

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.4.8>

УДК: 621.3.095; 537.874

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ
ИДЕАЛЬНО ПРОВОДЯЩИМ ТРЕУГОЛЬНИКОМ
В ПРИБЛИЖЕНИИ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ**

А.М. Лебедев ¹, И.С. Суюндуков ^{1,2}

¹ Институт теоретической и прикладной электродинамики РАН,
125412, г. Москва, ул. Ижорская, д. 13

² Московский физико-технический институт (национальный исследовательский
университет), 141701, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9

Статья поступила в редакцию 12 марта 2026 г.

Аннотация. В приближении физической оптики получено аналитическое решение нестационарной задачи двухпозиционного рассеяния треугольником на поверхности металлического объекта при произвольной зависимости поля падающей волны от времени. Решение представляет набор выражений для рассеянного поля в дальней зоне 1) для случая рассеяния в направлении зеркального отражения луча, в теневом направлении и в малых угловых окрестностях этих направлений (максимумы интенсивности рассеяния первого порядка), 2) в направлении, принадлежащем конусу дифракционных лучей вокруг одной из сторон треугольника, и в малой угловой окрестности этого направления (максимум интенсивности рассеяния второго порядка), 3) в общем случае рассеяния вне указанных выше направлений максимумов интенсивности рассеяния. На этой основе разработана процедура расчёта нестационарного поля рассеяния, создаваемого в дальней зоне металлическим треугольником. Определено и протестировано оптимальное условие перехода между

вычислениями по общей и частным формулам. Точность расчётов во временной области с помощью разработанной процедуры была продемонстрирована сравнением полей рассеяния для монохроматической задачи и для нестационарной задачи, когда треугольник рассеивает в установившемся режиме при его облучении достаточно длительным радиоимпульсом, имеющим прямоугольную огибающую и высокочастотное заполнение. В отличие от монохроматической задачи, для которой амплитуда поля рассеяния характеризуется единственным комплексным числом, зависимость от времени для поля, рассеиваемого треугольником, в общем случае состоит из пяти интервалов осцилляций. Интервалы соответствуют начальной, средней и конечной части временной зависимости поля в точке наблюдения. Они связаны с расширением части треугольника, участвующей в формировании рассеянного поля, начиная с бесконечно малой окрестности некоторой вершины до полного охвата поверхности треугольника, далее с рассеянием в установившемся режиме и, наконец, с сокращением части треугольника, вносящей вклад в рассеянное поле, до нуля начиная с сокращения на бесконечно малую окрестность той же вершины. При переходе между интервалами рассеянное поле меняется непрерывно, но амплитуда, фаза и постоянная составляющая осцилляций меняются скачком. Характер эволюции во времени поля, рассеянного треугольником, говорит о преобладающей роли окрестностей его вершин в формировании временного отклика. Разработанную процедуру можно рассматривать как базовую составляющую программы комбинированного численного решения задачи рассеяния сложным объектом во временной области, когда рассеяние одной частью объекта определяется в приближении физической оптики, другой – в строгой численной постановке.

Ключевые слова: треугольник на поверхности металлического объекта, нестационарное поле, двухпозиционное рассеяние, приближение физической оптики, радиоимпульс.

Автор для переписки: Лебедев Андрей Михайлович, lebedev_am@mail.ru

Введение

Численное решение монохроматической задачи двухпозиционного рассеяния на металлическом объекте в приближении физической оптики при триангуляции поверхности рассеивателя к настоящему времени является отработанной процедурой. Большой интерес на сегодняшний день представляет разработка алгоритмов решения аналогичной нестационарной задачи рассеяния, когда на объект падает плоский волновой пакет с произвольной зависимостью поля падающей волны от времени, в частности - радиоимпульс. Будем говорить об облучении объекта радиоимпульсом, когда поле падающей с определённого направления волны осциллирует с постоянными амплитудой и частотой в интервале длительности импульса. В данной статье, во-первых, рассмотрено аналитическое решение нестационарной задачи двухпозиционного рассеяния на треугольнике, введённом на поверхности металлического объекта, в приближении физической оптики при произвольной зависимости поля падающей волны от времени. Далее будем полагать, что треугольник аппроксимирует гладкий участок либо точно представляет плоский участок поверхности объекта. Во-вторых, описана численная процедура решения соответствующей задачи рассеяния металлическим треугольником, обеспечивающая гладкое сшивание результатов расчётов в общем случае и в особых случаях рассеяния в направлениях, принадлежащих конусам дифракционных лучей на сторонах треугольника, а также в направлении зеркального отражения луча от поверхности треугольника и теневого направлении, когда формулы для общего случая неприменимы. Здесь и далее в этой работе тенью будем называть направление падения волны, продолженное за рассеиватель. Тестирование разработанной численной процедуры, а также анализ структуры временного отклика металлического треугольника выполнены в предположении падения радиоимпульса.

Применение приближения физической оптики никак не ограничивает размеры треугольника в длинах волн: они могут быть и много меньше, и много больше длины волны. Поэтому размеры треугольника ограничиваются только

тем, насколько хорошо с его помощью можно аппроксимировать локальный участок поверхности рассеивающего объекта.

1. Постановка задачи

Рассматривается задача рассеяния электромагнитного поля на идеальном электрическом проводнике (ИЭП), расположенном в свободном пространстве (рис. 1). На проводник падает плоский волновой пакет, пришедший от удалённого источника. Цель исследования — определить поле рассеяния в дальней зоне.

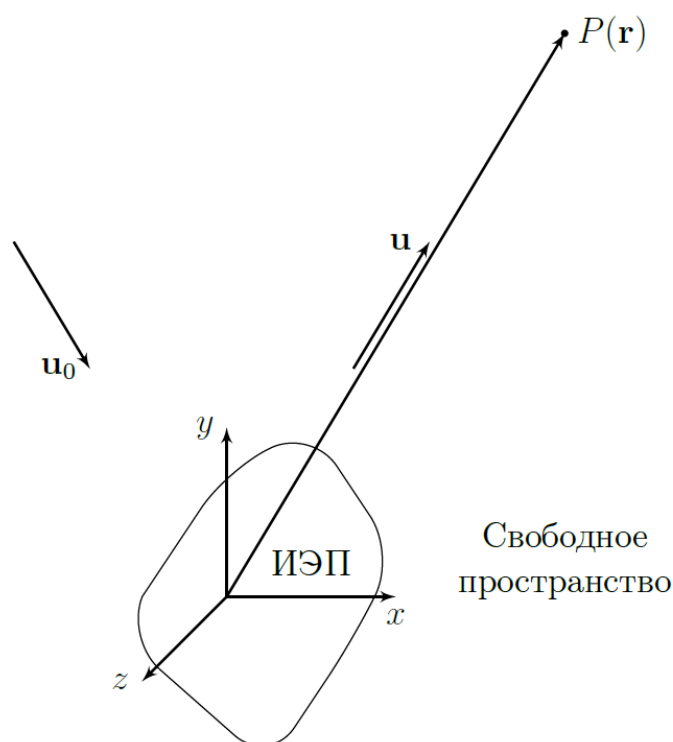


Рис. 1. Постановка задачи. Здесь система координат центрирована в некоторой точке внутри рассеивателя из ИЭП. \mathbf{u}_0 – единичный вектор в направлении падения волнового пакета, P – точка наблюдения рассеянного поля в дальней зоне, \mathbf{u} – единичный вектор в направлении точки наблюдения.

Падающее поле индуцирует на ИЭП поверхностные токи, которые компенсируют падающее поле в объеме ИЭП и служат источником рассеянного излучения. Решение задачи проводится в два этапа: сначала определяется зависимость поверхностного тока $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ от падающего поля $\mathbf{E}_{\text{пад}}(\mathbf{r}, t)$, а затем,

используя найденное распределение тока, вычисляется, в соответствии с [1], временной отклик в виде рассеянного поля.

Для описания электромагнитного поля вводятся векторный и скалярный потенциалы, связанные с напряжённостями полей соотношениями:

$$\begin{cases} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t); \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \nabla \varphi(\mathbf{r}, t). \end{cases} \quad (1)$$

Волновые уравнения для потенциалов выводятся с использованием калибровки Лоренца

$$\text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

и имеют вид:

$$\begin{cases} \left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}, t); \\ \left(-\Delta + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi(\mathbf{r}, t) = 4\pi \rho(\mathbf{r}, t), \end{cases} \quad (3)$$

где \mathbf{j} и ρ – объёмные плотности тока и заряда. Частные решения этих уравнений, зависящие от поверхностных плотностей тока \mathbf{J} и заряда η , позволяют определить напряжённости рассеянного поля:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_J(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'; \\ \varphi_{\eta}(\mathbf{r}, t) = \int_{\Sigma} \frac{\eta\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS', \end{cases} \quad (4)$$

где Σ – поверхность ИЭП.

Решения волновых уравнений представляют собой сумму общих решений однородных уравнений и частных решений (4) неоднородных уравнений. Общие решения описывают падающее поле, частные — поле рассеяния от поверхности ИЭП. Так как падающее и рассеянное поля независимы, калибровка Лоренца применяется отдельно для каждой компоненты.

Поскольку поверхность ИЭП может иметь произвольную форму, задачу следует решать численно. Для этого поверхность разбивается на N треугольных элементов так, чтобы вершины каждого треугольника принадлежали поверхности проводника. Такие элементы аппроксимируют гладкие участки или точно воспроизводят плоские участки поверхности ИЭП.

Векторный потенциал в этом случае можно записать как сумму вкладов всех треугольных элементов:

$$\mathbf{A}_J(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \frac{1}{c} \int_{\Sigma_i} \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'. \quad (5)$$

Напряжённость магнитного поля, рассеянного ИЭП, определяется через (1) и может быть выражена как сумма вкладов всех элементов дискретизации:

$$\mathbf{H}_{\text{расс}}(\mathbf{r}, t) = \sum_{i=1}^N \nabla \times \frac{1}{c} \int_{\Sigma_i} \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' = \sum_{i=1}^N \mathbf{H}_{\text{расс}i}(\mathbf{r}, t). \quad (6)$$

Из формулы (6) следует, что решение можно построить пошагово: сначала вычислить рассеянное поле для одного треугольного элемента, а затем суммировать поля всех элементов, чтобы получить напряжённость магнитного поля, рассеянного всей поверхностью ИЭП. Напряжённость электрического поля рассчитывается аналогично.

