_e$  и  $\mathbf{j}_m$ . Внутри объема  $V$  эквивалентные токи  $\mathbf{J}_e$  и  $\mathbf{J}_m$  не излучают, поэтому электромагнитное поле отсутствует и не совпадает с реальным [4].

Стрэттон и Чу получили следующую векторную форму интеграла Кирхгофа [3], для вычисления которой не приходится обращаться к принципу эквивалентности (1):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \begin{pmatrix} \mathbf{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \mathbf{G}_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ -\mathbf{G}_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}') & \mathbf{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}') \end{pmatrix} dS', \quad (3)$$

$$\mathbf{G}_E(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^\alpha_\beta = \left( n'^\alpha \frac{\partial}{\partial x'_\beta} - (\delta_{\alpha\beta} + n'_\beta) \frac{\partial}{\partial x'^\alpha} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

$$\mathbf{G}_H(\mathbf{r}, \mathbf{r}')^\alpha_\beta = ik\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} n'^\gamma G(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Хотя формулы (2) и (3) эквивалентны, подстановка формулы (1) в (2) не приводит к получению формулы (3). Так в формуле (2) все слагаемые содержат компоненту вектора  $\mathbf{n}'$ , а в формуле (3) одно из слагаемых от  $\mathbf{n}'$  не зависит. Имеющиеся отличия могут проявляться на результатах вычислений [8], поэтому представляют интерес.

Формулы (2) и (3) являются векторными формами интеграла Кирхгофа для гармонических электромагнитных полей. Непосредственно интеграл Кирхгофа в случае гармонических полей справедлив для любой функции  $f(\mathbf{r})$ , которая является решением уравнения Гельмгольца [3]:

$$f(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left( \frac{\partial G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} f(\mathbf{r}') + G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \frac{\partial f(\mathbf{r}')}{\partial \mathbf{n}'} \right) dS'. \quad (4)$$

Формулы (2)-(4) строгие, но при этом довольно громоздки и сложные для вычислений. С их помощью электромагнитное поле может быть рассчитано в области от замкнутой поверхности  $S$  до бесконечности, т.е. как в БЗ, так и в ДЗ. При этом каждое дифференцирование скалярной функции Грина  $G$  дает новые слагаемые, которые зависят обратно пропорционально от расстояния  $R$ , возведенного в целые степени больше единицы. Эти слагаемые быстро убывают с расстоянием  $R$ , как и их вклад в интегралы (2)-(4). Если отбросить быстро убывающие слагаемые, то получим следующие асимптотические формулы:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r})^\alpha \\ \pm \mathbf{H}(\mathbf{r})^\alpha \end{pmatrix} = \pm \frac{ik}{c} \oint_S \begin{pmatrix} v^\alpha v_\beta - \delta_\beta^\alpha & \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} v^\gamma \\ -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} v^\gamma & v^\alpha v_\beta - \delta_\beta^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm \mathbf{J}_e(\mathbf{r}')^\beta \\ \mathbf{J}_m(\mathbf{r}')^\beta \end{pmatrix} \frac{e^{\mp ikR}}{R} dS', \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r})^\alpha \\ \pm \mathbf{H}(\mathbf{r})^\alpha \end{pmatrix} = \pm \frac{ik}{4\pi} \oint_S \begin{pmatrix} n'^\alpha v_\beta + (\delta_\alpha^\beta - 1)v^\alpha n'_\beta & -\varepsilon_{\alpha\gamma\beta} n'^\gamma \\ \varepsilon_{\alpha\gamma\beta} n'^\gamma & n'^\alpha v_\beta + (\delta_\alpha^\beta - 1)v^\alpha n'_\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}')^\beta \\ \pm \mathbf{H}(\mathbf{r}')^\beta \end{pmatrix} \frac{e^{\mp ikR}}{R} dS', \quad (6)$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \oint_S \mathbf{n}' \cdot \left( \pm \mathbf{v} f(\mathbf{r}') - \frac{\nabla f(\mathbf{r}')}{ik} \right) \frac{e^{\mp ikR}}{R} dS', \quad (7)$$

где  $\mathbf{v} = \mathbf{R} / R$  – единичный вектор направления от источника электромагнитного поля к точке его расчета.

Формула (5) была получена в работе [18]. В ней верхние знаки соответствуют решению через запаздывающие потенциалы и используются для расчета электромагнитного поля вне объема  $V$  со всеми его источниками. Нижние знаки соответствуют решению через опережающие потенциалы и позволяют рассчитать электромагнитное поле внутри замкнутой поверхности  $S$ . При этом само решение для опережающих потенциалов было получено из решения для запаздывающих потенциалов. Оно удовлетворяет уравнениям Максвелла, но не удовлетворяет граничным условиям. Применение того же подхода к формулам (3) и (4) позволило получить формулы (6) и (7). Формулу (7) для гармонических полей с зависимостью от времени  $e^{-i\omega t}$  также можно найти в работе [12].

Строгие формулы (2)-(4) позволяют рассчитывать электромагнитное поле, начиная с БЗ. Будем считать их нулевым приближением. Асимптотические формулы (5)-(7) также применимы от БЗ до ДЗ, но начиная с некоторого расстояния порядка длины волны  $\lambda$ . Назовем их приближением волновой зоны (ВЗ) излучения. На больших расстояниях скалярную функцию Грина под знаком интегрирования в формулах (5)-(7) можно заменить ее асимптотической формулой. Таким образом, получатся аналогичные асимптотические формулы

в приближениях промежуточной зоны и ДЗ. Поскольку матрица оператора преобразования электромагнитного поля слева от вектора источников останется прежней, отдельно эти формулы не приводятся. Таким образом, зоны электромагнитного излучения располагаются от нижней границы применимости соответствующего приближения до нижней границы применимости следующего приближения.

Теоретическая и экспериментальная апробация полученных результатов проводилась в эксперименте с рупорной антенной, поскольку ее электромагнитное поле с хорошей точностью рассчитывается множеством методов и повторяется другими рупорными антеннами с теми же геометрическими размерами [17]. На рис. 1 приведена схема эксперимента, в котором источником электромагнитного излучения (исследуемой антенной) на частоте 30 ГГц ( $\lambda = 1$  см) является рупорная антенна Пб-132 (1) с размером прямоугольной апертуры  $6,8\lambda \times 5,4\lambda$  ( $x \times y$ ). В центре раскрыва исследуемой антенны находится начало декартовой системы координат  $Oxyz$ . Ось  $Ox$  направлена параллельно большей стороне раскрыва, а ось  $Oy$  – меньшей. Ось  $Oz$  перпендикулярна плоскости апертуры. В эксперименте измерялся коэффициент передачи  $S_{21}$  между исследуемой и зондовой антенной – открытым концом прямоугольного волновода сечением  $0,72\lambda \times 0,34\lambda$  ( $x \times y$ ). В качестве замкнутой поверхности с эквивалентными токами была выбрана сфера (2) радиусом  $r = 12,5\lambda$  с центром в точке  $\{0, 0, -11,5\lambda\}$ .

