

УДК 537.874; 537.624

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЖИМЕ УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ. ЧАСТЬ 2. ЛИНЕЙНАЯ СВЯЗЬ

А. П. Иванов¹, В. Г. Шавров², В. И. Щеглов²

¹ Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина,
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

² Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 9 июля 2017 г.

Аннотация. Продолжено рассмотрение задачи о возбуждении вынужденных нелинейных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Рассмотрение выполнено на основе модели двух связанных осцилляторов – нелинейного магнитного и линейного упругого. В рамках квадратичного приближения записана система из двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка. Связь каждого уравнения с другим обеспечивается членом, пропорциональным переменной другого уравнения. Для интерпретации развития колебаний в такой системе предложена модель, представляющая собой совокупность двух динамических потенциалов. Рассмотрена качественная картина развития колебаний в двухпотенциальной системе, имеющих место после включения возбуждения. Показано, что сочетание механизма синхронизации с процессом релаксации первого осциллятора приводит к запаздыванию возбуждения интенсивных колебаний относительно момента включения возбуждения. Рассмотрен процесс развития колебаний во времени в случае симметричной линейной связи между осцилляторами. Выявлено четыре наиболее характерных режима, соответствующих различным уровням параметра линейной связи по возрастанию: режим №1 – двухступенчатое запаздывание; режим №2 – плавное насыщение; режим №3 – перемежающиеся скачки; режим №4 –

малоамплитудная релаксация. В режиме №1 развитие колебаний после первичного запаздывания происходит путем двух следующих друг за другом резких возрастаний амплитуды. В режиме №2 развитие колебаний после первичного двухступенчатого запаздывания происходит путем плавного увеличения амплитуды с выходом на стационарный уровень. Режим №3 характеризуется двумя свойствами: амплитуда перемежающихся скачков более чем на два порядка меньше амплитуды установившихся колебаний в режиме №2, а после окончания скачков колебания происходят вокруг нового положения равновесия. Режим №4 имеет место только при весьма высоких значениях параметров линейной связи и характеризуется быстрым затуханием колебаний обоих осцилляторов с их собственными временами релаксации. Выполнена интерпретация наблюдаемых свойств этих режимов на основе двухпотенциальной модели. Показано, что несимметричность линейной связи не приводит к формированию каких-либо новых режимов колебаний, кроме рассмотренных при симметричной связи.

Ключевые слова: нелинейные колебания, магнитоупругое взаимодействие, потенциал.

Abstract. It is continued the investigation of task about excitation of forced nonlinear vibrations of magnetization and elastic displacement in normal magnetized ferrite plate having magnetoelastic properties. The investigation is made on basis of two connected oscillators – nonlinear magnetic and linear elastic. Using the quadratic approximation it is written the system of two connected second order differential equations. The connection between these equations is ensured by the formula part of one equation which is proportional to the variable quantity of other equation. For the explanation of the vibrations in this system development it is proposed the model which is consisted of combination of two dynamical potentials. It is investigated the qualitative picture of vibrations development which take place after the excitation is included. It is shown that the combination of synchronization mechanism with first oscillator relaxation process leads to delay of intensive vibrations excitation relatively to the excitation switch moment. It is investigated the process of development vibration in

time in the case of symmetrical linear connection between oscillators. It is found four most characteristic regimes corresponding to different levels of linear connection parameter along its increasing: regime №1 – two-steps delay; regime №2 – smooth saturation; regime №3 – intermittent jumps; regime №4 – small-amplitude relaxation. In the regime №1 the development of vibrations after first delay is occurs by two successive one to other sharp increasing of amplitude. In the regime №2 the development of vibrations after first two-steps delay is occurs by smooth amplitude increasing with going to the permanent level. The regime №3 is characterized by two properties: the intermittent jumps amplitude is more then two orders less then amplitude of permanent vibrations in regime №2, and after the end of jumps the vibrations continues around the new equilibrium position. The regime №4 take place only by very large values of linear connection and characterized by rapid fading of both oscillators vibrations with its own relaxation times. It is made the interpretation of observed properties of these regimes on the basis of two-potential model. It is shown that the non-symmetry of linear connection does not brought to formation of other new vibration regimes except of investigated in the case of symmetrical connection.

Key words: nonlinear vibrations, magnetoelastic interaction, potential.

Введение

Нелинейные нестационарные колебания намагниченности с давних пор являются предметом многочисленных исследований, частично обобщенных в [1-4]. Особый интерес представляют нелинейные процессы в средах, обладающих магнитоупругими свойствами [5-13]. Для описания нелинейных колебаний в таких средах в работах [14, 15] была предложена модель двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого. Развитие такой модели, выполненное в работах [16-19], позволило выявить ряд новых нестационарных режимов колебаний, в том числе автомодуляционного и стохастического характера. В работах [20-24] были рассмотрены нестационарные магнитоупругие колебания с использованием квадратичного приближения по намагниченности, что позволило значительно упростить численные вычисления. Важным моментом в изу-

чении рассматриваемых нестационарных явлений можно считать введение потенциала [25 26], позволившего интерпретировать различные режимы колебаний на основе анализа трехмерной потенциальной поверхности. Некоторые дополнительные особенности возбуждения нелинейных магнитоупругих колебаний были отмечены в режимах умножения и деления частоты [27,28].

В работе [29], являющейся первой частью настоящей работы, было рассмотрено возбуждение нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения на основе упрощенной модели из двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромангнитными свойствами. Получена система из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, отражающая связанный характер полной колебательной системы. Отмечена значительная роль нелинейного члена, содержащего произведение квадрата амплитуды колебаний магнитного осциллятора на первую степень амплитуды колебаний упругого осциллятора.

Показано, что в условиях умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого, при определенных значениях параметров возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. По окончании такого запаздывания происходит скачкообразный рост амплитуды колебаний на один-два порядка и более.

Для интерпретации эффекта запаздывания предложена гипотеза о наличии дополнительного минимума потенциала системы, отделенного от основного потенциальным барьером. Построена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора при использовании амплитуды второго осциллятора как параметра. Предложенная модель позволила описать пороговый характер реализации запаздывания и необходимость умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого.