2. Поверхностный ток в приближении физической оптики

Связь поверхностной плотности тока и магнитного поля падающей волны на поверхности ИЭП имеет вид:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left(\mathbf{H}_{\text{пад}}(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{c} \text{v.p.} \int_{\Sigma} \nabla \times \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right). \quad (7)$$

Здесь $\mathbf{n}(\mathbf{r})$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности ИЭП в рассматриваемой точке, а $\mathbf{H}_{\text{пад}}(\mathbf{r}, t)$ – напряжённость падающего магнитного поля. Интеграл берётся в смысле главного значения (с выколотой точкой $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$).

Уравнение (7) называется *интегральным уравнением поверхностного тока* и является математически точным граничным условием для ИЭП с гладкой поверхностью.

На практике известно два типа ситуаций, когда вклад интегрального слагаемого в скобках (см. (7)) можно считать несущественным по сравнению с падающим полем $\mathbf{H}_{\text{пад}}$: либо интеграл действительно мал, либо определяемая им составляющая тока излучает слабее в интересующих направлениях приёма, чем основная составляющая, определяемая падающим полем. В дальнейшем будут рассмотрены именно такие случаи, когда интегральным слагаемым можно пренебречь. В этом приближении поверхностный ток определяется только падающим полем и записывается как

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{H}_{\text{пад}}(\mathbf{r}, t). \quad (8)$$

Это приближение называется *приближением физической оптики*, а ток, определяемый формулой (8), – *током физической оптики*. На неосвещенной части идеально проводящего объекта ток физической оптики считается равным нулю.

Для плоской падающей волны справедливо соотношение:

$$\mathbf{H}_{\text{пад}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0 \times \mathbf{E}_{\text{пад}}(\mathbf{r}, t), \quad (9)$$

где \mathbf{u}_0 – единичный вектор в направлении падения волны. Подставляя (9) в (8), получаем выражение для тока физической оптики через электрическое поле падающей волны:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{u}_0 \times \mathbf{E}_{\text{пад}}(\mathbf{r}, t)). \quad (10)$$

3. Электрическое и магнитное поля в дальней зоне

Зная векторный и скалярный потенциалы, можно найти рассеянное электрическое поле согласно второй формуле системы (1). Поскольку явного выражения градиента скалярного потенциала через поверхностный ток получить нельзя, воспользуемся разложением потенциалов в интеграл Фурье:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_J(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_A(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}; \\ \varphi_\eta(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_\varphi(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \end{cases} \quad (11)$$

где $\mathbf{S}_A(\mathbf{r}, \omega)$ и $S_\varphi(\mathbf{r}, \omega)$ – спектры векторного и скалярного потенциалов соответственно. Здесь и далее для векторной величины спектр имеет три декартовы составляющие – свою для каждой из декартовых составляющих исходной величины.

Подставив разложения (11) во второе уравнение системы (1), получаем:

$$\mathbf{E}_{\text{расс}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-ik\mathbf{S}_A(\mathbf{r}, \omega) - \nabla S_\varphi(\mathbf{r}, \omega)) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (12)$$

где учтено, что $\omega/c = k$.

Подставив спектры потенциалов в калибровочное условие (2), получаем:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\nabla \mathbf{S}_A(\mathbf{r}, \omega) + ikS_\varphi(\mathbf{r}, \omega)) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = 0. \quad (13)$$

Поскольку интеграл Фурье равен нулю, подынтегральное выражение также равно нулю. Из этого следует, что спектр скалярного потенциала можно выразить через спектр векторного потенциала. Тогда из (12), получаем:

$$\mathbf{E}_{\text{расс}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[-ik\mathbf{S}_A(\mathbf{r}, t) - \frac{i}{k} \nabla(\nabla \mathbf{S}_A(\mathbf{r}, t)) \right] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (14)$$

Разложим поверхностный ток в интеграл Фурье:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{S}_J(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (15)$$

где $\mathbf{S}_J(\mathbf{r}, \omega)$ – спектр поверхностного тока. Подставив это выражение в векторный потенциал (см. (4)), получаем:

$$\mathbf{A}_J(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{\Sigma} \mathbf{S}_J(\mathbf{r}', \omega) \frac{e^{-i\omega|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c}}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' \right] e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (16)$$

Здесь порядок интегрирования по площади и по частоте был изменён, так как интегралы независимы друг от друга. Выражение в квадратных скобках

соответствует спектру $\mathbf{S}_A(\mathbf{r}, \omega)$ векторного потенциала. Подставив его в (14) и выполнив стандартные преобразования, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{расс}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Sigma} \frac{e^{i\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[\left(-ik - \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right) \mathbf{S}_J(\mathbf{r}', \omega) + \right. \\ \left. + \left(ik + \frac{3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{3i}{k|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2} \right) \left(\mathbf{S}_J(\mathbf{r}', \omega) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right] dS' \frac{d\omega}{2\pi}. \end{aligned} \quad (17)$$

Сделаем два приближения для дальней зоны:

- 1) Расстояние до точки наблюдения много больше размеров рассеивателя из ИЭП: $r \gg r'$.
- 2) Расстояние до точки наблюдения много больше длин излучаемых волн: $r \gg \lambda$.

С учётом этих приближений и $k = 2\pi/\lambda$, для напряжённости электрического поля получаем:

$$\mathbf{E}_{\text{расс}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Sigma} \frac{e^{i\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left[-ik \mathbf{S}_J(\mathbf{r}', \omega) + ik (\mathbf{S}_J(\mathbf{r}', \omega) \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u} \right] dS' \frac{d\omega}{2\pi}, \quad (18)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{r} / r$ – единичный вектор в направлении точки наблюдения.

После упрощений и обратного преобразования Фурье получаем:

$$\mathbf{E}_{\text{расс}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \times \mathbf{u} \right) \times \mathbf{u}. \quad (19)$$

Таким образом, в дальней зоне рассеянное электрическое поле зависит только от производной векторного потенциала.

Проделав аналогичные действия, как при выводе формулы электрического поля в дальней зоне, получаем выражение для напряженности магнитного поля, рассеянного ИЭП в свободном пространстве:

$$\mathbf{H}_{\text{расс}}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Sigma} \frac{e^{i\omega(t-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|/c)}}{c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \left(ik + \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \right) \mathbf{S}_J(\mathbf{r}', \omega) \times \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dS' \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (20)$$

В дальней зоне, где $r \gg r'$ и $r \gg \lambda$, выражение для магнитного поля упрощается:

$$\mathbf{H}_{\text{расс}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \times \mathbf{u}. \quad (21)$$

Следует отметить, что формулы (17) и (20) являются точными математическими решениями уравнений Максвелла в свободном пространстве.

В дальней зоне электромагнитное поле является поперечным, так что в каждой точке $\mathbf{E}_{\text{расс}} \perp \mathbf{H}_{\text{расс}} \perp \mathbf{u}$. Это следует непосредственно из формул (19) и (21) и соответствует свойствам плоской волны, удаляющейся от рассеивателя в направлении \mathbf{u} .

4. Производная векторного потенциала физикооптического поверхностного тока в дальней зоне

В данном разделе выводится выражение для производной по времени от векторного потенциала, создаваемого в дальней зоне физикооптическим поверхностным током на идеально проводящем треугольнике. Это выражение используется при вычислении рассеянных полей согласно формулам (19) и (21).

Поскольку падающая волна является плоской, в свободном пространстве она может быть представлена в виде:

$$\mathbf{E}_{\text{пад}}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E} \left(t - \frac{\mathbf{u}_0 \mathbf{r}}{c} \right), \quad (22)$$

где $\mathbf{E}(t)$ – напряжённость электрического поля падающей волны в начале системы координат. Заметим, что за время длительности плоского волнового пакета, падающего на рассеиватель с направления \mathbf{u}_0 , допускается произвольная зависимость амплитуды и поляризации поля падающей волны от времени.

Подставляя выражение (22) в формулу (10), для физикооптического поверхностного тока получаем:

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{2\pi} \cdot \mathbf{n}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{u}_0 \times \mathbf{E} \left(t - \frac{\mathbf{u}_0 \mathbf{r}}{c} \right) \right]. \quad (23)$$

Найденное выражение для поверхностного тока подставим в первую формулу системы (4). Интегрирование при этом выполняется по поверхности идеально проводящего треугольника, в результате чего имеем:

$$\mathbf{A}_{\Delta}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{u}_0 \times \int_{\Delta} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{E} \left(t - \frac{\mathbf{u}_0 \mathbf{r}'}{c} - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) dS' \right]. \quad (24)$$

Здесь вектор нормали вынесен за знак интеграла, поскольку для плоского треугольника выполняется равенство $\mathbf{n}(\mathbf{r}') \equiv \mathbf{n} = \text{const}$.

С учётом одного из приближений дальней зоны ($r \gg r'$) разложим модуль $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в ряд Тейлора до первого порядка малости:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \mathbf{u}\mathbf{r}'. \quad (25)$$

Тогда выражение для векторного потенциала (24) принимает вид:

$$\mathbf{A}_{\Delta}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi r} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{u}_0 \times \int_{\Delta} \mathbf{E} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{m}\mathbf{r}'}{c} \right) dS' \right], \quad (26)$$

где $\mathbf{m} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_0$. Изменение падающего поля во времени в точке с радиус-вектором \mathbf{r}' на поверхности треугольника безынерционно отслеживается физикооптическим током. Как видно из выражения (26), задержка по времени для вклада в рассеянное поле в точке наблюдения \mathbf{r} (в данном случае для вклада в векторный потенциал рассеянного поля), по сравнению с общей задержкой на время r/c движения волны из начала координат в точку наблюдения, увеличивается на время $\mathbf{u}_0\mathbf{r}'/c$, на которое отстает приход падающей волны с определенной фазой в точку \mathbf{r}' по сравнению с ее приходом в начало координат, и уменьшается на время $\mathbf{m}\mathbf{r}'/c$ вследствие наличия разности хода от точки \mathbf{r}' и от начала координат до точки наблюдения \mathbf{r} в дальней зоне.

Радиус-векторы вершин идеально проводящего треугольника обозначим через \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 и \mathbf{r}_3 , рис. 2. Для последующих вычислений введём направляющие векторы сторон треугольника: $\mathbf{b}_1 = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{b}_2 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1$ и $\mathbf{b}_3 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$.

Радиус-вектор произвольной точки \mathbf{r}' , принадлежащей поверхности треугольника, представим в виде:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 + \beta(\mathbf{b}_1 + \alpha\mathbf{b}_3), \quad (27)$$

где $\alpha \in [0; 1]$ и $\beta \in [0; 1]$ – независимые параметры.

Площадь малого участка поверхности dS' около точки \mathbf{r}' (см. рис. 2) можно записать в виде $dS' = (\beta b_3 \cdot da)(h \cdot d\beta)$, где h – высота треугольника, опущенная из вершины \mathbf{r}_1 . При этом выполняется соотношение $hb_3 = 2S$, где S – площадь треугольника.