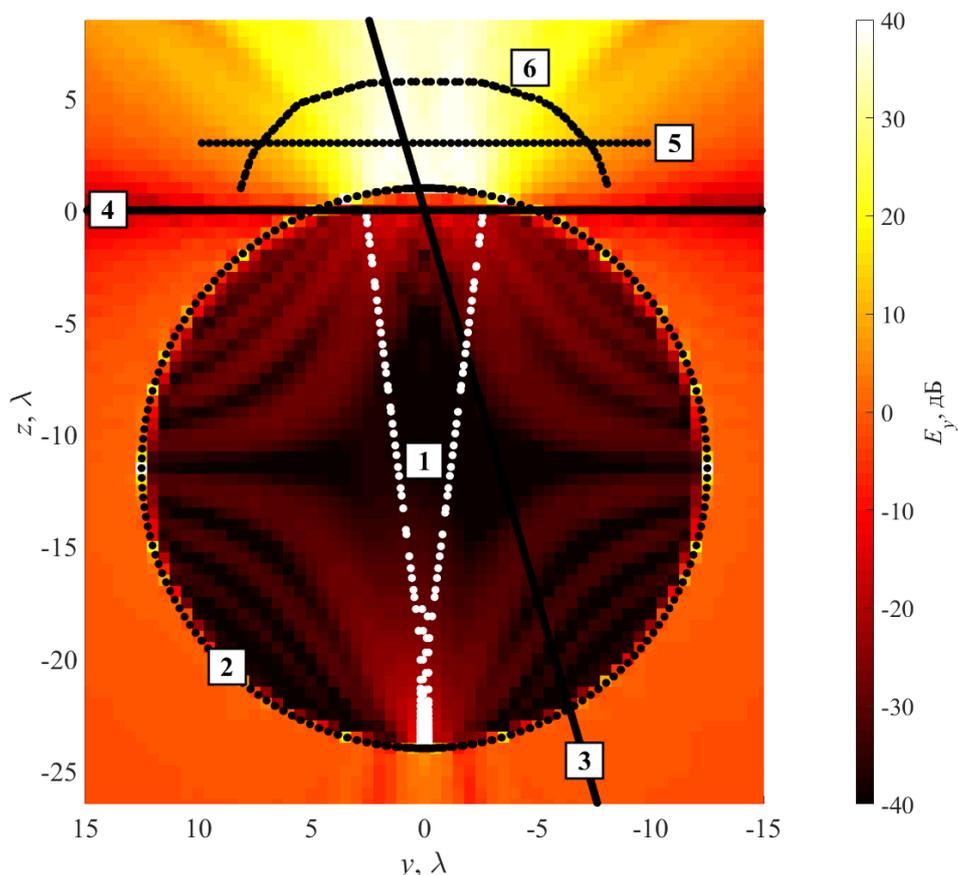


Рис. 1. Схема эксперимента.

На ее поверхности были взяты  $2 + 89 \times 180$  точки  $(\theta \times \varphi)$  в узлах эквидистантной по полярным  $\theta$  и азимутальным  $\varphi$  углам сетки с шагом  $\Delta\theta = \Delta\varphi = 2^\circ$ . Результаты расчетов по формулам (2)-(7) анализировались вдоль прямой (3), проходящей через начало системы координат в направлении  $\theta = 16,1^\circ$  и  $\varphi = 90,0^\circ$ ,  $Oy$ -сечения (4) апертуры и в  $E$ -сечении в ДЗ. Исследование практических условий применения форм интеграла Кирхгофа в теории проводилось для прямоугольной поверхности (5), параллельной плоскости  $Oxy$  с центром в точке  $\{0, 0, 3\lambda\}$ . На ней было взято  $41 \times 60$  точек  $(x \times y)$  в узлах прямоугольной эквидистантной сетки с шагом  $\Delta x = \Delta y = \lambda / 3$ . В эксперименте центр раскрыва зондовой антенны с помощью коллаборативного робота с шестью вращательными степенями свободы помещался в 2442 точки на неканонической поверхности (6) на расстоянии  $6\lambda$  от исследуемой антенны [18]. Сама зондовая антенна всегда была ориентирована одинаково против исследуемой антенны (оси  $Oz$ ). Большая сторона ее раскрыва была параллельна оси  $Ox$ , а меньшая – оси  $Oy$ . При этом, для оценки производной волнового поля

по нормали к поверхности через конечные разности в эксперименте проводились измерения в дополнительных точках, смещенных на расстояние  $0,1\lambda$  вдоль нормали, а в теории – на расстояние  $0,01\lambda$ .

Рассмотрим результаты вычислений ко-поляризованной компоненты  $E_y$  напряженности электрического поля вдоль луча, которые получены путем применения формул (2)-(7) к поверхности сферы с эквивалентными источниками (рис. 1). Поскольку отличия между кривыми были бы очень малы, на рис. 2 приведены результаты вычисления по формуле (2) и отклонения от них результатов вычислений по формулам (3)-(7). Приняв результаты, полученные с помощью формулы (2), за опорное значение, отклонения от них прочих результатов можно интерпретировать как помеху [19], которая эквивалентна части методической ошибки вычислений. Эта часть методической ошибки вычислений по формулам (3)-(7) складывается с методической ошибкой вычисления по формуле (2).

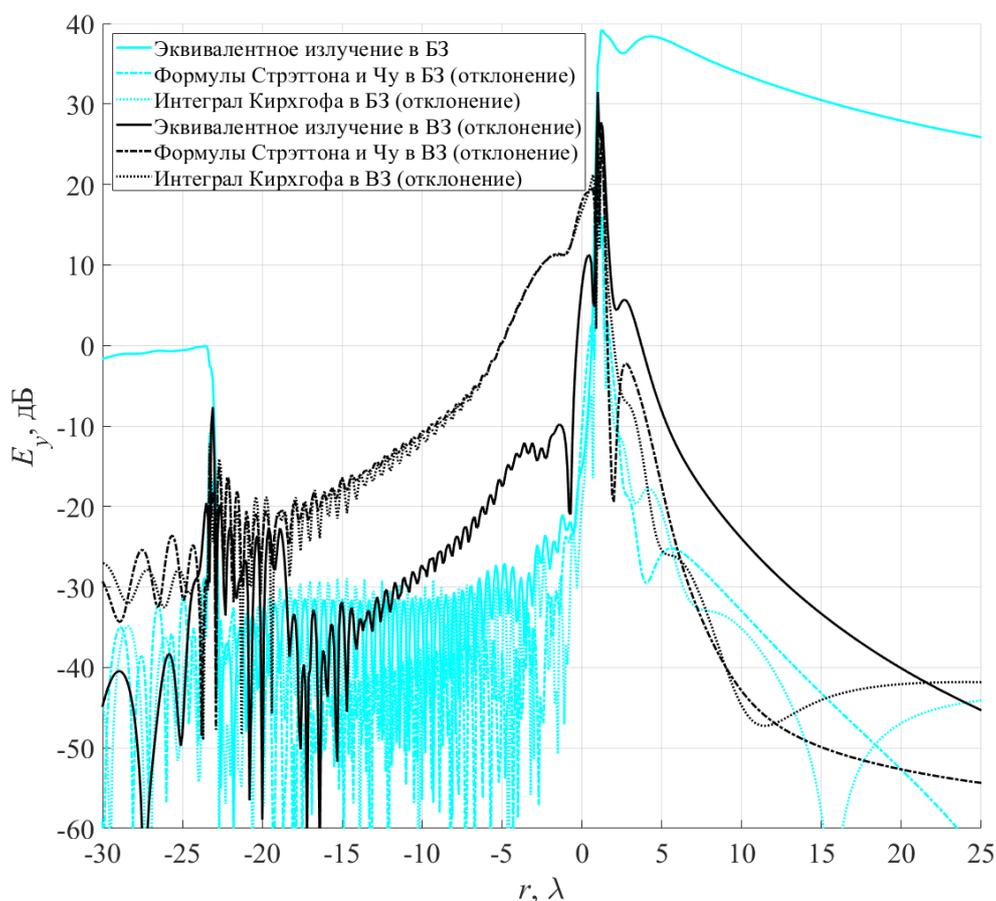


Рис. 2. Расчет поля в луче по разным формулам.

Последнюю можно оценить эквивалентной помехой на уровне  $-60$  дБ по области внутри сферы, где согласно принципу эквивалентности (1) электромагнитное поле должно отсутствовать. Из рис. 2 видно, что в приближении ВЗ формулы Стрэттона и Чу (3) и интеграл Кирхгофа (4) характеризуются методическими ошибками, которые эквивалентны помехе на уровне не выше  $-50$  дБ. Поскольку выбор за опорное значение результатов вычисления по другой формуле дал бы ей такое же преимущество, можно утверждать, что с точки зрения вычислений в приближении ВЗ все три формы интеграла Кирхгофа являются эквивалентными.