Исследован характер запаздывания в широком интервале изменения амплитуды возбуждения. Выявлено пороговое значение амплитуды, превышение которого является необходимым условием реализации запаздывания. Исследована зависимость запаздывания и характера возбуждаемых колебаний от пара-

метра кубической нелинейности первого осциллятора. Отмечены нижний и верхний критические уровни параметра нелинейности, в пределах между которыми запаздывание имеет место, а вне этих пределов отсутствует.

Настоящая работа является дальнейшим продолжением этих исследований. В первую очередь будет уделено внимание характеру линейной связи между осцилляторами, а также ее роли в формировании различных режимов запаздывания возбуждения нестационарных колебаний.

1. Геометрия задачи

Геометрия задачи совпадает с принятой в работах [11-28] и подробно описана в [29]. Общая схема геометрии иллюстрируется рис.1.

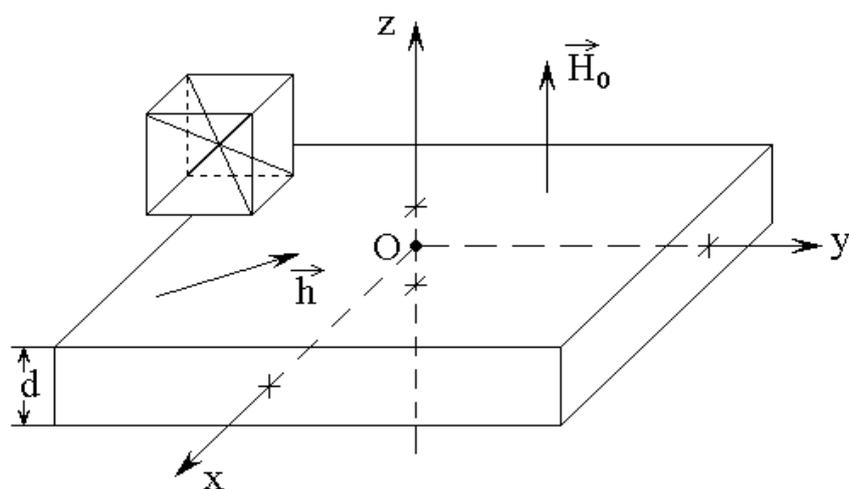


Рис.1. Геометрия задачи. Слева – схема кристаллографической ячейки.

В ее основе лежит безграничная плоскопараллельная пластина, обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Пластина намагничена постоянным полем, перпендикулярным ее плоскости. Переменное поле приложено в плоскости пластины и возбуждает в ней однородную прецессию намагниченности, которая, в свою очередь, приводит к возбуждению толщинных упругих колебаний поперечной поляризации.

2. Уравнения движения

В работе [29] приведена система уравнений, отражающая в квадратичном приближении возбуждение магнитоупругих колебаний на основе модели двух

связанных осцилляторов – магнитного и упругого. Будучи записанной в традиционных обозначениях общей теории колебаний [30, 31], эта система имеет вид:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (2)$$

В этой системе x_1 и x_2 – нормированные компоненты намагниченности и упругого смещения в плоскости пластины, β_1 и β_2 – параметры затухания той и другой компонент, ω_1 и ω_2 – собственные частоты осцилляторов, γ_1 и γ_2 – константы их линейной связи, δ – параметр кубической нелинейности первого осциллятора, η – параметр нелинейной связи первого осциллятора со вторым, A и ω_0 – амплитуда и частота переменного поля.

Явный вид этих коэффициентов и их выражение через параметры материала приведено в работе [24] и здесь опускается ввиду их некоторой громоздкости, не имеющей особенной важности для настоящего рассмотрения.

Из системы (1)-(2) видно, что нелинейным является первый осциллятор (1), представляющий собой эквивалент магнитной подсистемы, тогда как второй осциллятор (2), представляющий эквивалент упругой подсистемы, остается линейным. В отсутствие связи нелинейность первого осциллятора является кубической и описывается коэффициентом δ . Между осцилляторами имеют место два вида связи: линейная, описываемая коэффициентами γ_1 и γ_2 при переменных в первой степени, и нелинейная, имеющая единственный коэффициент η при произведении квадрата первой переменной на первую степень второй. Так что в общем случае эту нелинейную связь можно считать кубической.

3. Динамический потенциал

Для интерпретации решения системы уравнений (1)-(2) в работе [29] был введен динамический потенциал следующего вида:

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (3)$$

Дифференцирование этого выражения по x_1 дает потенциальную группу слагаемых уравнения (1). При этом переменную $\tilde{\delta}_2$ следует рассматривать как постоянный параметр.

Можно видеть, что записанный в таком виде потенциал является невзаимным, то есть при дифференцировании по второй переменной он дает слагаемое вида $\eta x_1^3 / 3$, которое в уравнении (1) отсутствует. Невзаимность потенциала означает, что он не является единым для системы в целом, а представляет собой совокупность двух потенциалов, каждого для своего осциллятора, и во втором потенциале член, содержащий слагаемое с коэффициентом, подобным η , отсутствует. То есть для описания движения системы в целом следует использовать два потенциала, каждый для своего осциллятора:

$$U_1 = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (4)$$

$$U_2 = \frac{\omega_2^2}{2} \cdot x_2^2 + \gamma_2 \cdot x_1 x_2. \quad (5)$$

С целью удобства терминологии далее будем называть такую модель «двухпотенциальной». При этом модель, описываемая потенциалом типа (3), становится «однопотенциальной».

Замечание. Невзаимность потенциала происходит из-за того, что система в целом представляет собой совокупность двух отдельных колебательных систем – магнитной и упругой, обладающих принципиально различными физическими свойствами. Так магнитная система обладает гиротропией, которая у упругой системы отсутствует. Именно свойство гиротропии позволяет исполь-

зовать магнитные материалы для создания невзаимных устройств СВЧ диапазона [32]. Более подробно невзаимность потенциала можно получить из явного вида коэффициентов, приведенных в работе [24]. Однако в рамках настоящей работы ограничимся предположением, что уравнения (1)-(2) описывают рассматриваемую задачу в достаточной степени адекватно.