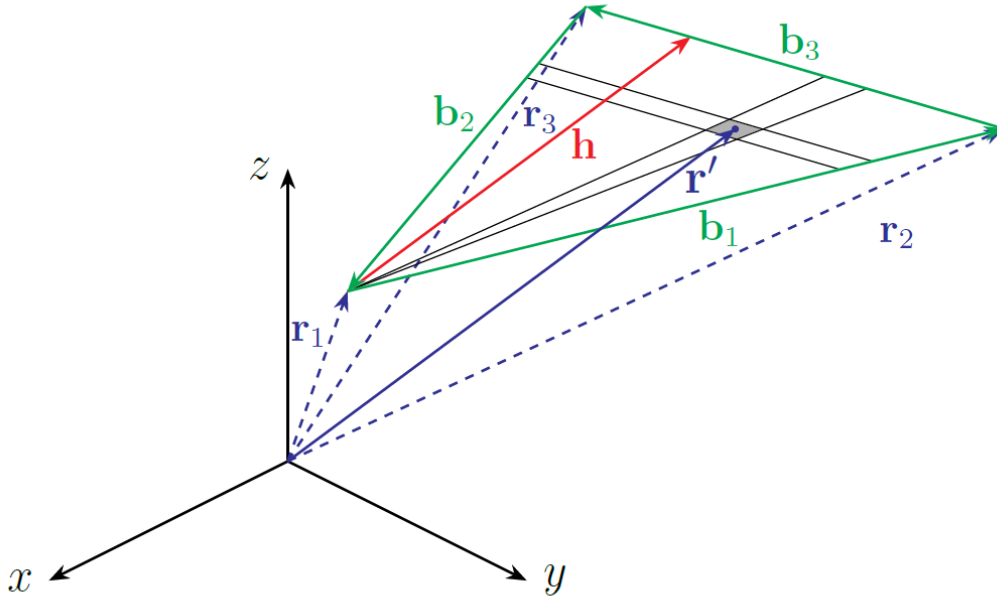


Рис. 2. Идеально проводящий треугольник с радиус-векторами вершин $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$, \mathbf{h} – вектор высоты, проведённой из вершины \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}' – радиус-вектор произвольной точки на поверхности треугольника, $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ – направляющие векторы сторон треугольника.

С учётом введённых обозначений выражение для векторного потенциала в дальней зоне, создаваемого физикооптическим током на треугольнике Δ , принимает вид:

$$\mathbf{A}_{\Delta}(\mathbf{r}, t) = \frac{S}{\pi r} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{u}_0 \times \int_0^1 \int_0^1 \mathbf{E} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{m}\mathbf{r}_1}{c} + \frac{\beta\mathbf{m}(\mathbf{b}_1 + \alpha\mathbf{b}_3)}{c} \right) d\alpha d\beta \right]. \quad (28)$$

Разложим функцию \mathbf{E} , входящую в формулу (28), в интеграл Фурье и обозначим её спектр через $\mathbf{S}_E(\omega)$. Тогда спектр $\mathbf{S}_{\Delta}(\mathbf{r}, \omega)$ векторного потенциала $\mathbf{A}_{\Delta}(\mathbf{r}, t)$ можно записать в виде:

$$\mathbf{S}_{\Delta}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{S e^{i\omega(-r+\mathbf{m}\mathbf{r}_1)/c}}{\pi r} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{u}_0 \times \mathbf{S}_E(\omega) \int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega\beta\mathbf{m}(\mathbf{b}_1+\alpha\mathbf{b}_3)/c} d\alpha d\beta \right]. \quad (29)$$

Вычисляя двойной интеграл, получаем:

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{i\omega\beta\mathbf{m}(\mathbf{b}_1+\alpha\mathbf{b}_3)/c} d\alpha d\beta = \frac{c^2}{(i\omega)^2 \mathbf{m}\mathbf{b}_3} \left(\frac{e^{i\omega\mathbf{m}\mathbf{b}_2/c} - 1}{\mathbf{m}\mathbf{b}_2} - \frac{e^{i\omega\mathbf{m}\mathbf{b}_1/c} - 1}{\mathbf{m}\mathbf{b}_1} \right). \quad (30)$$

Из выражений (29) и (30) следует, что спектр векторного потенциала треугольного элемента дискретизации $\mathbf{S}_{\Delta}(\mathbf{r}, \omega)$ обратно пропорционален

квадрату частоты ω^2 . В связи с этим выполнение обратного преобразования Фурье для $\mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)$ затруднено.

Для устранения данной трудности рассмотрим вторую производную по времени от $\mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)$ в её разложении в интеграл Фурье:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} (i\omega)^2 \mathbf{S}_\Delta(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}. \quad (31)$$

После подстановки выражения (30) в формулу (29), а затем (29) в (31) множители $(i\omega)^2$ сокращаются, что позволяет выполнить обратное преобразование Фурье. В результате получаем:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \frac{cS}{\pi r m \mathbf{b}_3} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{u}_0 \times \left(\frac{\mathbf{E}\left(T + \frac{m\mathbf{b}_2}{c}\right) - \mathbf{E}(T)}{\frac{m\mathbf{b}_2}{c}} - \frac{\mathbf{E}\left(T + \frac{m\mathbf{b}_1}{c}\right) - \mathbf{E}(T)}{\frac{m\mathbf{b}_1}{c}} \right) \right], \quad (32)$$

где $T = t - r/c + m\mathbf{r}_1/c$.

При нахождении первой производной векторного потенциала предположим, что $\mathbf{E}(t) = 0$ при $t \leq 0$. Тогда первую производную $\partial \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)/\partial t$ можно представить в виде интеграла от второй производной с переменным верхним пределом:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \int_0^t \frac{\partial^2 \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, \tau)}{\partial \tau^2} d\tau. \quad (33)$$

Введём обозначение:

$$\mathbf{I}(t) = \int_0^t \mathbf{E}(\tau) d\tau. \quad (34)$$

Окончательно для первой производной векторного потенциала по времени получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{cS}{\pi r m \mathbf{b}_3} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{u}_0 \times \left(\frac{\mathbf{I}\left(T + \frac{m\mathbf{b}_2}{c}\right) - \mathbf{I}(T)}{\frac{m\mathbf{b}_2}{c}} - \frac{\mathbf{I}\left(T + \frac{m\mathbf{b}_1}{c}\right) - \mathbf{I}(T)}{\frac{m\mathbf{b}_1}{c}} \right) \right]. \quad (35)$$

Таким образом, получено замкнутое аналитическое выражение для производной по времени от векторного потенциала в дальней зоне, создаваемого физикооптическим поверхностным током на идеально проводящем треугольнике. Вычисление этой величины позволяет непосредственно определить электрическое и магнитное поля рассеянной волны по формулам (19) и (21).

5. Частные случаи и условия перехода к вычислениям по выражениям для частных случаев

Заметим, что при численном решении задачи применение общей формулы (35) невозможно при стремлении к нулю хотя бы одной из имеющих размерность времени величин $\tau_1 = \mathbf{mb}_1/c$, $\tau_2 = \mathbf{mb}_2/c$ и $\tau_3 = \mathbf{mb}_3/c$, поскольку они стоят в знаменателях отношений в формуле (35).

Для устранения этой проблемы вводится пороговое значение p , так что вычисление производной векторного потенциала по формуле общего вида (35) либо по формулам для частных случаев, которые будут получены ниже в этом разделе, выполняется в зависимости от того, превышают ли величины τ_1 , τ_2 и τ_3 порог p или нет. Вычисление по формуле (35) производится при выполнении системы неравенств: $|\tau_1| > p$, $|\tau_2| > p$, $|\tau_3| > p$.

Равенство $\tau_i = 0$, где $i = 1, 2, 3$, означает принадлежность направления наблюдения конусу дифракционных лучей (КДЛ) вокруг i -го края треугольника. Заметим, что из равенства двух τ_i нулю следует, что и третье τ_i также равно нулю, поскольку $\mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$. Одновременное равенство нулю $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0$ имеет место при пересечении всех трех конусов дифракционных лучей в направлении зеркального отражения луча, либо в теновом направлении. Малость одного из τ_i указывает на нахождение направления наблюдения в малой угловой окрестности i -го конуса дифракционных лучей, а одновременная малость всех трех τ_i – на принадлежность направления наблюдения окрестности направления зеркального отражения, либо тенового. Соответственно, будем выделять далее четыре частных случая.

Для вывода выражений для частных случаев разложим функции $\mathbf{I}(T + \tau_1)$ и $\mathbf{I}(T + \tau_2)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано до четвертого порядка малости:

$$\begin{cases} \mathbf{I}(T + \tau_1) = \mathbf{I}(T) + \mathbf{E}(T)\tau_1 + \frac{\dot{\mathbf{E}}(T)}{2}\tau_1^2 + \frac{\ddot{\mathbf{E}}(T)}{6}\tau_1^3 + \frac{\dddot{\mathbf{E}}(T)}{24}\tau_1^4 + \mathbf{o}(\tau_1^4); \\ \mathbf{I}(T + \tau_2) = \mathbf{I}(T) + \mathbf{E}(T)\tau_2 + \frac{\dot{\mathbf{E}}(T)}{2}\tau_2^2 + \frac{\ddot{\mathbf{E}}(T)}{6}\tau_2^3 + \frac{\dddot{\mathbf{E}}(T)}{24}\tau_2^4 + \mathbf{o}(\tau_2^4). \end{cases} \quad (36)$$

Рассмотрим первый частный случай, описываемый системой неравенств: $|\tau_1| \leq p, |\tau_2| > p, |\tau_3| > p$. Подставляя первое уравнение системы (36) в формулу (35), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{S}{\pi r \tau_3} \mathbf{n} \times \\ &\times \left[\mathbf{u}_0 \times \left(\frac{\mathbf{I}(T + \tau_2) - \mathbf{I}(T)}{\tau_2} - \mathbf{E}(T) - \frac{\dot{\mathbf{E}}(T)}{2}\tau_1 - \frac{\ddot{\mathbf{E}}(T)}{6}\tau_1^2 - \frac{\dddot{\mathbf{E}}(T)}{24}\tau_1^3 \right) \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

Аналогично, второй частный случай описывается системой: $|\tau_1| > p, |\tau_2| \leq p, |\tau_3| > p$. Подставляя второе уравнение (36) в формулу (35), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{S}{\pi r \tau_3} \mathbf{n} \times \\ &\times \left[\mathbf{u}_0 \times \left(\mathbf{E}(T) + \frac{\dot{\mathbf{E}}(T)}{2}\tau_2 + \frac{\ddot{\mathbf{E}}(T)}{6}\tau_2^2 + \frac{\dddot{\mathbf{E}}(T)}{24}\tau_2^3 - \frac{\mathbf{I}(T + \tau_1) - \mathbf{I}(T)}{\tau_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (38)$$

Третий частный случай соответствует: $|\tau_1| > p, |\tau_2| > p, |\tau_3| \leq p$ и даёт формулу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &= \frac{S}{\pi r \tau_2} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{u}_0 \times \left(\mathbf{E}(T + \tau_1) + \frac{\dot{\mathbf{E}}(T + \tau_1)}{2}\tau_3 + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\ddot{\mathbf{E}}(T + \tau_1)}{6}\tau_3^2 + \frac{\dddot{\mathbf{E}}(T + \tau_1)}{24}\tau_3^3 - \frac{\mathbf{I}(T + \tau_1) - \mathbf{I}(T)}{\tau_1} \right) \right]. \end{aligned} \quad (39)$$

Четвёртый частный случай соответствует области, в которой ни одно из условий общего и трёх предыдущих частных случаев не выполняется. Иными словами, данная область соответствует одновременной малости величин

τ_1 , τ_2 и τ_3 . Этот случай соответствует направлениям вектора \mathbf{u} относительно \mathbf{u}_0 , близким к:

- 1) направлению зеркального отражения луча;
- 2) теневому направлению.