Теперь рассмотрим результаты вычислений по формулам (5)-(7). Как и следовало ожидать, соответствующие эквивалентные помехи быстро уменьшаются до расстояния  $2\lambda$ , после чего также продолжают убывать, но уже существенно медленнее. При  $r > 2\lambda$  эквивалентная помеха вычислений по формуле (5) не превышает  $-30$  дБ, а по формулам (6) и (7) –  $-40$  дБ. Полностью методическими ошибками, обусловленными использованием приближения ВЗ, можно пренебречь для формул (6) и (7) при  $r > 10\lambda$ , а для формулы (5) при  $r > 20\lambda$ . При этом из рис. 2 видно, что в приближении ВЗ для принципа эквивалентности (5) эквивалентная помеха в задней полусфере на  $20$  дБ ниже в сравнении с формулами Стрэттона и Чу (6) и интегралом Кирхгофа (7). Таким образом, расчет электромагнитного поля с помощью интеграла Кирхгофа в приближении ВЗ, начиная с расстояния  $r = 2\lambda$ , характеризуется удовлетворительной для практики методической ошибкой, которая эквивалентна помехе на уровне не выше  $-40$  дБ.

### **Приближенные формулы для оценки градиента волнового поля**

Использование формулы (7) в алгоритмах преобразования электромагнитного поля осложнено необходимостью проведения дополнительных расчетов или измерений для вычисления производной волнового поля  $f(\mathbf{r})$  по нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности или градиента  $\nabla f(\mathbf{r})$ . Сделать это можно с помощью следующей конечно-разностной аппроксимации:

$$\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x_\alpha} = \frac{f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{x}_\alpha / 2) - f(\mathbf{r} - \Delta \mathbf{x}_\alpha / 2)}{\Delta x_\alpha}, \quad (8)$$

где  $\Delta \mathbf{x}_\alpha$  – вектор приращения координаты  $\alpha$ .

Предположим, что волновое поле  $f(\mathbf{r})$  в окрестности  $\Delta \mathbf{r}$  точки  $\mathbf{r}$  медленно изменяется по модулю и быстро по фазе  $\Phi(\mathbf{r})$ :

$$f(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) e^{i\Phi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - i\Phi(\mathbf{r})}.$$

Тогда градиент волнового поля  $\nabla f(\mathbf{r})$  можно оценить по следующей формуле:

$$\nabla f(\mathbf{r}) = if(\mathbf{r})\nabla\Phi(\mathbf{r}). \quad (9)$$

По экспериментальным данным формулу (9) можно вычислить через отклонения фазы  $\Phi(\mathbf{r})$  на поверхности между соседними точками, если расстояние между ними не превышает  $\lambda / 2$ . В случае теоретического расчета, такой подход может привести к нежелательным дополнительным методическим ошибкам либо оказаться полностью непригодным ввиду отсутствия хотя бы двух точек на расстоянии  $\lambda / 2$ . В этих случаях для электромагнитного поля можно сделать допущение, что существует общая для всех компонент векторов напряженности электрического  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  и магнитного  $\mathbf{H}(\mathbf{r})$  поля фаза  $\Phi(\mathbf{r})$ , которая в окрестности  $\Delta \mathbf{r}$  точки  $\mathbf{r}$  изменяется как в плоской волне:

$$\Phi(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{r}) - k\mathbf{m}(\mathbf{r}) \cdot \Delta \mathbf{r},$$

где  $\mathbf{m}$  – вектор единичной нормали к фазовому фронту.

Подстановка этой зависимости в одно из уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -ik\mathbf{H}(\mathbf{r}),$$

приводит к следующей оценке:

$$\nabla \begin{pmatrix} E_\alpha(\mathbf{r}) \\ H_\alpha(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = -ik \begin{pmatrix} E_\alpha(\mathbf{r}) \\ H_\alpha(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -E_z(\mathbf{r}) & E_y(\mathbf{r}) \\ E_z(\mathbf{r}) & 0 & -E_x(\mathbf{r}) \\ -E_y(\mathbf{r}) & E_x(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} H_x(\mathbf{r}) \\ H_y(\mathbf{r}) \\ H_z(\mathbf{r}) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Наконец, в отсутствие информации о фазе  $\Phi(\mathbf{r})$  можно предположить, что вектор  $\mathbf{m}(\mathbf{r})$  направлен от фазового центра излучения  $\mathbf{r}_0$  в точку  $\mathbf{r}$ :

$$\mathbf{m}(\mathbf{r}) = (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|.$$

В этом случае градиент волнового поля  $\nabla f(\mathbf{r})$  оценивается по следующей простой формуле [12]:

$$\nabla f(\mathbf{r}) = -ikf(\mathbf{r})(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) / |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|. \quad (11)$$

Рассмотрим результаты вычислений с помощью формул (8)-(11) производной по переменной  $y$  ко-поляризованной компоненты  $E_y$  напряженности электрического поля вдоль луча, которая, в свою очередь, была получена путем применения формулы (2) к поверхности сферы с эквивалентными источниками (рис. 1). По аналогии с рис. 2 на рис. 3 приведены результаты вычисления по формуле (8) и отклонения от них результатов вычислений по формулам (9)-(11). Значения производной  $\partial E_y / \partial y$  на рис. 3 поделены на волновое число  $k$ , чтобы в соответствии с формулой (7) получить величину с размерностью компоненты поля  $E_y$  на рис. 2. Обращает внимание, что на рис. 3 результаты вычисления производной поля по формуле (8) при  $r < 5\lambda$  на 30 дБ ниже уровня самого поля на рис. 2.

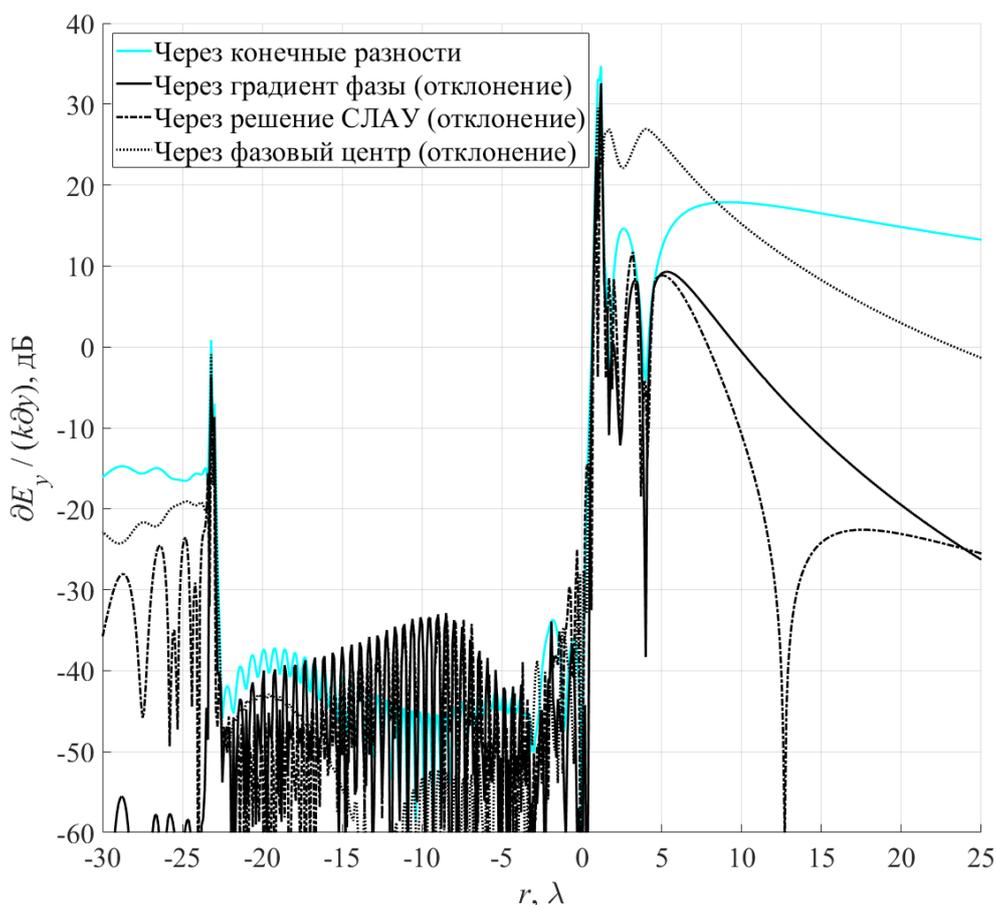


Рис. 3. Расчет производной поля в луче по разным формулам.