В первой части настоящей работы [29] показано, что собственно запаздывание возбуждения в достаточной степени можно интерпретировать на основе потенциала вида (3). Однако, как будет показано далее, именно двухпотенциальная модель (4)-(5) более удобна для описания поведения системы после запаздывания. Относительно потенциала вида (3) в работе [29] отмечено, что его следует понимать в динамическом смысле. То есть величина его не остается стационарной во времени, а меняется в такт с изменением смещения второго осциллятора x_2 . При этом входящая в (3) величина x_2 является параметром, сохраняющимся постоянным на тот момент времени, когда уравнение (1) описывает колебания первого осциллятора. То есть по отношению к первому осциллятору, в формировании его потенциала участвует как бы «мгновенное» значение переменной x_2 , постоянное в данный момент времени. В случае двухпотенциальной модели (4)-(5) поведение системы более сложное, так что необходимо учитывать возможность изменения во времени переменной x_2 , происходящего за счет воздействия на нее первым осциллятором. Такое воздействие становится тем более сильным, чем величина связи между осцилляторами больше, поэтому оптимальной областью применимости двухпотенциальной модели является именно сильная связь между осцилляторами. Более подробно этот вопрос рассматривается далее.

4. Сведение двухпотенциальной модели к однопотенциальной

Предложенная выше двухпотенциальная модель (4)-(5) представляет собой совокупность двух потенциалов U_1 и U_2 , зависящих от двух переменных x_1 и x_2 . Однако, как показывает подробное рассмотрение развития колебаний

во времени, вторая переменная x_2 ведет себя, в основном, подобно первой x_1 с тем отличием, что амплитуда ее колебаний значительно (примерно на два порядка) меньше, чем первой. Вообще говоря, отличие имеется, однако незначительное, не более 10%, так что в первом приближении им можно пренебречь. Именно такое подобие позволило в работе [29] рассмотреть потенциал вида (3) с единственной переменной x_1 , рассматривая вторую x_2 в качестве параметра. То есть модель в этом случае была «однопотенциальной». Однако можно свести двухпотенциальную модель к однопотенциальной в более общем виде. Так, располагая слагаемые по степеням x_2 и разделяя все на $\omega_2^2/2$, запишем выражение (5) в виде:

$$x_2^2 + \frac{2\gamma_2 x_1}{\omega_2^2} \cdot x_2 - \frac{2U_2}{\omega_2^2} = 0. \quad (6)$$

Это – квадратное уравнение относительно x_2 , разрешая которое получаем:

$$x_2 = \frac{\gamma_2 x_1}{\omega_2^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right). \quad (7)$$

Здесь перед корнем взят знак плюс, исходя из условия положительности x_2 .

Подстановка полученного выражения в (4) дает потенциал, зависящий только от одной переменной x_1 :

$$U_1 = \left\{ \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\omega_2^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} \cdot x_1^2 + \left\{ \frac{\delta}{4} + \frac{\eta \gamma_2}{3\omega_2^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} \cdot x_1^4. \quad (8)$$

Это выражение не содержит второй переменной x_2 , так что параметром здесь является второй потенциал U_2 .

Можно видеть, что первое слагаемое содержит вторую степень от x_1 , а второе – четвертую степень от x_1 . То есть полное выражение является суммой двух парабол с четными степенями.

Численная оценка при принятых в [29] значениях параметров ($\omega_1 = 5$ н.е., $\omega_2 = 15$ н.е., $\gamma_1 = \gamma_2 = 10$ н.е., $\delta = 6$ н.е., $\eta = -200$ н.е.) и переменных $x_1 = 150$ н.е., $x_2 = 4$ н.е., соответствующих режиму запаздывания при условиях возбуждения $A = 50$ н.е., $\omega = 5$, показывает, что в выражении (8) решающую роль играет второе слагаемое (оно больше первого на 2-3 порядка). При этом четвертая степень x_1 обеспечивает растущие вверх две ветви параболы, симметричные относительно нуля с минимумом посередине. Однако второе слагаемое в скобках, содержащее отрицательный параметр нелинейной связи $\eta = -200$ н.е., благодаря наличию x_1^2 в знаменателе, резко растет вблизи нуля, и будучи отрицательным, обеспечивает инверсию знака параболы в этой области. В результате на параболе вблизи нуля вместо минимума появляется максимум, давая два минимума по обе стороны от этого максимума.

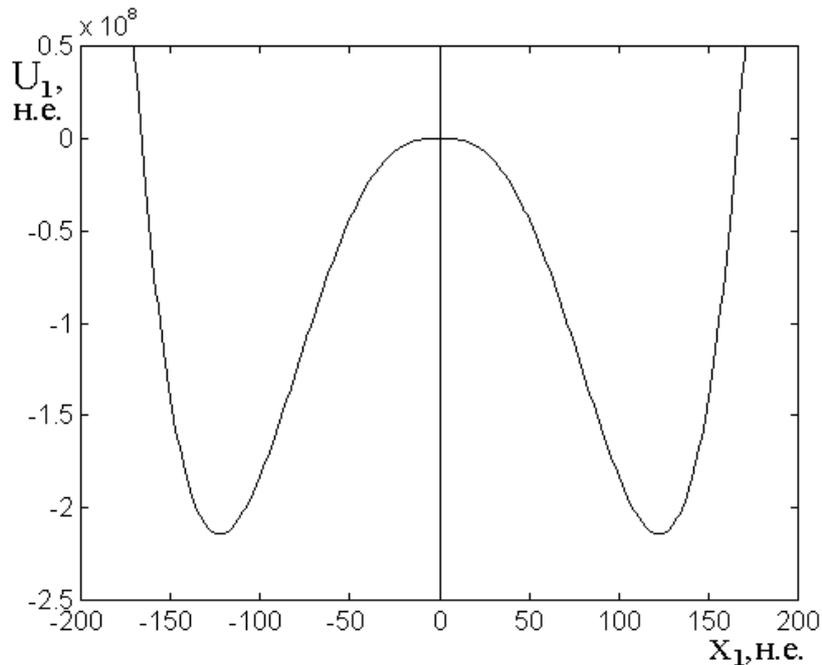


Рис.2. Зависимость потенциала U_1 от первой переменной x_1 , построенная по формуле (8).