В окрестностях этих направлений эффективная поверхность рассеяния (ЭПР) находится вблизи максимума. Подставляя разложения (36) в формулу (35) и учитывая равенство $\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_3 = \mathbf{b}_2$, получаем:

$$\frac{\partial \mathbf{A}_\Delta(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{S}{2\pi r} \mathbf{n} \times \left[\mathbf{u}_0 \times \left(\dot{\mathbf{E}}(T) + \frac{\ddot{\mathbf{E}}(T)}{3} (\tau_1 + \tau_2) + \frac{\ddot{\mathbf{E}}(T)}{12} (\tau_1^2 + \tau_1 \tau_2 + \tau_2^2) \right) \right]. \quad (40)$$

Следует отметить разницу в структуре рассеянного сигнала в зависимости от ориентации вектора \mathbf{m} . В общем случае рассеянное поле определяется через интегралы по времени от падающего поля (см. формулу (35)). Если \mathbf{m} перпендикулярен i -овой стороне треугольника и $\tau_i = 0$, то часть рассеянного поля повторяет изменение падающего поля во времени, а другая часть описывается интегралом по времени от падающего поля (см. формулы (37), (38) и (39)). В случае, когда \mathbf{m} перпендикулярен плоскости треугольника (вектор \mathbf{u} ориентирован в направлении отражения луча), либо обращается в ноль (вектор \mathbf{u} ориентирован в теневом направлении), рассеянное поле содержит только производную от падающего поля по времени (см. формулу (40)).

Все перечисленные случаи можно отобразить на одном рисунке (рис. 3). Введём декартову систему координат с осями τ_1 и τ_2 . Границы областей, описанных выше, выделены зелёным цветом и пронумерованы цифрами 0, 1, 2, 3 и 4 в соответствии с рассмотренными случаями. Область под номером 0 соответствует общему случаю.

Наконец, оценим пороговое значение p . Рассмотрим границу между областями 0 и 1. Так как функция $\mathbf{I}(T)$ имеет дискретное представление при численном интегрировании зависимости падающего поля от времени, то можно оценить влияние дискретизации на точность вычислений, используя разложение функции $\mathbf{I}(T)$ по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

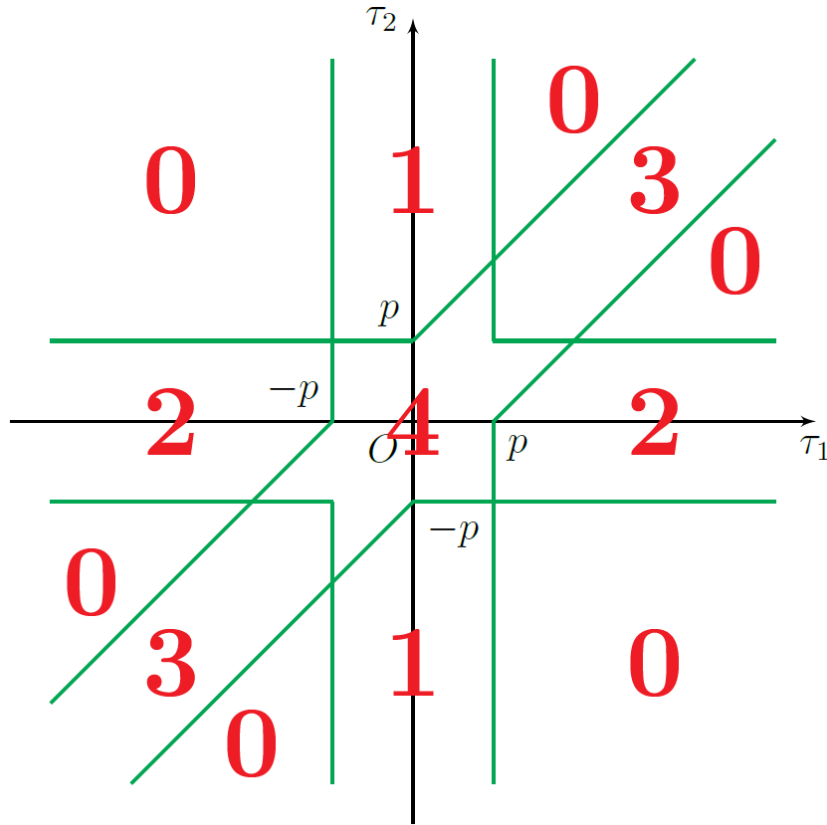


Рис. 3. Области использования разных выражений для производной векторного потенциала треугольного элемента: 0 – общий случай (формула (35)), 1–4 – частные случаи (формулы (37)–(40)) в порядке их перечисления в тексте. Границы областей выделены зелёным.

При выборке значения $I(T)$ для конкретного момента t возможна максимальная ошибка $E(T)h/2$, где h – шаг дискретизации по времени. Здесь учтено, что при вычислениях значение времени T округляется до ближайшего дискретного значения.

Оптимальный выбор порогового значения p для параметра τ_1 обеспечивает равенство оценок верхних уровней ошибок вычислений последних множителей в формулах (35) и (37) при переходе τ_1 через порог:

$$\frac{E(T)h}{2p} + \frac{E(T)h}{2p} = \frac{\dot{E}(T)h}{2} + \frac{\ddot{E}(T)ph}{4} + \frac{\ddot{E}(T)p^2h}{12} + \frac{E^{(4)}(T)p^3h}{24} + \frac{E^{(4)}(T)p^4}{120}. \quad (41)$$

Левая часть равенства (41) отражает оценку максимальной погрешности второй дроби последнего множителя формулы (35) для общего случая, возникающей исключительно из дискретизации функции $I(T)$; здесь максимально возможная ошибка обратно пропорциональна p . Оценка максимальной погрешности в частном случае, даваемая правой частью равенства (41), наоборот, растет с

ростом p и содержит пять составляющих: четыре первых слагаемых – погрешности последних четырех вычитаемых последнего множителя формулы (37) для частного случая, а пятое — остаточный член пятого порядка малости в разложении по формуле Тейлора (см. (36)). Таким образом, смещение порогового значения p относительно оптимального будет приводить к росту ошибок вычислений по одной формуле при избыточной точности вычислений по другой формуле, что и проявляется в примерах расчетов, приводимых далее.

С учётом $\dot{E}(T) \sim 2\pi f E(t)$, где f – верхняя частота в спектре падающей волны, до которой реакция по рассеянному полю будет отслежена весьма точно, получаем уравнение пятой степени относительно p :

$$15\pi fp + 15(\pi fp)^2 + 10(\pi fp)^3 + 10(\pi fp)^4 + 2(\pi fp)^4 \frac{P}{h} = 15. \quad (42)$$

В зависимости от шага дискретизации по времени и частоты падающей волны можно определить пороговое значение p , при котором переходы между результатами вычислений по формулам (35), (37), (38), (39) и (40) будут плавными ввиду выровненности уровня ошибки расчета до и после перехода.

6. Пример расчета двухпозиционного рассеяния идеально проводящим треугольником

Рассмотрим результаты расчета поля, рассеянного идеально проводящим треугольником, геометрия которого, а также направления облучения и наблюдения рассеянного поля представлены на рис. 4. Основание треугольника $AB = 45$ см лежит на оси y связанной треугольником системы координат, углы при основании треугольника $\angle A = 60^\circ$ и $\angle B = 50^\circ$. Пусть нормаль к треугольнику отклонена вверх так, что угол места для направления нормали 20° . Пусть также с направления, характеризуемого углом азимута $\varphi_0 = 50^\circ$ и углом места $\alpha_0 = 30^\circ$, на треугольник падает плоский волновой пакет в виде радиоимпульса с θ -поляризованным полем. Будем наблюдать θ -составляющую поля двухпозиционного рассеяния треугольником в направлении $\varphi = 0^\circ$ и $\alpha = 15^\circ$.

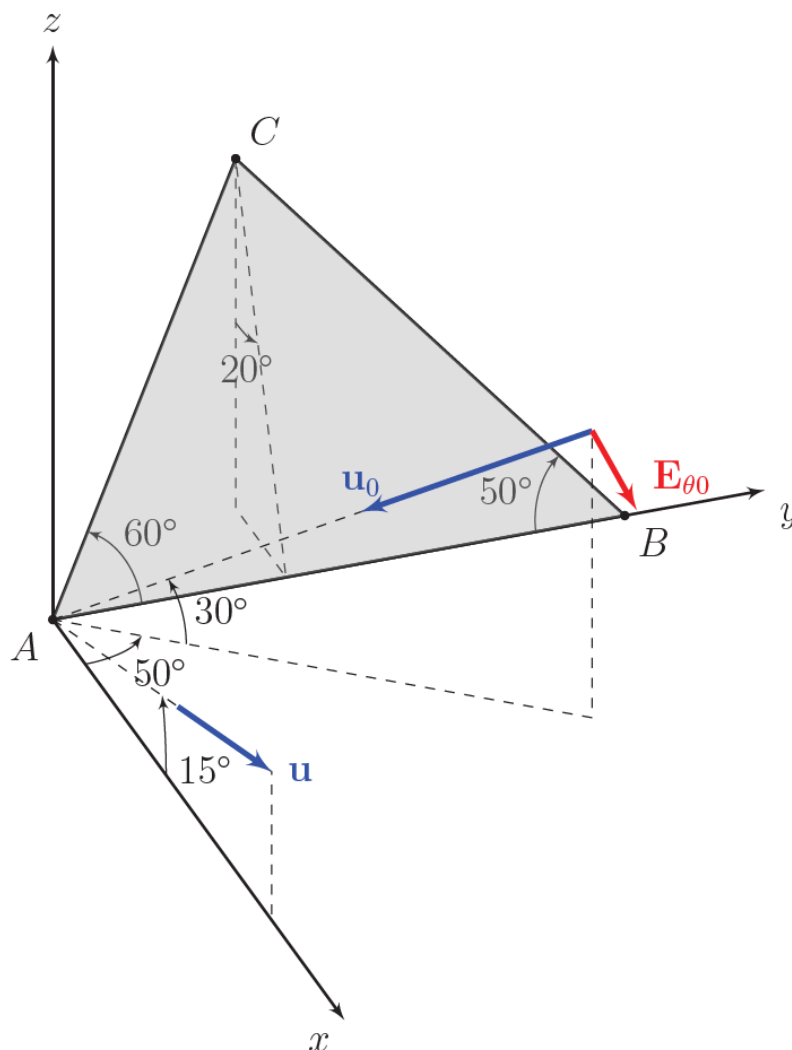


Рис. 4. Идеально проводящий треугольник ABC . На треугольник падает плоский волновой пакет с θ -поляризованным полем.