Однако, это никак не влияет на оценки методических ошибок, даже если уровень их эквивалентных помех сравним с уровнем производной поля. Так методическая ошибка вычисления производной по формуле (9) эквивалентна помехе на уровне не выше  $-30$  дБ при  $r > 2\lambda$ . Формула (10) характеризуется методической ошибкой с эквивалентной помехой до  $10$  дБ ниже в сравнении с формулой (9) при  $r < 5\lambda$ , однако сверху она ограничивается тем же значением  $-30$  дБ. При вычислении формулы (11) за фазовый центр излучения было принято начало системы координат на рис. 1. С одной стороны, это привело к значительному уровню эквивалентной помехи  $-15$  дБ. С другой стороны, в эксперименте фазовый центр не является априори известным и подлежит измерению.

Таким образом, оценки градиента волнового поля по формуле (9), начиная с расстояния  $r = 2\lambda$ , характеризуются несколько большей в сравнении с результатами вычисления самого поля методической ошибкой, которая эквивалентна помехе на уровне не выше  $-30$  дБ. Однако, после их подстановки

в формулу (7) и вычисления интеграла можно ожидать, что суммарная методическая ошибка вычислений или погрешность измерений будет характеризоваться меньшим уровнем эквивалентной помехи.

### **Практическая апробация метода вычисления интеграла Кирхгофа**

Выше было показано, что интеграл Кирхгофа в приближении ВЗ (7) вычисляется с достаточной для практики точностью на расстояниях больше  $2\lambda$  от замкнутой поверхности, которая охватывает все источники волнового поля. Начиная с этого же расстояния, формула (9) дает удовлетворительные оценки градиента волнового поля. При этом выполнялись все прочие условия для применения форм интеграла Кирхгофа, в частности, поверхность была замкнутой. На практике в теоретических расчетах и, особенно, в экспериментальных измерениях поверхность не является замкнутой. Подразумевается, что если уровень поля падает на ее границе на 40 дБ и более, то интегралом по неучтенной части замкнутой поверхности можно пренебречь.

Рассмотрим результаты вычислений ко-поляризованной компоненты  $E_y$  напряженности электрического поля вдоль луча, которые получены путем применения формулы (7) к прямоугольной поверхности на рис. 1 с подстановкой разных оценок градиента поля  $\nabla E_y$  по формулам (8), (9) и (11). При этом значения поля  $E_y$  на прямоугольной поверхности были вычислены с помощью формулы (2) по эквивалентным источникам на поверхности сферы. На рис. 4 приведены результаты вычисления по формуле (7) с подстановкой оценки (8) и их отклонение от результатов вычисления по формуле (2) с поверхности сферы. Видно, что эквивалентная помеха для соответствующей методической ошибки не превышает уровень  $-50$  дБ при  $r > 4\lambda$ . Отклонение результатов вычислений по формуле (7) с подстановкой прочих оценок градиента поля рассчитано относительно подстановки оценки (8). Таким образом, дополнительные методические ошибки оказываются различимы на фоне много большего значения суммарной ошибки.

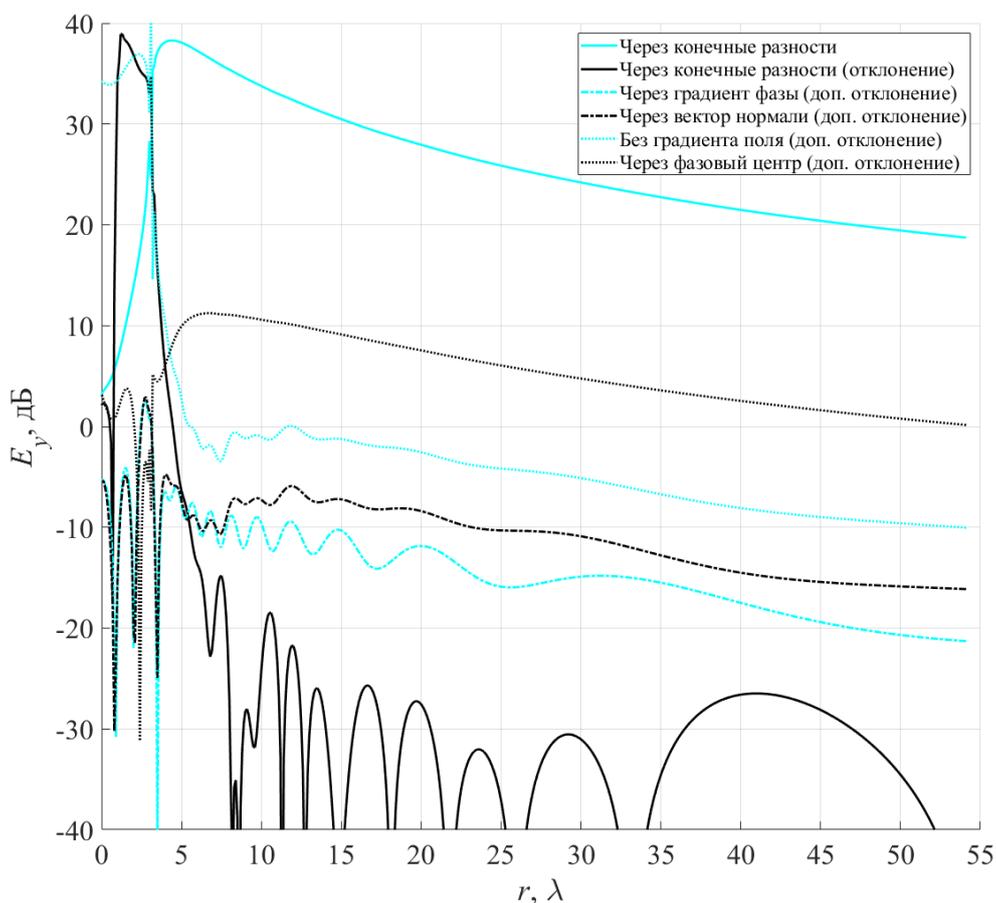


Рис. 4. Расчет поля в луче по прямоугольной поверхности.

Так оценка (9) при  $r > 2\lambda$  характеризуется эквивалентной помехой на уровне не выше  $-40$  дБ. На практике иногда делают предположение, что градиент фазы направлен по нормали к поверхности [20]. В этом случае уровень эквивалентной помехи не превысил  $-35$  дБ при  $r > 2\lambda$ . В других случаях [21] предлагается вовсе отбросить производную поля в формуле (4). В рассматриваемом случае это привело к увеличению эквивалентной помехи до уровня  $-30$  дБ при тех же  $r > 2\lambda$ . Наконец, подстановка в формулу (7) оценки (11) привела к эквивалентной помехе с уровнем не выше  $-20$  дБ.

Все приведенные выше теоретические расчеты были повторены для измеренных в эксперименте значений коэффициента передачи  $S_{21}$  на неканонической поверхности (рис. 1). В первом приближении будем считать, что коэффициент передачи  $S_{21}$  пропорционален ко-поляризованной компоненте  $E_y$  напряженности электрического поля, а влиянием диаграммы направленности зондовой антенны на результаты измерений можно пренебречь. На рис. 5 приведены результаты вычисления поля  $S_{21}$  по формуле (7)

с подстановкой оценки (8) и их отклонение от результатов вычисления поля  $E_y$  по формуле (2) с поверхности сферы. Поскольку за опорное значение принят результат теоретического расчета, оцененная таким образом погрешность измерений, включает существенную дополнительную составляющую, которая обусловлена несовпадением истинных координат в эксперименте с использованными в расчете. По мере увеличения расстояния, доля этой составляющей в суммарной погрешности измерений убывает. Так уровень эквивалентной помехи уменьшается с  $-20$  дБ при  $r = 3\lambda$  до  $-40$  дБ при  $r = 50\lambda$ . Подстановка оценки (9) в формулу (7) вносит дополнительную методическую погрешность с уровнем эквивалентной помехи не выше  $-30$  дБ.