Общий вид получающейся зависимости потенциала U_1 от переменной x_1 показан на рис.2. При построении кривой в качестве параметра использовалось значение потенциала $U_2 = 7800$ н.е., получаемое при подстановке принятых значений переменных в выражение (5).

Можно видеть, что приведенный на этом рисунке потенциал имеет вид, весьма близкий к кривой 4 на рис.4 в работе [29], соответствующей подобным величинам параметров. Небольшое отличие связано с конкретным выбором значений x_2 и δ .

5. Качественная картина колебаний в динамическом потенциале

Остановимся в двух словах на качественной картине колебаний первого осциллятора и формировании их запаздывания в условиях динамики потенциала. Итак, если бы вторая переменная менялась точно в такт с первой, то на каждый период первого колебания приходился бы такой же период второго и осцилляторы колебались бы полностью синхронно. То есть развитие колебаний после включения возбуждения происходило бы без задержки и определялось бы только временами релаксации осцилляторов. Однако при рассогласовании периодов колебаний того и другого осцилляторов, на один период первого осциллятора в разные моменты времени приходятся различные значения периодов второго осциллятора, то есть синхронизм нарушается. Такое рассогласование имеет место при различии собственных частот осцилляторов. Поэтому колебания со значительной амплитудой развиваться не могут. Однако при кратном соотношении частот, например в режиме умножения, синхронизм снова становится возможным, хотя и не точно на каждом такте колебаний, но через один, два или другое целое число раз. То есть снова становится возможным развитие колебаний с большой амплитудой. Однако такое развитие происходит только после того, как первичные, нарушающие синхронизм биения колебаний первого осциллятора, определяемые включением возбуждения, в достаточной степени затухнут. Если при этом колебания второго осциллятора еще сохраняют заметную амплитуду, что имеет место при превышении времени его релаксации

над временем релаксации первого осциллятора, то эти колебания как раз выступают в роли параметра, обеспечивающего развитие интенсивных колебаний первого осциллятора в сформированном таким образом динамическом потенциале.

Таким образом, условиями возбуждения колебаний со значительной амплитудой по прошествии определенного времени запаздывания является целочисленная кратность собственных частот осцилляторов и превышение времени релаксации второго осциллятора над временем релаксации первого. Более подробно эти условия предполагается обсудить в отдельной работе, а сейчас остановимся на роли связи между осцилляторами в формировании их общих колебаний.

6. Общий характер развития колебаний

В процессе исследования эффекта запаздывания было установлено, что в большинстве случаев развитие колебаний во времени происходит путем не одного, а двух следующих друг за другом скачков амплитуды. При этом в процессе первого скачка амплитуда возрастает на порядок и более, а в процессе второго – еще в два-три раза. Время установления амплитуды на стационарный уровень после того и другого скачка может различаться. Между скачками колебания могут как нарастать постепенно по закону экспоненты, так и нерегулярно меняться стохастическим образом. В некоторых случаях в установившемся режиме колебания имеют не простой синусоидальный, а двухамплитудный характер, образованный двумя синусоидами, наложенными друг на друга, причем вариации амплитуды могут достигать 20%. При достаточно сильной линейной связи развитие колебаний двумя скачками не ограничивается, а через некоторое время после второго скачка происходит плавный рост амплитуды, заканчивающийся новым стационарным уровнем, заметно (до двух-трех раз) более высоким, чем уровень между скачками. При еще более сильной связи наблюдается режим перемежающихся скачков, через некоторое время переходящий в стационарный режим со смещенным положением нуля и малой амплитудой.

Вследствие столь сложного характера колебаний, настоящая работа на данном этапе не преследовала целью изучение тонкой структуры развития колебаний во времени, поэтому из всего многообразия режимов были выделены лишь основные, которые и рассматриваются далее. Будем следить за развитием колебаний только первого осциллятора. Колебания второго осциллятора имеют сходный вид, отличаясь лишь значительно (примерно на два порядка) меньшей амплитудой, поэтому отдельно не рассматриваются.

Из всей совокупности различных режимов можно выделить четыре наиболее характерных, соответствующих различным уровням параметра линейной связи. Условно будем называть эти режимы «двухступенчатым запаздыванием», «плавным насыщением», «перемежающимися скачками» и «малоамплитудной релаксацией». Рассмотрим их по очереди.

7. Режим №1. Двухступенчатое запаздывание

Развитие колебаний в этом режиме показано на рис.3. Этот режим в чистом виде имеет место в интервале параметра γ от примерно 4 н.е. до 30 н.е.

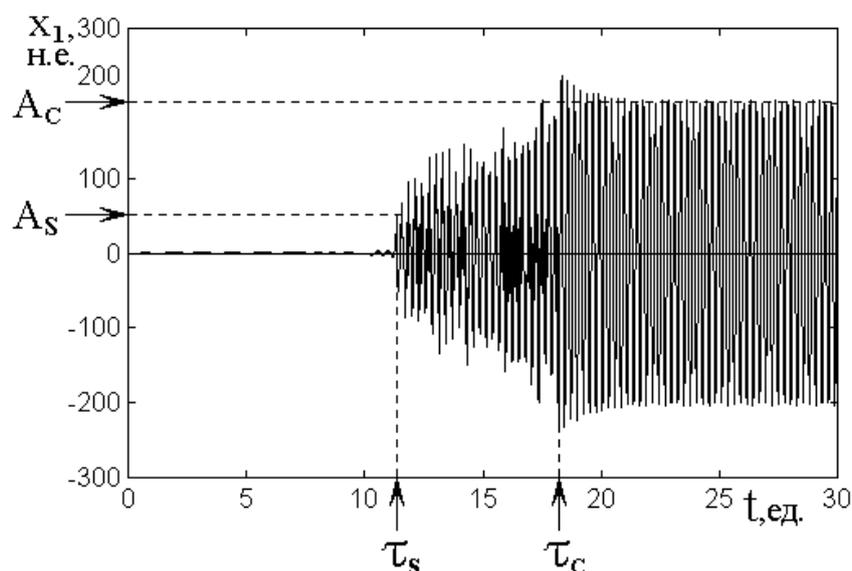


Рис.3. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значении параметра линейной связи $\gamma = 10$ н.е. Параметр кубической нелинейности $\delta = 6$ н.е., параметр нелинейной связи $\eta = -200$ н.е., амплитуда возбуждения $A = 50$ н.е. Остальные параметры указаны в тексте.