Пусть падающее поле в начале координат задаётся как

$$\mathbf{E}_{\text{пад}}(\mathbf{r} = 0, t) = \begin{cases} \mathbf{E}_{0\theta} \cdot \sin(2\pi ft), & t \in [0; 2 \text{ нс}]; \\ 0, & t \notin [0; 2 \text{ нс}]. \end{cases} \quad (43)$$

Амплитуда осцилляций поля радиоимпульса 1 В/м, его длительность 2 нс, частота заполнения $f = 10$ ГГц. При расчете был задан шаг дискретизации по времени $h = 10^{-13}$ с, в этих условиях решение уравнения (42) дает оптимальное значение порога $p_{\text{опт}} = 125h$.

На рис. 5 показан график функции $r \cdot E_{\text{расс } \theta}(\mathbf{r}, t)$ в дальней зоне, где $E_{\text{расс } \theta}$ – θ -ая компонента рассеянного поля. Величина $r \cdot E_{\text{расс } \theta}$ измеряется в вольтах и не зависит от r . Расчёт выполнен согласно формулам (19) и (35).

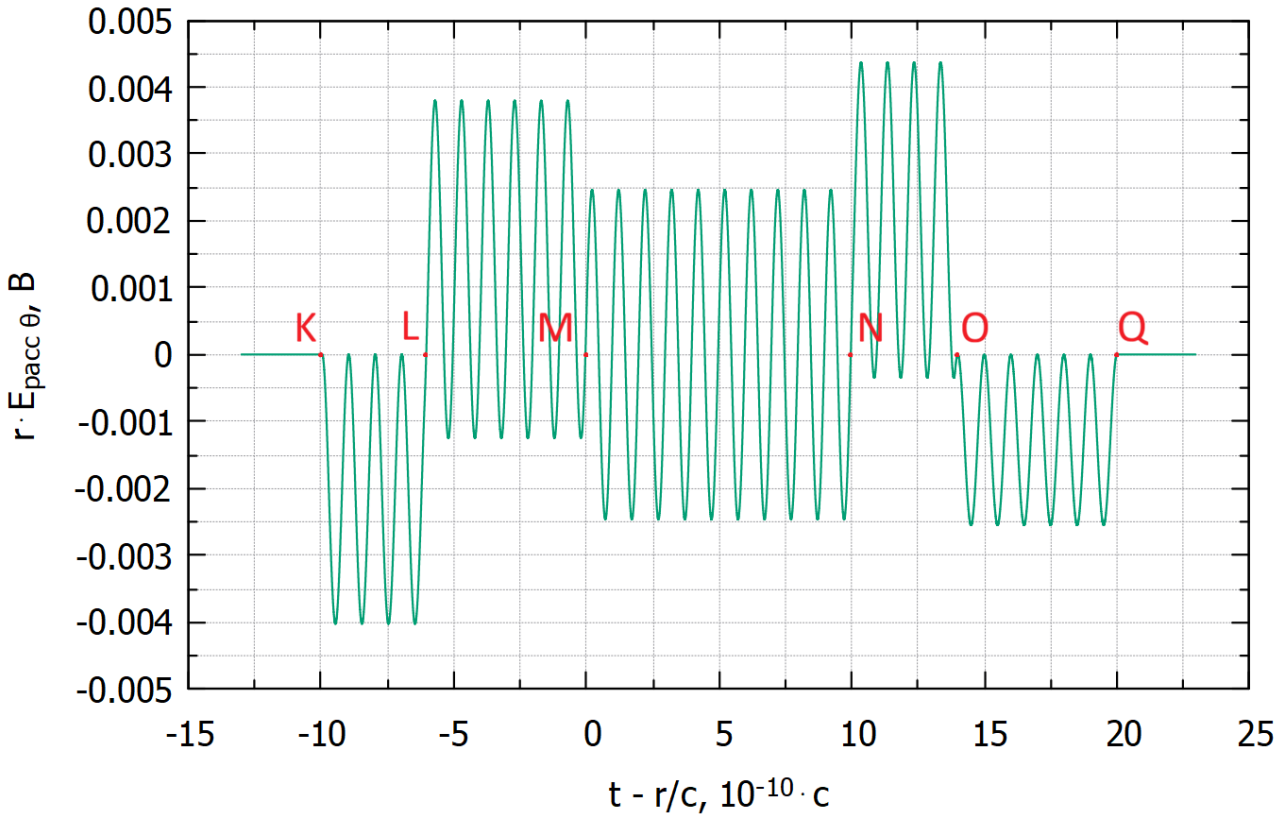


Рис. 5. График зависимости $r \cdot E_{\text{расс } \theta}(\mathbf{r}, t)$ от времени t в дальней зоне при падении плоского радиоимпульса на идеально проводящий треугольник.

Выделяются пять отдельных интервалов изменения рассеянного поля во времени (KL , LM , MN , NO и OQ). При переходе между интервалами рассеянное поле меняется непрерывно. При этом на каждом интервале поле осциллирует по гармоническому закону. Амплитуда, фаза и постоянная составляющая осцилляций меняются скачкообразно при переходе между интервалами. Для объяснения вида рассеянного сигнала рассмотрим формулу (26), содержащую интеграл по треугольному элементу:

$$\int_{\Delta} \mathbf{E} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{m}\mathbf{r}'}{c} \right) dS' = \int_{\Delta} \mathbf{E} \left(T + \frac{\mathbf{m}\mathbf{r}'_1}{c} \right) dS'. \quad (44)$$

Напомним, что $T = t - r/c + \mathbf{m}\mathbf{r}'_1/c$. Принято также, что $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}'_1$, где \mathbf{r}'_1 задаёт положение точки на поверхности треугольника относительно его первой вершины. В рассматриваемом примере начало координат совпадает с первой вершиной треугольника $\mathbf{r}_1 = 0$, так что $T = t - r/c$.

Разложим вектор \mathbf{m} на компоненты, параллельную и перпендикулярную поверхности треугольника:

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}_{\perp} + \mathbf{m}_{\parallel}. \quad (45)$$

Поскольку $\mathbf{m}_{\perp} \mathbf{r}'_1 = 0$, то интеграл примет вид:

$$\int_{\Delta} \mathbf{E} \left(T + \frac{\mathbf{m}_{\parallel} \mathbf{r}'_1}{c} \right) dS'. \quad (46)$$

Согласно формуле (43), функция $\mathbf{E}(t)$ принимает ненулевые значения при $t \in [0; 2 \text{ нс}]$. Вклад в интеграл (46) и, следовательно, в поле рассеяния в точке наблюдения является ненулевым лишь от тех участков треугольника, для которых удовлетворяется следующее двойное неравенство:

$$0 \leq T + \frac{\mathbf{m}_{\parallel} \mathbf{r}'_1}{c} \leq 2 \text{ нс}. \quad (47)$$

Как следует из (46) и (47), в момент времени T поле в точке наблюдения формируется исключительно за счёт части треугольника, принадлежащей полосе с границами, перпендикулярными вектору \mathbf{m}_{\parallel} . Передняя и задняя границы полосы соответствуют левому и правому равенствам условия (47), так что падающее поле на передней и задней границах полосы соответствует начальному и конечному значениям в законе изменения $\mathbf{E}_{\text{пад}}(\mathbf{r} = 0, t)$ (43). С течением времени полоса движется по поверхности треугольника в направлении против вектора \mathbf{m}_{\parallel} со скоростью $v = c/m_{\parallel}$.

В данном примере вектор \mathbf{m}_{\parallel} ориентирован в плоскости треугольника так, как это показано на рис. 6. Определяемая условиями (47) полоса для некоторого момента времени приведена на рис. 6, где она закрашена зеленым цветом, а ее передняя граница – красным. Движение полосы объясняет появление пяти отдельных интервалов осцилляций у представленной на рис. 5 зависимости рассеянного поля от времени. Рис. 6 соответствует моменту времени, когда формируется первый участок KL временной зависимости на рис. 5. Далее часть треугольника, участвующую в формировании рассеянного поля в точке наблюдения, будем для краткости называть *активной*. На рис. 6 активная часть треугольника закрашена синим цветом.