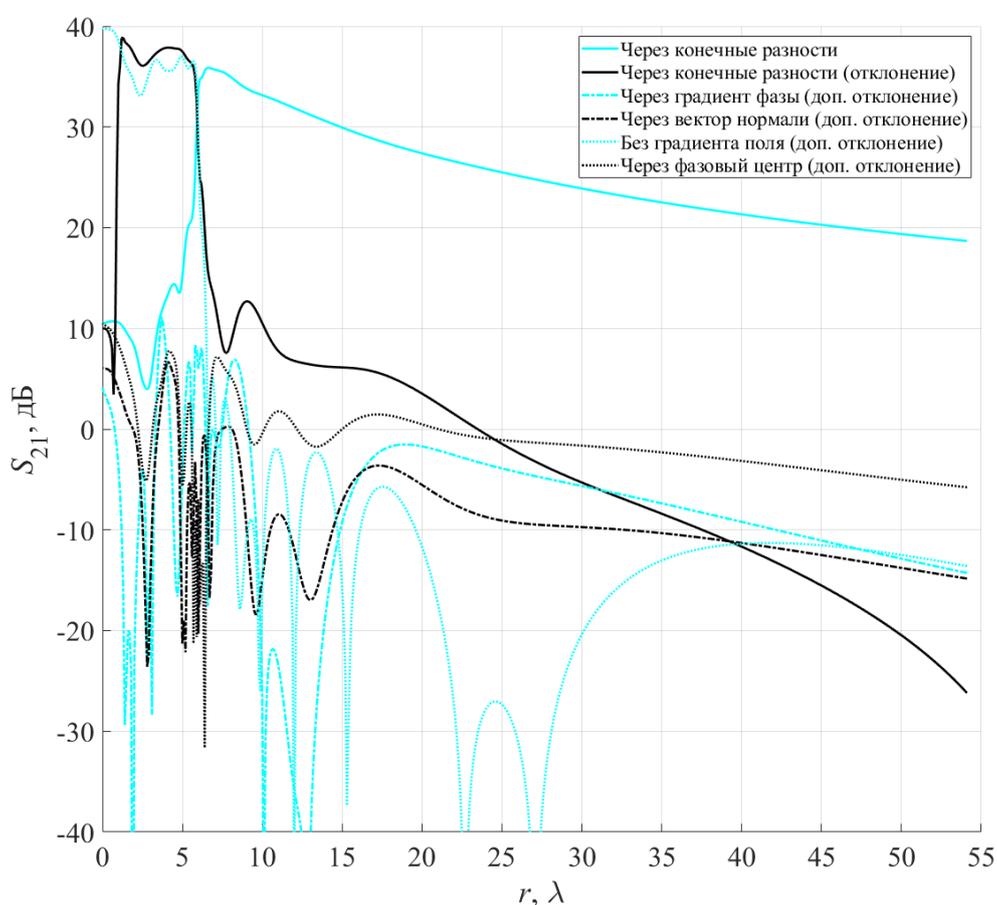


Рис. 5. Измерение поля в луче по неканонической поверхности.

Замена градиента фазы на нормаль в этом случае позволила получить дополнительную эквивалентную помеху с уровнем не выше  $-35$  дБ. Связано это с тем, что при увеличении расстояния, построенные по алгоритму из работы [18] неканонические поверхности, приближаются к сфере. В этих условиях ошибки

вычисления направления градиента фазы оказываются больше его отклонения от нормали к поверхности сферы. Также примечательно, что отбрасывание градиента волнового поля в формуле (7) в случае рассматриваемой неканонической поверхности дало ту же дополнительную эквивалентную помеху с уровнем не выше  $-35$  дБ. Наконец, подстановка оценки (11) в формулу (7) привела к дополнительной эквивалентной помехе с уровнем не выше  $-25$  дБ.

Теперь рассмотрим результаты вычислений коэффициента направленного действия (КНД), которые, наверное, представляют наибольший практический интерес. На рис. 6 приведены результаты теоретических расчетов в  $E$ -сечении, которые были получены с помощью интеграла Кирхгофа в приближении ДЗ на прямоугольной поверхности (рис. 1). Методическая ошибка вычисления КНД с оценкой производной поля по формуле (8) характеризуется эквивалентной помехой с уровнем не выше  $-40$  дБ при  $\theta < 60^\circ$ . Оценки градиента поля по формуле (9) несущественно увеличили суммарную методическую ошибку вычисления КНД. Замена направления градиента поля на нормаль к поверхности привела к значительному увеличению эквивалентной помехи до уровня  $-30$  дБ при  $\theta < 60^\circ$ . Отбрасывание производной поля в интеграле Кирхгофа увеличило эквивалентную помеху до уровня  $-25$  дБ при  $\theta < 50^\circ$ . Наконец, наихудший результат был получен с оценкой градиента поля по формуле (11). Суммарная методическая ошибка вычисления КНД оказалась эквивалентна помехе на уровне  $-20$  дБ.

Результаты вычислений КНД с неканонической поверхности в эксперименте приведены на рис. 7. В отличие от луча в БЗ (рис. 1), расчетные точки в ДЗ можно вращать, добиваясь попадания главного лепестка в  $\theta = 0^\circ$ , а первых боковых лепестков в  $E$ -сечение ( $\varphi = 90^\circ$ ).

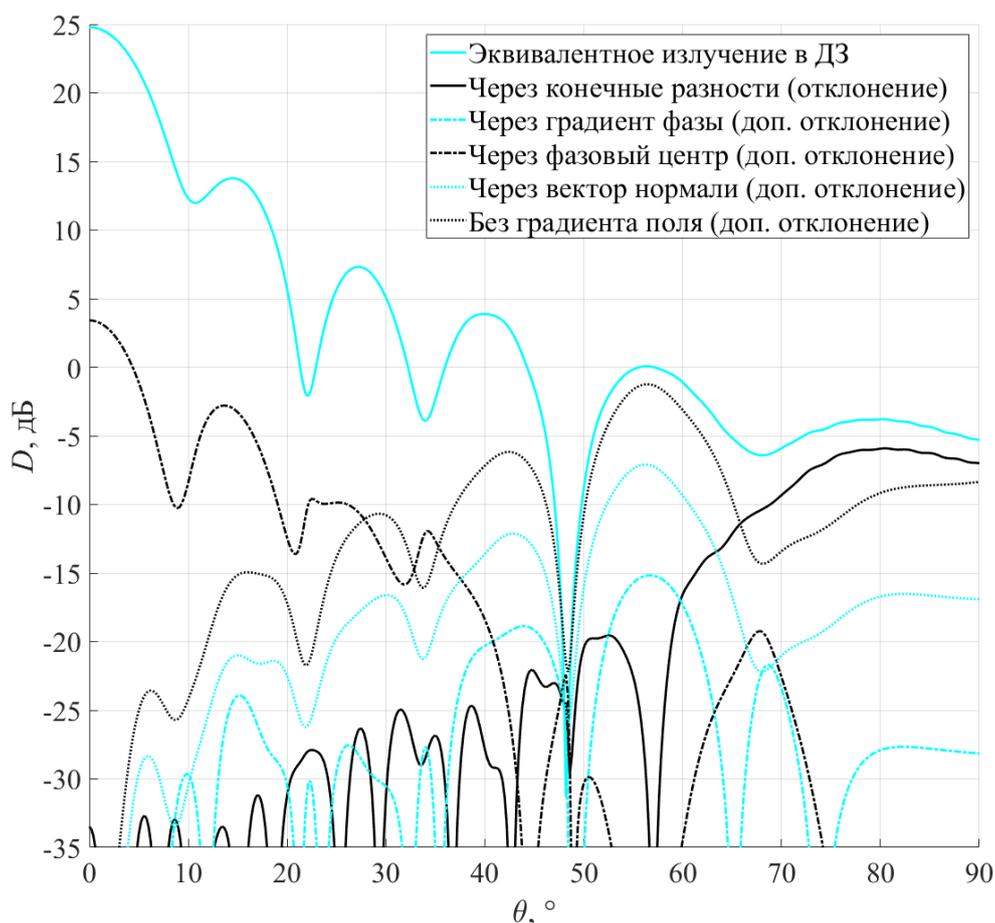


Рис. 6. Расчет КНД в  $E$ -сечении по прямоугольной поверхности.

Близость неканонической поверхности к сфере обеспечила несущественную зависимость методической погрешности измерений от способа оценки градиента волнового поля. Для всех случаев суммарная погрешность измерений КНД эквивалентна помехе с уровнем не выше  $-30$  дБ при  $\theta < 70^\circ$ .