При больших значениях этого параметра он постепенно вытесняется режимом плавного насыщения, а при значениях параметра выше 200-300 н.е. совсем пропадает, освобождая место режиму перемежающихся скачков.

В качестве основных параметров, характеризующих развитие колебаний, были выбраны следующие:

τ_S – момент времени первого (основного) скачка, то есть собственно время запаздывания в принятом ранее смысле;

A_S – амплитуда, достигаемая непосредственно в момент первого скачка;

τ_C – момент времени второго скачка;

A_C – амплитуда стационарных колебаний, устанавливающихся сразу после второго скачка.

Из рисунка можно видеть, что до момента времени τ_S амплитуда колебаний крайне мала (менее 1 н.е.), а в этот момент резким скачком увеличивается до величины A_S равной 50 н.е. Затем до момента τ_C амплитуда слегка медленно растет, составляя в конце этого периода около 130 н.е. В момент τ_C происходит еще один резкий скачок амплитуды до 230 н.е., после которого она быстро приходит к стабильному уровню, ограничиваясь на высоте A_C равной 200 н.е. Таким образом, имеют место следующие друг за другом два скачка амплитуды: при временах τ_S и τ_C , где τ_C превышает τ_S почти в два раза. Однако скачок амплитуды при τ_S происходит примерно на два порядка величины, тогда как скачок при τ_C – всего не более чем в полтора раза.

Рассмотрим, как зависят параметры скачков от величины линейной связи. Обратимся к рис.4, где представлены зависимости времени запаздывания первого τ_S и второго τ_C скачков амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра линейной связи γ . Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1:

$$\tau_S = \frac{60}{\gamma - 3.5} + 1.4; \quad (9)$$

кривая 2:

$$\tau_C = \frac{120}{\gamma - 3.5} + 2.1. \quad (10)$$

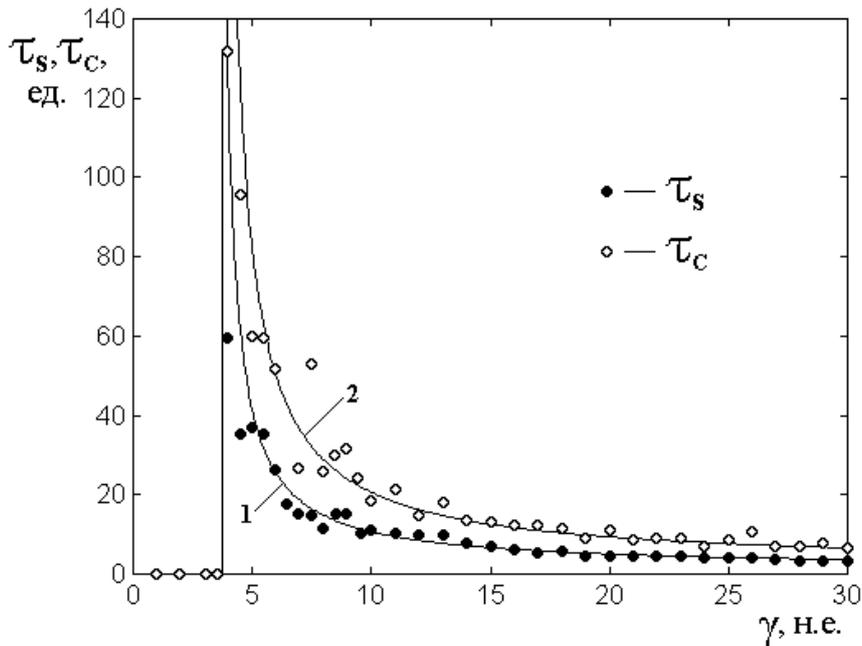


Рис.4. Зависимости времени запаздывания первого τ_S и второго τ_C скачков амплитуды колебаний первого осциллятора от величины параметра линейной связи γ .

1, 2 – аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (9) и (10).

Из рисунка можно видеть, что оба скачка имеют место только при превышении параметром связи определенного критического значения, равного 3.5 н.е. То есть в интервале $0 < \gamma < 3.5$ н.е. запаздывание возбуждения колебаний отсутствует. При переходе через это значение время запаздывания, начинаясь с довольно больших времен τ_S и τ_C порядка 80-140 н.е., постепенно спадает, составляя при $\gamma = 30$ н.е. менее 10 н.е. Время второго скачка τ_C всегда превышает время первого τ_S в два-три раза, причем спад обоих времен по мере

увеличения параметра связи γ происходит тем медленнее, чем этот параметр больше. В среднем обе зависимости довольно близко аппроксимируются формулами обратной пропорциональности (9) и (10). Однако в интервале изменения γ от 5 до 10 н.е. оба времени, особенно τ_C , испытывают резкие скачки, достигающие двух раз и более. Характер скачков более подробно поясняется рис.5, где показаны фрагменты зависимостей, приведенных на рис.4 в более крупном масштабе по горизонтальной оси.