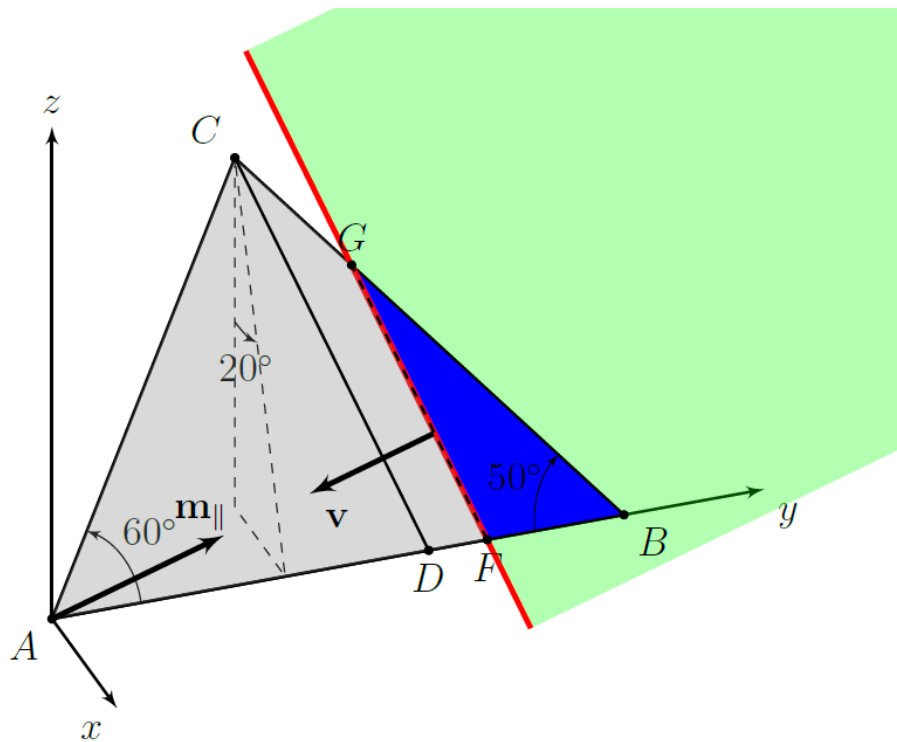


Рис. 6. Идеально проводящий треугольник ABC . Синим цветом показана часть треугольника, формирующая рассеянное поле в некоторый момент времени и принадлежащая зеленой полосе, определяемой условиями (47).

На рис. 6 также показан отрезок DC , параллельный границам движущейся полосы и разбивающий исходный треугольник ABC на две части. Второй участок LM временной зависимости на рис. 5 соответствует интервалу времени, когда активная область частично покрывает ADC , третий участок MN — интервалу, когда рассеянный сигнал формируется всей поверхностью треугольника, четвертый участок NO — интервалу, когда активная область начинает закрываться в DBC , и пятый участок OQ — интервалу, когда активная область сходит с треугольника ADC .

Заметим, что третий участок осцилляций MN соответствует случаю падения монохроматической плоской волны на треугольник, поскольку поле в точке наблюдения формируется всей поверхностью треугольника, а физикооптические токи в каждой его точке определяются мгновенным значением падающего поля в данной точке. Режим рассеяния, соответствующий участку MN на графике (рис. 5), в дальнейшем будем называть *установившимся*. Отметим, что в установившемся режиме рассеянное поле осциллирует около нулевого значения.

Далее отметим, что первые два участка осцилляций (KL и LM) на графике (рис. 5) соответствуют этапу формирования установившегося режима, то есть промежутку времени от начала формирования рассеянного поля в точке наблюдения до момента его установления, начиная с которого поле формируется всей поверхностью треугольника. Очевидно, что интервал достижения установившегося режима в рассматриваемом примере равен $\tau_{уст} = \tau_1$, что соответствует времени перемещения границы активной области от точки B до точки A (см. рис. 6). Вообще τ_i соответствует времени движения границы активной области вдоль стороны треугольника b_i . Поэтому в общем случае время достижения установившегося режима, как и время от момента прекращения рассеяния в установившемся режиме до обращения рассеянного сигнала в ноль, равно максимальному из времен движения границы активной области вдоль сторон треугольника $\tau_{уст} = \max(\tau_1, \tau_2, \tau_3)$.

Промежутки времени KN и NQ на графике на рис. 5 равны длительности радиоимпульса.

Вид зависимости рассеянного сигнала от времени при облучении треугольника радиоимпульсом говорит о преобладающей роли окрестностей вершин треугольника в формировании осцилляций рассеянного поля, поскольку именно при прохождении вершин треугольника границами области, формирующей рассеянное поле, скачком меняются амплитуда, фаза и постоянная составляющая осцилляций. Причины этого эффекта будут подробно рассмотрены в последующих работах.

7. Тестирование процедуры вычисления рассеянного поля

Поскольку в рамках приближения физической оптики при облучении треугольника радиоимпульсом (43) поле рассеяния в установившемся режиме (участок графика MN на рис. 5) эквивалентно полю рассеяния для монохроматической задачи, то это позволяет протестировать точность разработанной процедуры численного решения нестационарной задачи рассеяния идеально проводящим треугольником.

На рис. 7 представлено пространственное распределение двухпозиционной ЭПР треугольника, вычисленное по значениям амплитуды осцилляций поля рассеяния в установившемся режиме. Геометрия и направление облучения треугольника показаны на рис. 4. Учтено, что угол места является дополнительным к углу θ и вычисляется как $\alpha = 90^\circ - \theta$.

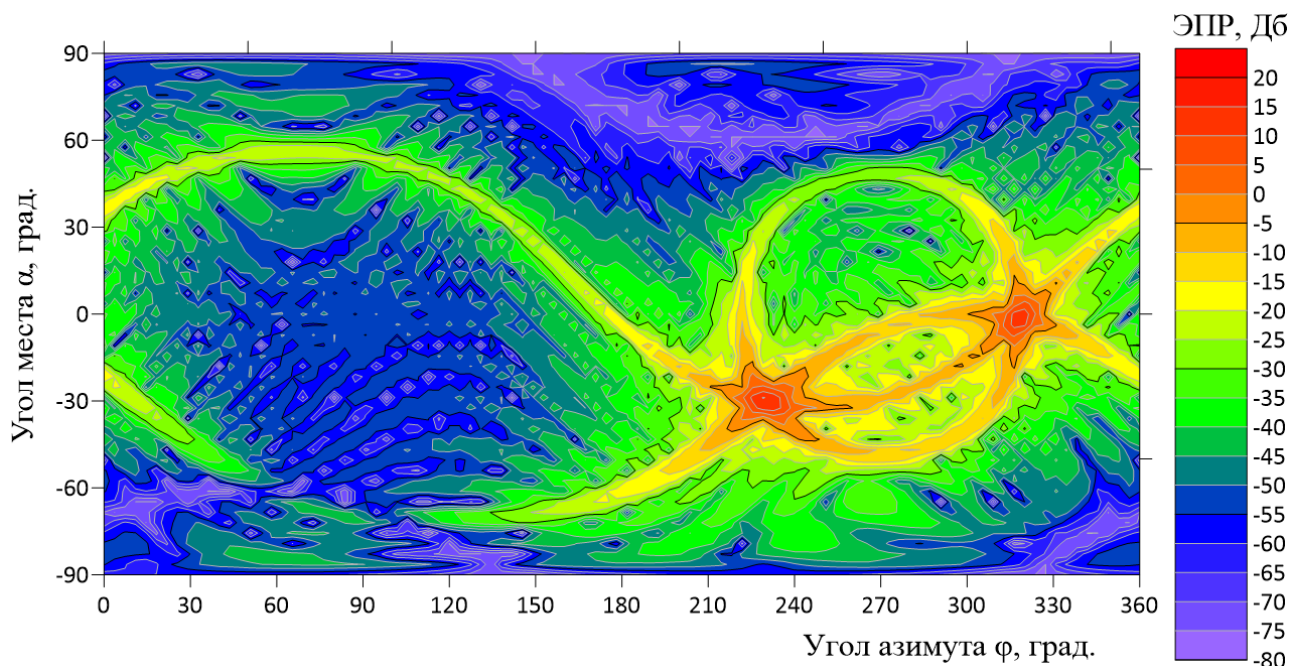


Рис. 7. Пространственное распределение двухпозиционной ЭПР идеально проводящего треугольника, геометрия и направление облучения которого показаны на рис. 4. Распределение вычислено в приближении физической оптики по значениям амплитуды осцилляций рассеянного поля в установившемся режиме при облучении треугольника радиоимпульсом.

В работе [2] представлено пространственное распределение двухпозиционной ЭПР, полученное из численного решения той же задачи рассеяния, но в строгой подстановке. Из сравнения распределений следует, что угловое положение максимумов ЭПР в зеркальном и теневом направлениях (углы азимута и места, соответственно, $\{318^\circ, -3^\circ\}$ и $\{230^\circ, -30^\circ\}$), а также ход конусов дифракционных лучей и их дифракционных конусов-сателлитов (см. [2]) совпадают. Физикооптический расчет дает вполне точные значения двухпозиционной ЭПР в угловых окрестностях зеркального и теневого направлений радиусом (20-30) градусов. Это является качественным подтверждением правильности физикооптического расчета.

Для количественного подтверждения точности расчета с помощью разработанной процедуры на рис. 8 представлена диаграмма двухпозиционного рассеяния треугольником в азимутальной плоскости $\varphi = 230^\circ$ (этой плоскости принадлежит теневое направление), вычисленная исходя из амплитуды осцилляций поля рассеяния в установившемся режиме, в сравнении с аналогичной диаграммой, полученной из решения монохроматической задачи рассеяния с помощью программы FEKO [3] также в физикооптическом приближении. Видно графическое совпадение хода двух диаграмм рассеяния на рис. 8.

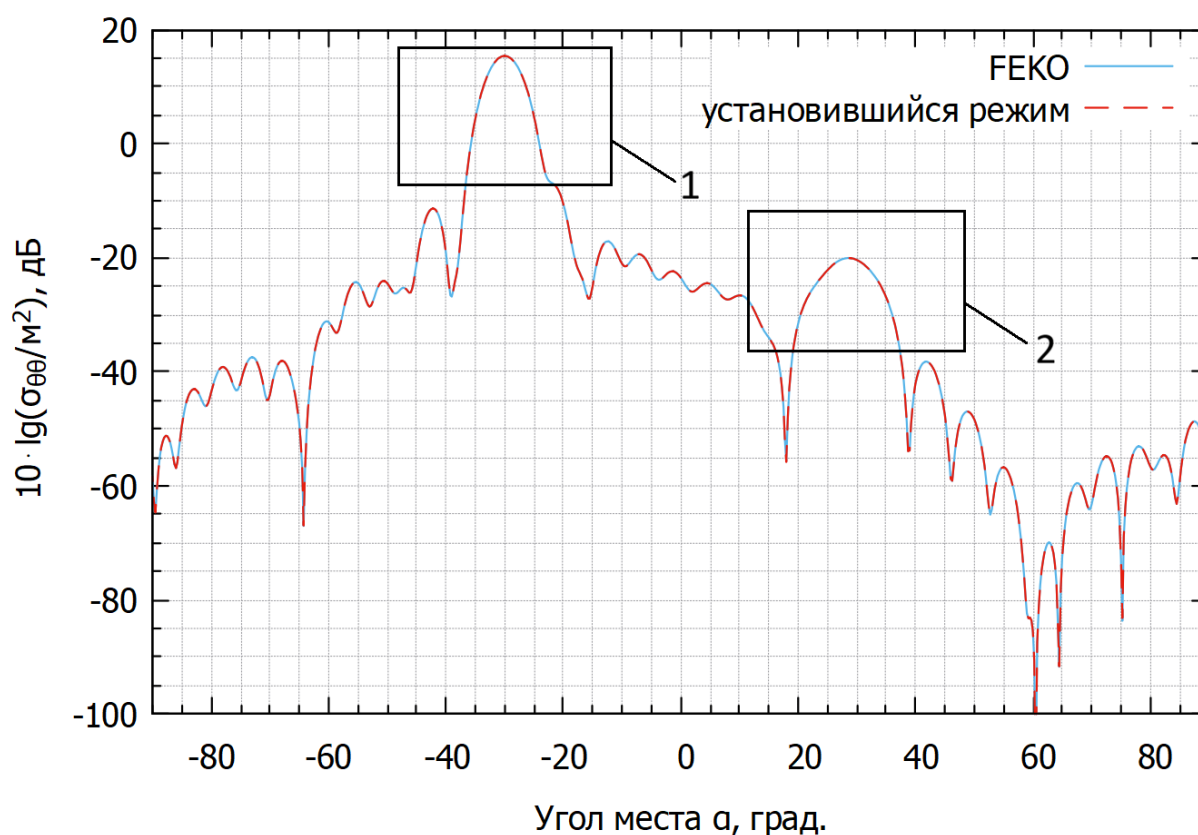


Рис. 8. Диаграммы двухпозиционного рассеяния идеально проводящим треугольником, полученные в азимутальной плоскости $\varphi = 230^\circ$ из решения монохроматической и нестационарной задач в приближении физической оптики. Геометрия и направление облучения треугольника показаны на рис. 4.