В качестве примера решения задачи диагностики антенн рассмотрим результаты вычислений ко-поляризованной компоненты  $E_y$  напряженности электрического поля в  $Oy$ -сечении апертуры, которые получены путем применения формулы (7) с нижними знаками к прямоугольной поверхности на рис. 1 с подстановкой разных оценок градиента поля  $\nabla E_y$ . При этом значения поля  $E_y$  на прямоугольной поверхности были вычислены с помощью формулы (2) по эквивалентным источникам на поверхности сферы.

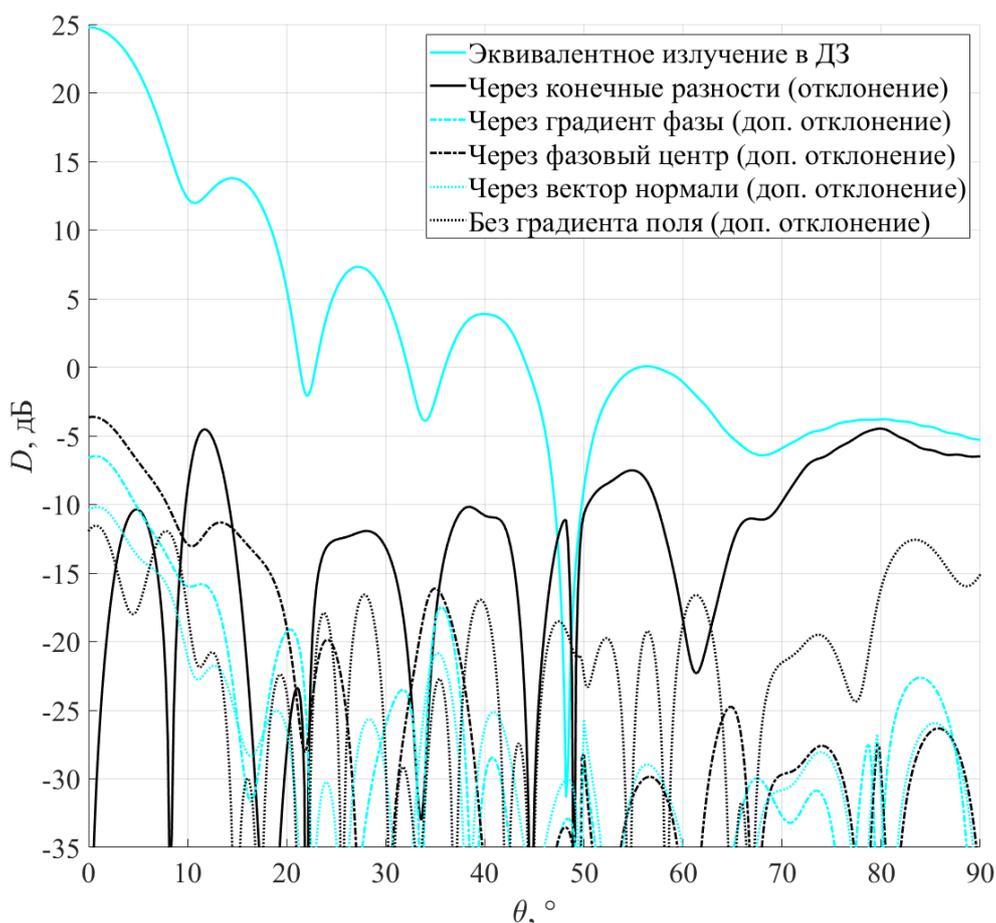


Рис. 7. Измерение КНД в  $E$ -сечении по неканонической поверхности.

На рис. 8 приведены результаты вычисления по формуле (7) с подстановкой оценки (8) и их отклонение от результатов электродинамического моделирования методом интегральных уравнений [1]. Сразу бросается в глаза пик при  $2,5\lambda < y < 3,0\lambda$ , который соответствует пересечению с металлической стенкой рупорной антенны. В реальности и в электродинамической модели в этой области существуют отличные от нуля электрические токи. Вычисления по формулам (5)-(7) с нижними знаками дают удовлетворительные результаты только в области без источников электромагнитного поля. В ней суммарная методическая ошибка для оценки (8) эквивалентна помехе с уровнем не выше  $-30$  дБ. Оценки градиента поля по формуле (9) или по нормали к поверхности несущественно изменяют суммарную методическую ошибку. Оценки градиента поля по формуле (11) или его отбрасывание в формуле (7) увеличивают эквивалентную помеху до уровня не выше  $-20$  дБ.

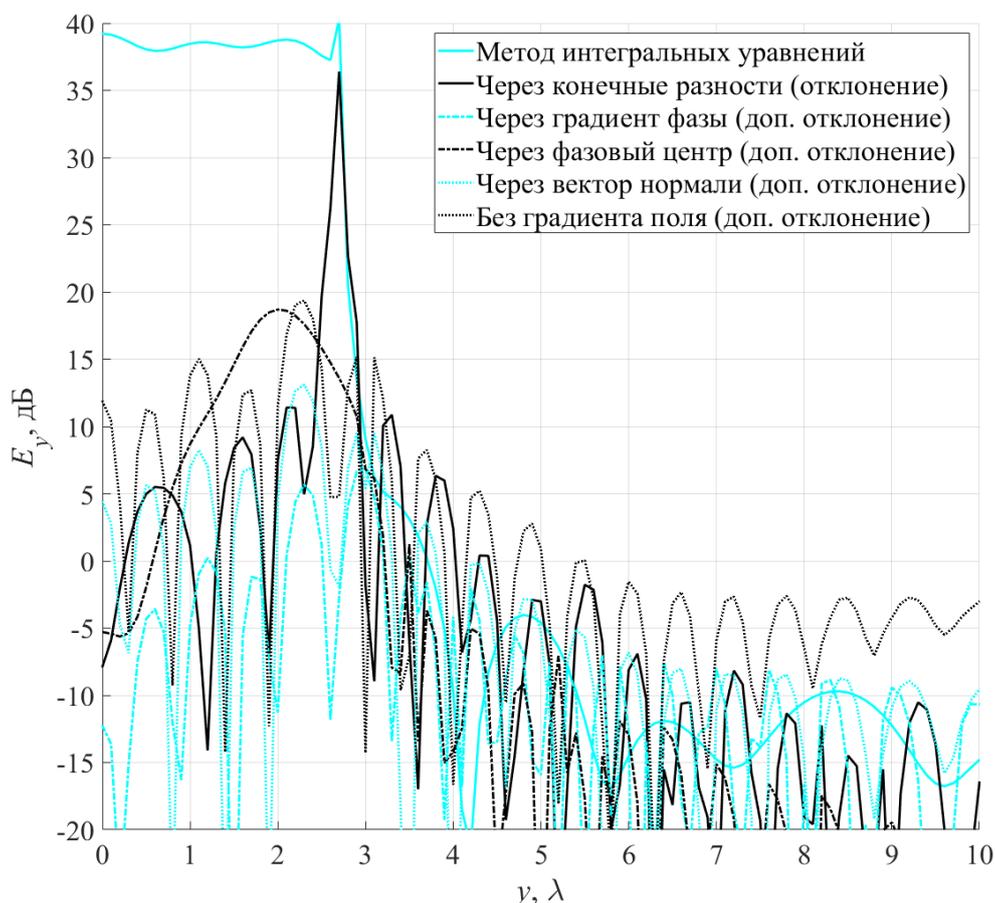


Рис. 8. Расчет поля на оси  $Oy$  по прямоугольной поверхности.

Приведенные выше вычисления были повторены для измеренного в эксперименте на неканонической поверхности коэффициента передачи  $S_{21}$ . Как и при измерениях КНД, на рис. 9 для всех случаев суммарная погрешность оказалась эквивалентна помехе с уровнем не выше  $-30$  дБ.

### Оценки вычислительной сложности алгоритмов

Проведенная теоретическая и экспериментальная апробация методов приближенного вычисления интеграла Кирхгофа показала, что разработанные на его основе алгоритмы преобразования электромагнитного поля характеризуются достаточной для практики методической ошибкой вычислений с уровнем эквивалентной помехи не выше  $-40$  дБ. Основное преимущество таких алгоритмов будет заключаться в существенно меньшей вычислительной сложности.