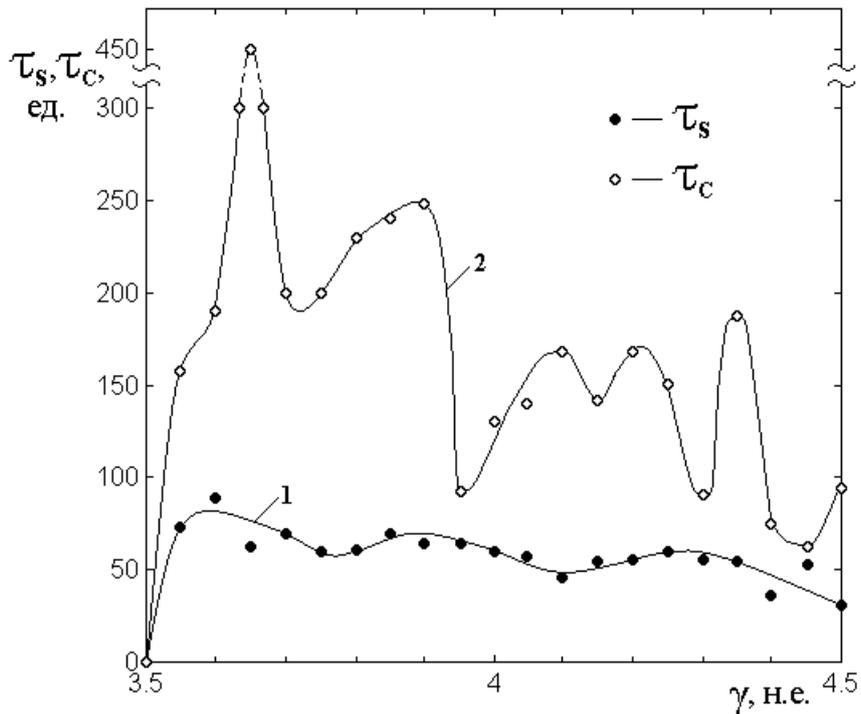


Рис.5. Фрагменты зависимостей, приведенных на рис.4, в более крупном масштабе.

Кривые 1 и 2 проведены приближенно через точки.

Из рисунка видно, что обе кривые, как и прежде, начинаются от нуля при критическом значении $\gamma = 3.50$ н.е., после чего уже при $\gamma = 3.65$ н.е. время τ_C испытывает резкий взлет вплоть до 450 н.е., а при $\gamma = 3.70$ н.е. спадает до 200 н.е. Затем эта зависимость снова растет, потом убывает и также далее испытывает значительные колебания вплоть до конца рассматриваемого интервала значений γ . Можно видеть, что аппроксимирующая кривая 2 на рис.4 этих

скачков не отражает. То есть реальная зависимость, в отличие от аппроксимирующей, имеет характер, близкий к фрактальному [33, 34]. В то же время, зависимость τ_S от γ изрезана значительно менее. Эта зависимость также претерпевает некоторые скачки, однако можно полагать, что в среднем, особенно при $\gamma \geq 10$ н.е., определяется кривой 1 на рис.4 вполне удовлетворительно.

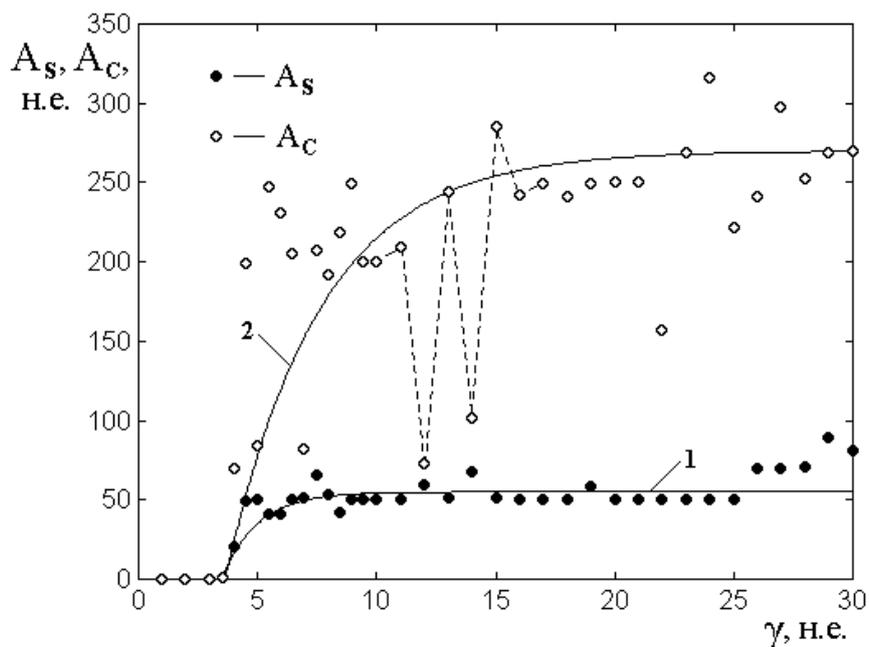


Рис.6. Зависимости характеризующих скачки амплитуд A_S и A_C от величины параметра линейной связи γ . Пунктиром показаны некоторые скачки амплитуды A_C при изменении γ на малую величину.

1, 2 – аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (11) и (12).

Обратимся теперь к рис.6, где приведены зависимости амплитуд запаздывающих переменных A_S и A_C от величины параметра линейной связи. Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1:

$$A_S = 55 - 125 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{1.5} + 1.5\right); \tag{11}$$

кривая 2:

$$A_C = 270 - 15 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{4.0} + 3.8\right), \quad (12)$$

где структура обеих формул соответствует зависимости типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем».

Из рисунка можно видеть, что и здесь обе зависимости испытывают скачки, особенно сильно выраженные для амплитуды A_C . Некоторые из таких скачков показаны пунктиром. Следует заметить, что здесь, в отличие от зависимостей для времени запаздывания, скачки имеют место во всем интервале изменения параметра γ . Как и в предыдущем случае скачки амплитуды A_S значительно меньше, чем амплитуды A_C , однако и здесь они наблюдаются вплоть до конца интервала по γ . Таким образом, можно полагать, что аппроксимирующие кривые 1 и 2, хотя и проходят через области максимального сгущения точек, но все же отражают реальные зависимости только в среднем.

Дополнительной иллюстрацией характера скачков является рис.7, где приведены фрагменты тех же зависимостей, что и на рис.6, но в более крупном масштабе по горизонтальной оси.