Особый интерес представляют указанные на рис. 8 участок 1 в окрестности теневого максимума $\alpha = -30^\circ$ и участок 2 вокруг направления $\alpha \approx 30^\circ$, принадлежащего конусу дифракционных лучей, так как при решении нестационарной задачи в окрестностях этих максимумов двухпозиционная ЭПР треугольника была рассчитана по значениям амплитуд осцилляций рассеянного

поля, которые прослеживались с использованием формул для частных случаев (37) – (40).

Сначала рассмотрим результаты расчета ЭПР вблизи теневого максимума (рис. 9). Для сравнительной оценки на рисунке приведены три графика, соответствующие разным значениям порога $p = 25h$, $625h$ и $125h$. Напомним, что значение $p = 125h$ является оптимальным для заданного падающего радиоимпульса. Как видно из рис. 9а, при пятикратном увеличении порогового значения по сравнению с оптимальным расчёты по формулам для частных случаев дают большие ошибки вдали от максимума ЭПР, вызванные возрастанием погрешностей полиномиальных аппроксимаций функций вида $I(T + \tau_i)$, получаемых с использованием формулы Тейлора. Если же порог уменьшить в пять раз (см. рис. 9б), то теперь уже вблизи максимума ЭПР возникают ошибки, обусловленные дискретизацией функции $I(T)$. При оптимальном пороге наблюдается плавный переход от результатов вычислений по формулам для частных случаев (37) – (40) к результатам вычислений по формуле для общего случая (35).

Далее рассмотрим результаты расчетов двухпозиционной диаграммы рассеяния вблизи максимума ЭПР, соответствующего прохождению конуса дифракционных лучей, представленные на рис. 10. На графиках также наблюдаются ошибки расчётов, получаемые при пятикратном увеличении и уменьшении порогового значения относительно оптимального.

При оптимальном пороге наблюдаются минимальные ошибки при переходе от результатов вычислений по формулам для частных случаев (37) – (39) к результатам вычислений по формуле для общего случая (35). При пятикратном превышении порогового значения p над оптимальным видны ошибки расчетов вдали от максимума ЭПР, вызванные возрастанием погрешностей полиномиальных аппроксимаций $I(T + \tau_i)$ при применении формулы Тейлора, рис.10а. При уменьшении порога в пять раз по сравнению с оптимальным ошибки, обусловленные дискретизацией функции $I(T)$, появляются вблизи максимума ЭПР, рис. 10б.

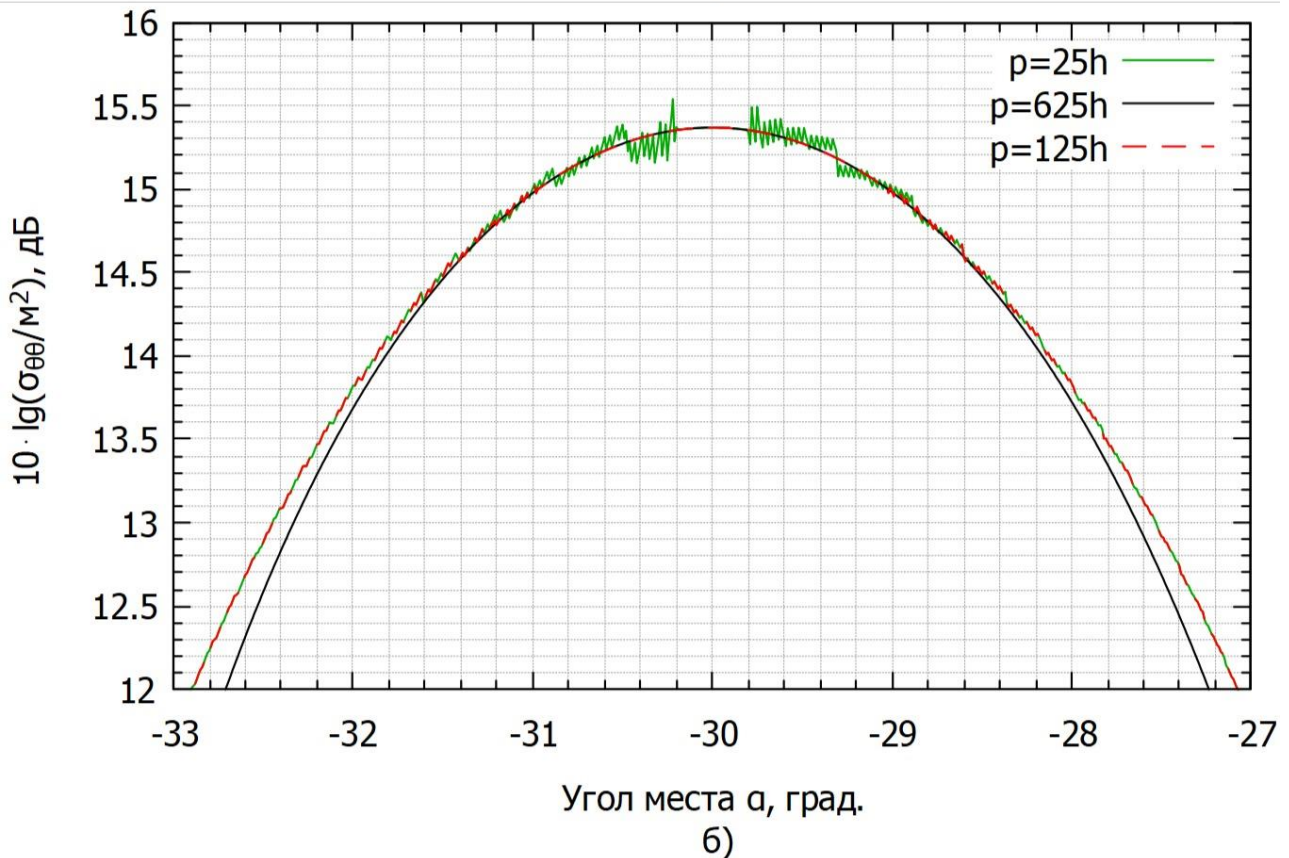
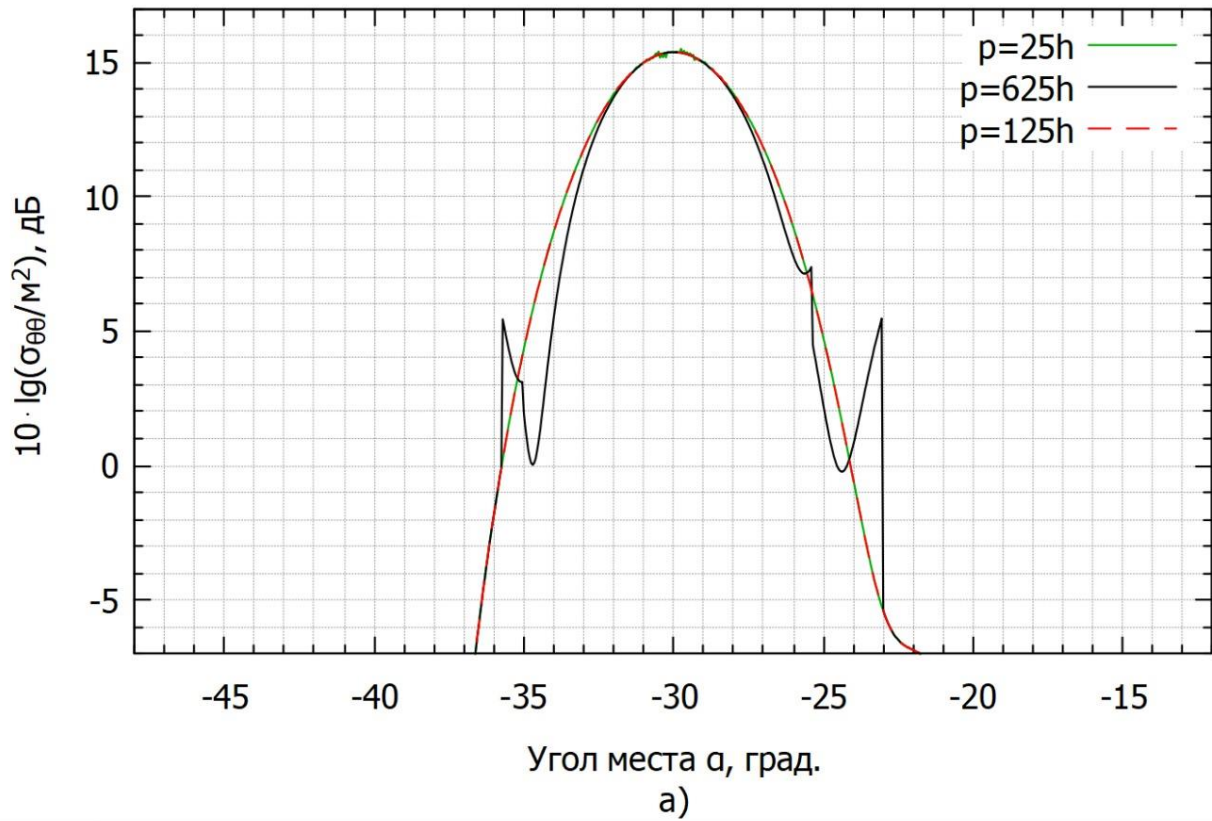


Рис. 9. Зависимости ЭПР треугольника от угла наблюдения вблизи теневого максимума, полученные из решения нестационарной задачи при $p = p_{\text{опт}}$, $p = 5p_{\text{опт}}$ и $p = p_{\text{опт}}/5$, где $p_{\text{опт}} = 125h$ – а), окрестность того же максимума в увеличенном в 6 раз масштабе – б).