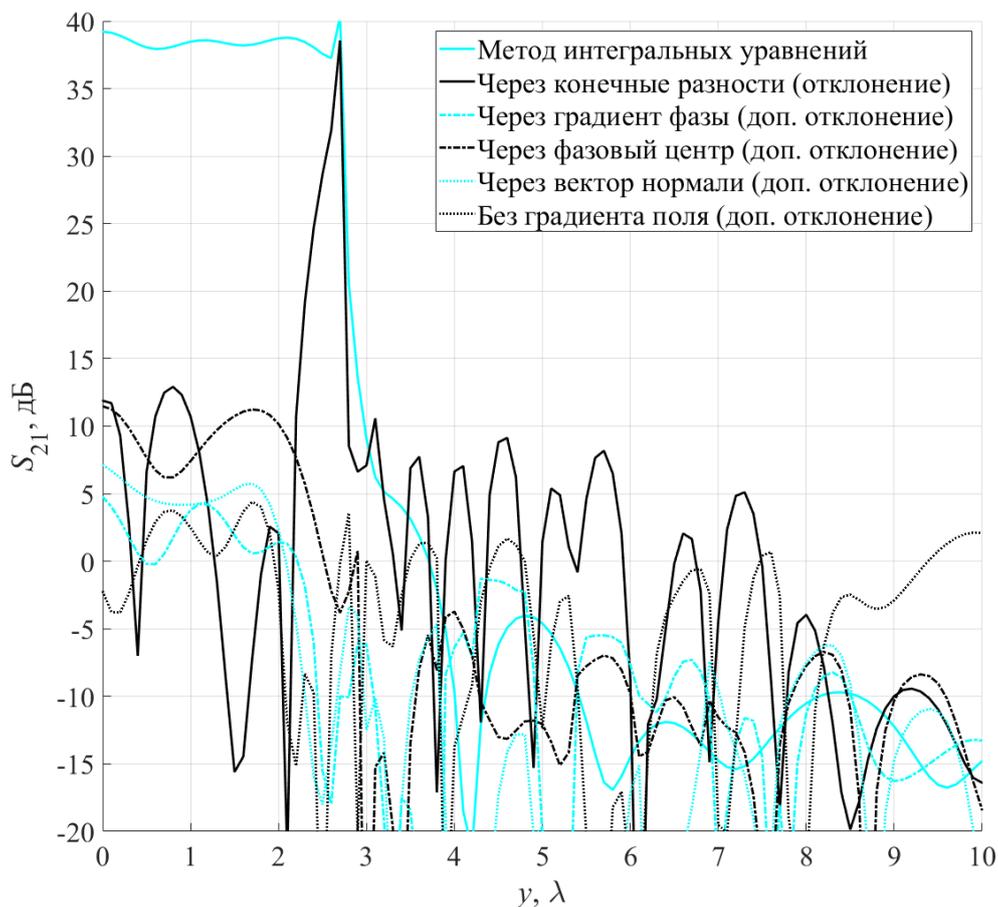


Рис. 9. Измерение поля на оси  $Oy$  по неканонической поверхности.

Алгоритмы преобразования электромагнитного поля на основе форм интеграла Кирхгофа были реализованы на языке Matlab в программе для расчета излученных и рассеянных электромагнитных полей. Формулы (2)-(7) в алгоритмах вызываются в виде отдельных функций, которые пользователь может выбирать в программе. Вычислительная сложность алгоритмов на основе форм интеграла Кирхгофа оценивается как  $O(MN)$ , где  $M$  – число точек, в которых электромагнитное поле вычисляется, а  $N$  – число точек с источниками. Поскольку Matlab интерпретируемый язык программирования, вычисление с его помощью сумм в циклах путем перебора  $M$  расчетных точек и  $N$  точек с источниками поля занимает на порядок больше времени в сравнении с компилируемыми языками (Fortran, C). Однако операции с матрицами и массивами в Matlab используют библиотеки BLAS и LAPACK, благодаря чему разница с компилируемыми языками программирования становится уже не такой значительной. При разработке функций, которые вычисляют поле по формулам (2)-(7), сначала был реализован алгоритм с вычислениями

в циклах, а потом с вычислениями в массивах. Их сравнение позволяет лучше продемонстрировать эффект от использования именно интеграла Кирхгофа, а не реализации конкретного алгоритма.

Проведем дополнительные к  $O(MN)$  оценки вычислительной сложности, посчитав число операций сложения и умножения под знаком интеграла в формулах (2)-(7). Начать удобнее с формул (5)-(7) в приближения ВЗ. Под знаком интеграла в них остается матрица оператора преобразования электромагнитного поля, которая умножается на вектор источников, скалярную функцию Грина  $G$  и площадь  $dS'$ , приписываемую каждой точке. Вектор источников можно сразу умножить на площади  $dS'$  и хранить в таком виде в памяти электронной вычислительной машины (ЭВМ). Заметим, что для формулы (7) в памяти ЭВМ можно хранить значения поля  $f$  и его производной по нормали  $\partial f / \partial n'$ , умноженные на площади  $dS'$ . Вычисление скалярной функции Грина  $G$  требует операций извлечения корня и возведения в комплексную степень. Оценить их в операциях сложения и умножения затруднительно. При вычислении каждой из формул (2)-(7) это даст одну и ту же постоянную прибавку к вычислительной сложности.

Теперь перейдем к анализу матриц операторов преобразования электромагнитного поля, которые умножаются на векторы источников. В формуле (7) для вычисления производной скалярной функции Грина по нормали к поверхности  $\partial G / \partial n'$  требуется 2 сложения и 3 умножения. Затем для вычисления всех трех компонент напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  эта производная 3 раза умножается на значения поля  $f$  и 3 раза складывается с производной поля по нормали  $\partial f / \partial n'$ .

В формуле (5) вычисление матрицы оператора преобразования электромагнитного поля начинается с вычисления симметричной матрицы  $v^\alpha v_\beta$  размером  $3 \times 3$  с помощью 6 операций умножения. Далее из элементов на главной диагонали вычитаются единицы – еще 3 операции сложения. Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  получается из умножения матрицы размером  $3 \times 6$  на вектор  $6 \times 1$  – всего 15 сложений и 18 умножений.

Формула (6) вычисляется по аналогии с формулой (5). Сначала вычисление симметричной матрицы  $n^{\alpha}v_{\beta}$  размером  $3 \times 3$  требует 6 операций умножения. Затем вычисляется скалярное произведение  $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}$  с помощью 2 операций сложения. После этого элементы матрицы  $n^{\alpha}v_{\beta}$  складываются по разу, а к главной диагонали прибавляется скалярное произведение  $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{v}$  – 12 операций сложения. Умножение матрицы преобразования электромагнитного поля на вектор источников требует те же 15 сложений и 18 умножений.

При вычислении формул (2)-(4) вместо общего множителя  $ik$  после дифференцирования под знаком интеграла возникают множители  $-(ik + 1 / R)$ . В самом простом случае в формулах (3) и (4) добавляется по одной операции сложения и умножения. Векторная функция Грина  $\mathbf{G}_e$  содержит вторую производную, поэтому при вычислении формулы (2) в сравнении с формулой (5) добавляется 3 сложения и 6 умножений. Все сделанные оценки числа операций сложения и умножения при умножении матрицы оператора преобразования электромагнитного поля на вектор источников приведены в таблице.

Время вычисления всех трех компонент напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в  $M = 2442$  точках на неканонической поверхности по источникам электромагнитного поля в  $N = 2460$  точках на прямоугольной поверхности (рис. 1) было измерено на ЭВМ с 8 ядерным процессором (AMD Ryzen 7 5800X) с тактовой частотой 3,8 ГГц (до 4,7 ГГц при нагрузке на одно ядро).

Таблица. Сравнение вычислительной сложности алгоритмов в Matlab.