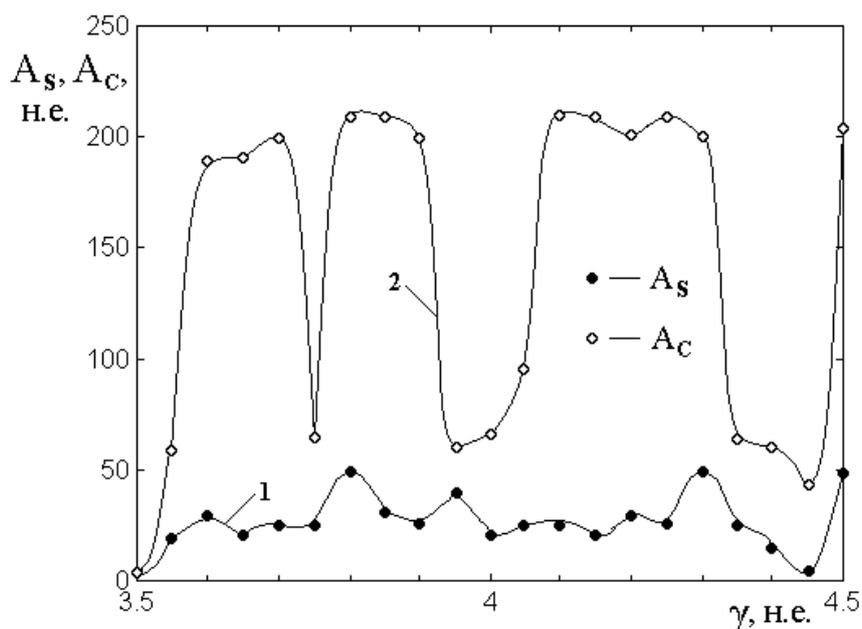


Рис.7. Фрагменты зависимостей, приведенных на рис.6 в более крупном масштабе. Кривые 1 и 2 проведены приближенно через точки.

Можно видеть, что здесь, как и в случае времен τ_S и τ_C (рис.5), зависимость для амплитуды A_C изрезана значительно сильнее, чем для амплитуды A_S . Видимо, и здесь можно говорить о фрактальном характере приведенных зависимостей.

Довольно красочной иллюстрацией к сказанному, по-видимому, может служить рис.8, где показано развитие колебаний первого осциллятора во времени при различных значениях константы линейной связи γ , отличающихся на весьма малую величину – всего 0.1 н.е., то есть около 2.5% от средней величины равной 4.0 н.е.

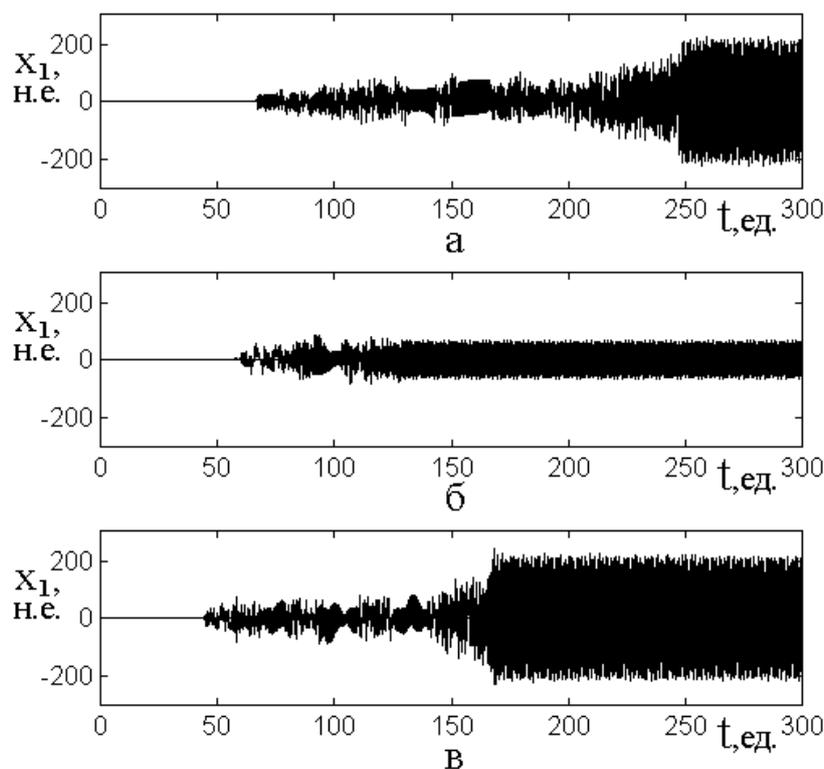


Рис.8. Развитие колебаний первого осциллятора во времени при различных значениях константы линейной связи γ .

а – 3.9 н.е.; б – 4.0 н.е.; в – 4.1 н.е.

Остальные параметры совпадают с принятыми на предыдущих рисунках.

Можно видеть, что при таком незначительном изменении γ (сверху вниз по рисунку) время первого скачка меняется мало: от 60 н.е. до 64 н.е., тогда как

время второго скачка меняется очень сильно: от 250 н.е., через 130 н.е. до 170 н.е. При этом амплитуда колебаний между скачками также меняется незначительно, тогда как установившаяся амплитуда после второго скачка меняется от 200 н.е. через 66 н.е. снова на 200 н.е.

Замечание. Примечательным моментом является тот факт, что во всех приведенных на рис.8 случаях колебания между первым и вторым скачками являются сильно нерегулярными, то есть имеют близкий к шумовому стохастический характер. Здесь этот вопрос далее не рассматривается, однако можно полагать, что его изучение, особенно в сочетании с фрактальным характером приведенных кривых, представляет интерес для отдельной работы.

8. Режим №2. Плавное насыщение

Развитие колебаний в этом режиме показано на рис.9. Этот режим в чистом виде имеет место в интервале параметра γ от примерно 30 н.е. до 200-300 н.е. При больших значениях этого параметра режим плавного насыщения сменяется режимом перемежающихся скачков.