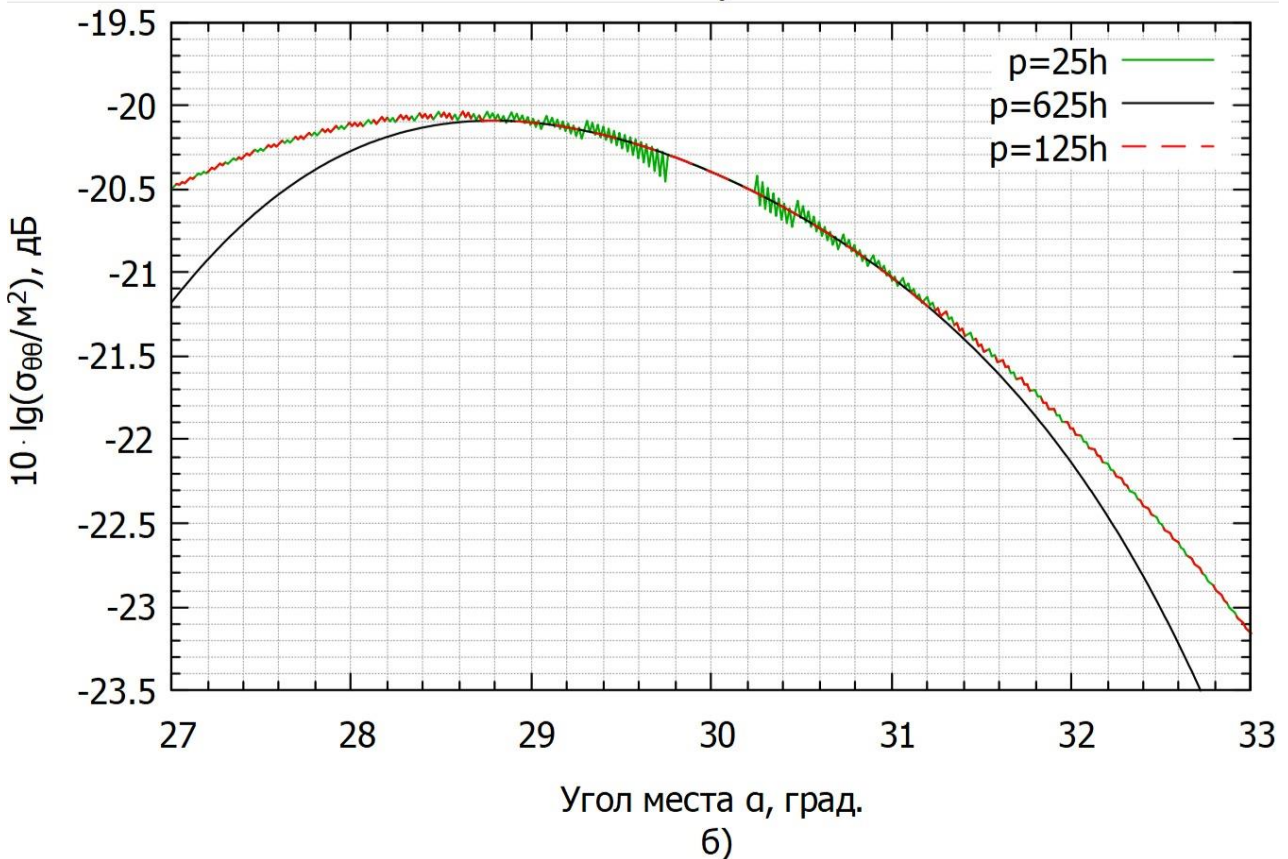
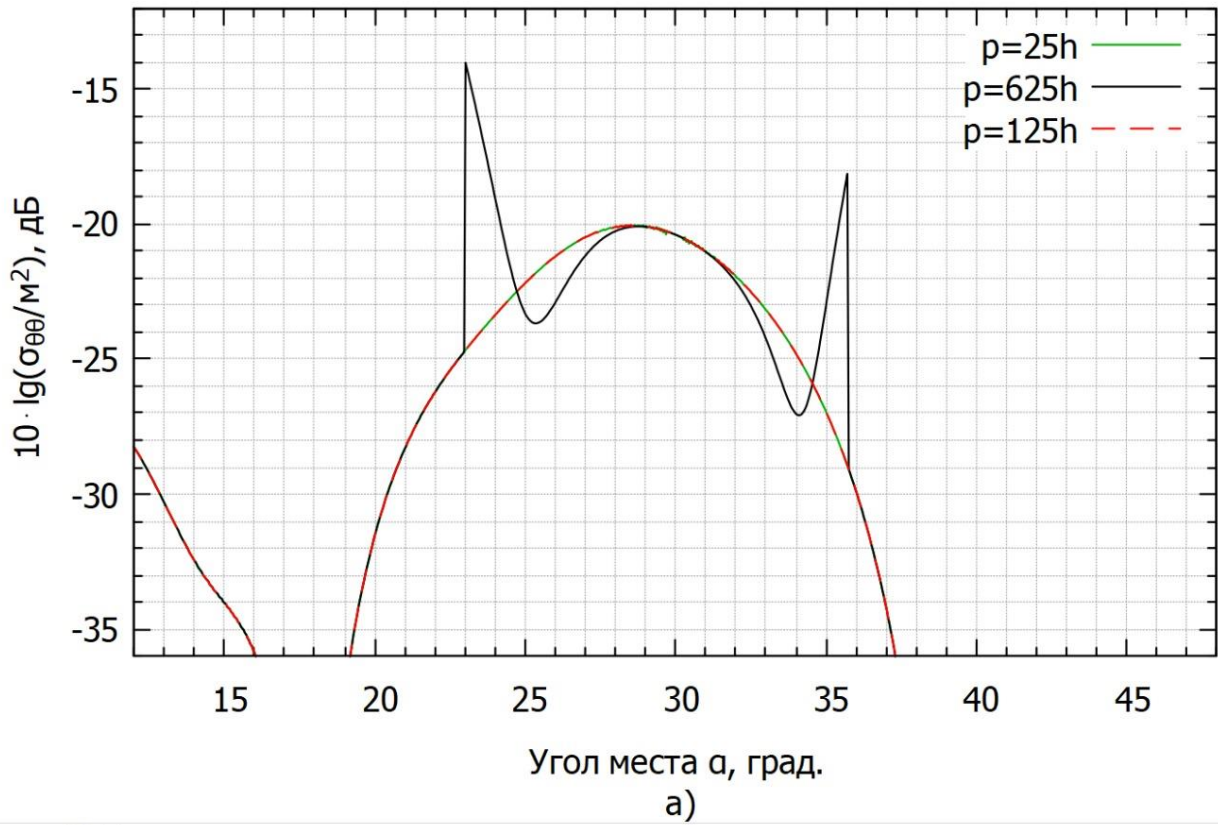


Рис. 10. Зависимости ЭПР треугольника от угла наблюдения вблизи максимума, достигаемого на конусе дифракционных лучей. Зависимости получены из решения нестационарной задачи при $p = p_{\text{опт}}$, $p = 5p_{\text{опт}}$ и $p = p_{\text{опт}}/5$, где $p_{\text{опт}} = 125h - a$, окрестность того же максимума в увеличенном в 6 раз масштабе – б).

Заключение

В работе получено аналитическое решение нестационарной задачи двухпозиционного рассеяния идеально проводящим треугольником в приближении физической оптики при произвольной зависимости падающего поля от времени. На этой основе разработана численная процедура расчёта поля рассеяния в дальней зоне, создаваемого треугольником также при произвольной временной зависимости падающего поля. Отличительной особенностью процедуры является сохранение точности расчетов для случаев рассеяния в направлениях, соответствующих конусам дифракционных лучей, в зеркальном и теневом направлениях, а также в малых угловых окрестностях указанных направлений. В перечисленных частных случаях интенсивность рассеяния достигает максимальных значений, однако вычисления по общей формуле невозможны и применяются полученные для этих случаев выражения для рассеянного поля.

Найдены и протестированы оптимальные пороговые условия для перехода с минимальными ошибками от вычислений рассеянного поля по общей формуле к вычислениям с использованием выражений для частных случаев рассеяния вблизи направлений достижения максимальных значений эффективной поверхности рассеяния, что особенно важно при оценке радиозаметности объектов.

Верификация точности вычислений с помощью разработанной процедуры была проведена для случая облучения треугольника радиоимпульсом. Расчеты показали, что в этом случае зависимость рассеянного поля от времени состоит из пяти интервалов осцилляций, соответствующих начальной, установившейся и конечной части рассеянного сигнала. Структура временного отклика треугольника объяснена движением области, формирующей рассеянное поле, по треугольнику. Было произведено сравнение диаграмм эффективной поверхности рассеяния, вычисленной по амплитуде рассеянного поля в установившемся режиме и полученной из решения соответствующей монохроматической задачи в пакете электродинамического моделирования

FEKO также в приближении физической оптики. Графическое совпадение диаграмм рассеяния в указанных двух случаях подтвердило работоспособность разработанного подхода.

Полученное в работе решение задачи двухпозиционного рассеяния идеально проводящим треугольником во временной области является этапом разработки пакета программ для комбинированного численного решения нестационарной задачи рассеяния протяженным сложным металлическим объектом при сложной зависимости падающего поля от времени. При этом рассеяние одной частью объекта будет определяться в приближении физической оптики, другой – в строгой численной постановке.

Литература

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва : Физматлит, 2012. – 536 с.
2. Лебедев А.М., Обухов М.Л., Селин И.А., Фурманова Т.А. Закономерности двухпозиционного рассеяния металлическим треугольником // Журнал радиоэлектроники. – 2019. – № 12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2019.12.15>
3. FEKO : electromagnetic simulation software : [сайт] / Altair Engineering, Inc. – Электронные данные. – Troy, Michigan, USA : Altair Engineering, Inc., 1997. – URL: <https://altair.com/feko>

Для цитирования:

Лебедев А.М., Суюндуков И.С. Аналитическое и численное решение нестационарной задачи рассеяния идеально проводящим треугольником в приближении физической оптики // Журнал радиоэлектроники. – 2026. – №. 4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.4.8>