Номер формулы	Число операций			Время выполнения, с	
	сложения	умножения	всего	циклы	массивы
(2)	21	30	100 %	574 (100 %)	10,6 (100 %)
(3)	30	25	119 %	592 (103 %)	15,7 (148 %)
(4)	6	7	6,67 %	27,3 (4,75 %)	0,837 (7,90 %)
(5)	18	24	68,6 %	579 (101 %)	9,16 (86,4 %)
(6)	29	24	110 %	588 (102 %)	14,2 (134 %)
(7)	5	6	4,76 %	26,9 (4,69 %)	0,530 (5,00 %)

Алгоритмы с вычислениями в циклах нагружали одно ядро процессора, а с вычислениями в массивах – все ядра. За опорное значение в таблице взяты результаты вычисления по формуле (2). Соотношения между вычислительной

сложностью алгоритмов по числу операций сложения и умножения дают нижнюю оценку без учета вычисления скалярной функции Грина  $G$ . Из таблицы видно, что время выполнения алгоритмов с вычислением в массивах этих оценок не достигает, но при этом качественно с ними согласуется. Время выполнения алгоритмов с операциями в циклах на порядок больше даже с учетом числа нагруженных ядер процессора ЭВМ. Для принципа эквивалентности и формул Стрэттона и Чу отличия по времени в пределах погрешности измерений. Для тех же алгоритмов с вычислениями в циклах в случае интеграла Кирхгофа выигрыш по времени больше 20 раз вне зависимости от выбора формулы (4) или (7). Для алгоритмов с вычислениями в массивах переход к формуле (7) дал выигрыш по времени в 1,6 раза в сравнении с формулой (4) и в 20 раз в сравнении с формулой (2).

## **Заключение**

Метод приближенного вычисления интеграла Кирхгофа в сравнении с широко распространенным принципом эквивалентности позволяет уменьшить вычислительную сложность алгоритмов преобразования электромагнитного поля до 20 раз. При этом вносятся дополнительные методические ошибки вычислений, которые в характерных для практики условиях разбиения поверхности увеличивают эквивалентную помеху до  $-40$  дБ. В некоторых теоретических расчетах, например, при оценке уровня кросс-поляризации электромагнитных волн в радиоколлиматорах, такое значение методической ошибки вычислений может являться неприемлемым. В остальных случаях, например, при расчете диаграммы обратного рассеяния электромагнитной волны отражателем с большими электрическими размерами, разработанный метод позволяет значительно уменьшить время вычислений. Разработанные на его основе алгоритмы преобразования электромагнитного поля могут оказаться особенно актуальными для асимптотических методов вычислительной электродинамики, которые изначально характеризуются значительными методическими ошибками.

Для измерений характеристик излучения антенн и рассеяния объектов на практике широко используются алгоритмы преобразования электромагнитного поля, которые основаны на модальном разложении в спектр плоских, цилиндрических или сферических векторных волн. Безусловно, такие узкоспециализированные алгоритмы способны обеспечить меньшую погрешность измерений в сравнении алгоритмами на основе разработанного метода приближенного вычисления интеграла Кирхгофа. Однако, последний становится актуальным с ростом частоты излучения, поскольку при расчете коэффициентов модального разложения корректно не учитываются отклонения зондовой антенны от канонических поверхностей: части плоскости, цилиндра или сферы.

Еще одним преимуществом метода приближенного вычисления интеграла Кирхгофа является простота его программирования. Интегрирование суммы из двух скалярных произведений векторов, которая умножена на значение волнового поля и скалярную функцию Грина, не требует много времени и знаний. При этом один разработанный код может применяться для всех замкнутых поверхностей или их частей, в том числе канонических.

Наконец, метод приближенного вычисления интеграла Кирхгофа позволяет на практике при необходимости ограничиваться измерением единственной известной компоненты векторов электромагнитного поля. Подобной гибкостью не обладают даже методы разложения в спектр векторных волн на канонических поверхностях.

## Литература

1. Гринев А.Ю. Численные методы решения прикладных задач электродинамики. Радиотехника. – 2012.
2. Цейтлин Н.М. Методы измерения характеристик антенн СВЧ. М.: Радио и связь. – 1985.

3. Потехин А.И. Некоторые задачи дифракции электромагнитных волн. М.: Сов. радио. – 1948.
4. Love A. E. H. I. The integration of the equations of propagation of electric waves // Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical or Physical Character. – 1901. – Т. 197. – №. 287-299. – С. 1-45. (<https://doi.org/10.1098/rsta.1901.0013>)
5. Stratton J. A., Chu L. J. Diffraction theory of electromagnetic waves // Physical review. – 1939. – Т. 56. – №. 1. – С. 99. (<https://doi.org/10.1103/PhysRev.56.99>)
6. Sun Q., Klaseboer E., Chan D. Y. C. Robust multiscale field-only formulation of electromagnetic scattering // Physical Review B. – 2017. – Т. 95. – №. 4. – С. 045137. (<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.95.045137>)
7. Анютин Н.В., Курбатов К.И., Малай И.М., Озеров М.А. Алгоритм преобразования электромагнитного поля, измеренного в ближней зоне антенны на сферической поверхности, в дальнюю зону, основанный на прямом вычислении формул Стрэттона и Чу // Изв. Вузов. Радиоэлектроника. – 2019. – Т. 62. – №. 3. – С. 136-146. (<https://doi.org/10.20535/S0021347019030026>)
8. Anyutin N., Malay I., Malyshev A. Advantage of Stratton and Chu Formulas for Electromagnetic Field Reconstruction // 2019 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves (RSEMW). – IEEE, 2019. – С. 293-296.
9. Yang X. New far-field extrapolation method for the computation of electric fields // Optica Applicata. – 2021. – Т. 51. – №. 3. – С. 321-333.
10. Жуков В.П., Федорук М.П. Высокоэффективный метод вычисления интеграла Стрэттона-Чу в задачах взаимодействия лазерного излучения с веществом // Вычислительные технологии. – 2021. – Т. 26. – №. 3. – С. 42-60. (<https://doi.org/10.25743/ICT.2021.26.3.004>)
11. Балабуха Н.П., Коняев Д.А., Шапкина Н.Е. Математическое моделирование двухпозиционной ЭПР объектов на основе электромагнитного поля в ближней зоне // ВМУ. Серия 3. Физика. Астрономия. – 2022. – Т. 77. – №. 3. – С. 3-13. (<https://doi.org/10.3103/S0027134922030055>)

12. Zolotarev M. S. McDonald K. T. Time-Reversed Diffraction // arXiv preprint physics/0003058. – 2000.
13. Chan D. Y. C. et al. Efficient field-only surface integral equations for electromagnetics // arXiv preprint arXiv:1901.01602. – 2019. (<https://doi.org/10.48550/arXiv.1901.01602>)
14. Анютин Н.В. Метод приближенного вычисления интеграла Кирхгофа // Труды всероссийской конференции РЭУС-ИТ – 2023. – 2023. – С. 17-22.
15. Ramahi O. M. Near- and far-field calculations in FDTD simulations using Kirchhoff surface integral representation // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1997. – Т. 45. – №. 5. – С. 753-759. (<https://doi.org/10.1109/8.575616>)
16. Lai L. W. et al. Near-field to far-field transformation with non-contacting near-field measurement by using Kirchhoff surface integral representation // Microwave Conference (APMC), 2015 Asia-Pacific. – IEEE, 2015. – Т. 1. – С. 1-3. (<https://doi.org/10.1109/APMC.2015.7411688>)
17. Eibert T. F. et al. Electromagnetic field transformations for measurements and simulations // Progress In Electromagnetics Research. – 2015. – Т. 151. – С. 127-150. (<https://doi.org/10.2528/PIER14121105>)
18. Анютин Н.В. Преобразование электромагнитного поля с описанной вокруг антенны замкнутой поверхности на апертуру антенны // Измерительная техника. – 2021. – №. 1. – С. 48-55. (<https://doi.org/10.32446/0368-1025it.2021-1-48-55>)
19. Newell A. C., Hindman G. E. Antenna pattern comparison using pattern subtraction and statistical analysis // Proceedings of the 5th European Conference on Antennas and Propagation (EUCAP). – IEEE, 2011. – С. 2537-2540.
20. Бахрах Л.Д., Колосов Ю.А., Курочкин А.П. Определение поля антенны в дальней зоне через значения поля в ближней зоне // Антенны. – 1976. – №. 24. – С. 3-14.

21. Кривошеев Ю.В., Шишлов А.В. Развитие метода восстановления диаграмм направленности антенн по измерениям в зоне Френеля // Радиотехника. – 2012. – №. 11. – С. 47-53.

**Для цитирования:**

Анютин Н.В. Метод приближенного вычисления интеграла Кирхгофа. // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.4.7>