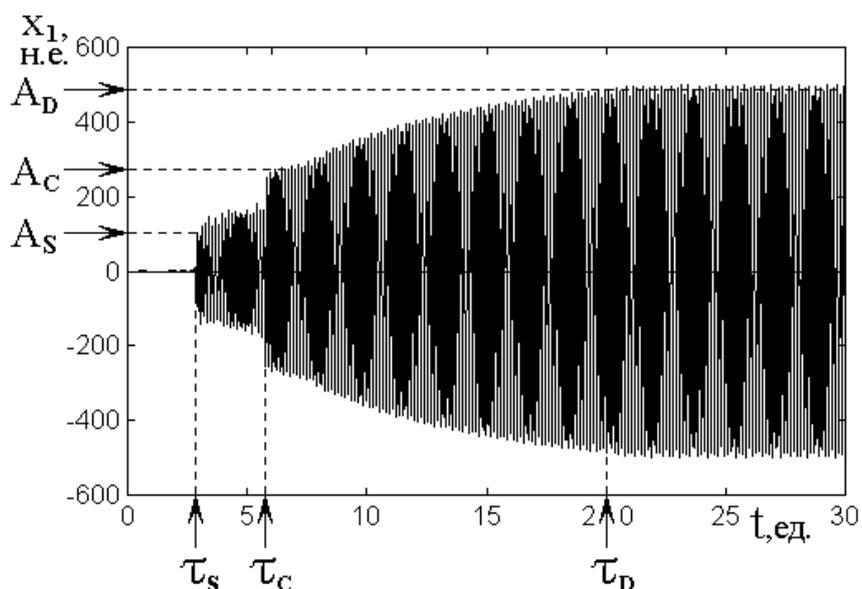


Рис.9. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значении параметра линейной связи $\gamma = 50$ н.е.

Параметр кубической нелинейности $\delta = 6$ н.е., параметр нелинейной связи $\eta = -200$ н.е., амплитуда возбуждения $A = 50$ н.е. Остальные параметры указаны в тексте.

В качестве основных параметров, характеризующих развитие колебаний, к введенным ранее временам τ_S , τ_C и амплитудам A_S , A_C , были добавлены следующие:

τ_D – время выхода колебаний на стационарный уровень в случае плавного роста после второго скачка;

A_D – амплитуда колебаний, устанавливающихся после второго скачка по окончании процесса плавного роста.

Из рисунка можно видеть, что до момента времени τ_C и даже несколько далее, примерно до 7 ед. времени, колебания ведут себя полностью подобно рассмотренным на рис.3, то есть имеет место режим двухступенчатого запаздывания. Однако по прошествии этого времени амплитуда колебаний после второго скачка не остается постоянной, а начинает плавно расти по закону, близкому к экспоненциальному (то есть единица минус экспонента с отрицательным показателем). Такой рост заканчивается выходом на насыщение при времени τ_D , после чего амплитуда более не меняется. Можно видеть, что время выхода на насыщение τ_D превышает время второго скачка τ_S примерно в три раза, а установившаяся при этом амплитуда A_D превышает начальную A_S в два раза. То есть обе характеристики, как временная, так и амплитудная, меняются в несколько раз, что и явилось причиной выделения такого развития колебаний в отдельный режим.

Рассмотрим, как зависят параметры этого режима от величины линейной связи. Обратимся к рис.10, где представлены зависимости времени запаздывания первого скачка τ_S и времени установления второй стационарной амплитуды

ды τ_D от величины параметра линейной связи γ . Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1:

$$\tau_S = \frac{80}{\gamma - 3.5}; \quad (13)$$

кривая 2:

$$\tau_C = \frac{1100}{\gamma - 4.2} - 4.0. \quad (14)$$

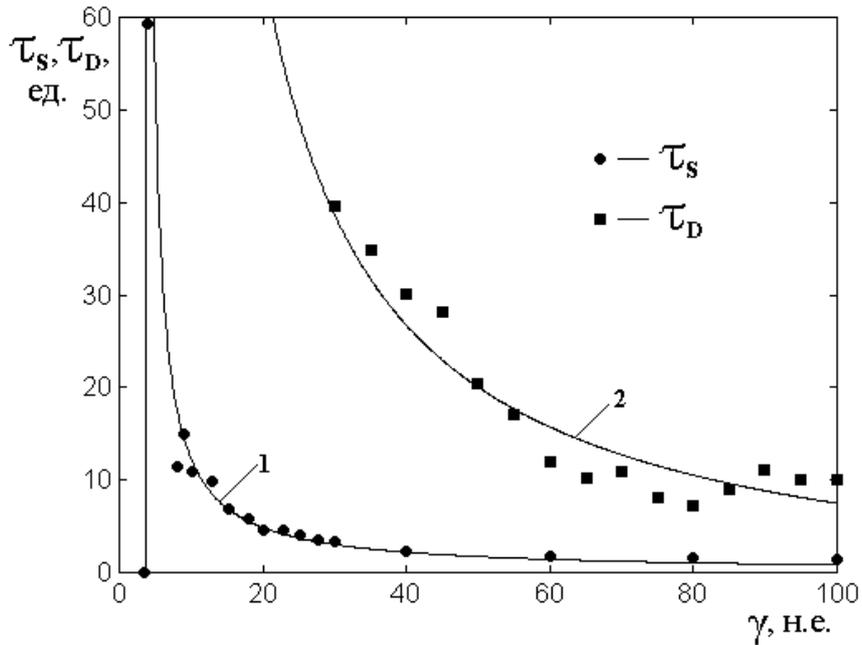


Рис.10. Зависимости времени запаздывания первого скачка τ_S и времени установления второй стационарной амплитуды τ_D первого осциллятора от величины параметра линейной связи γ .

1, 2 – аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (13) и (14).

Из рисунка можно видеть, что плавное насыщение имеет место только при превышении параметром связи определенного критического значения, близкого к 30 н.е. То есть ниже этого значения амплитуда после второго скачка остается постоянной и плавное насыщение отсутствует. Время второго уста-

новления амплитуды τ_D всегда превышает время второго скачка τ_S примерно на порядок. Аппроксимирующие функции для обоих времен (13) и (14) носят характер обратной пропорциональности. При значении параметра связи менее 15 н.е. зависимость времени τ_S от γ имеет скачки, подробно обсужденные при описании предыдущего режима, однако далее вплоть до значения $\gamma = 100$ н.е. эти скачки почти отсутствуют. Зависимость времени τ_D от γ в некоторых местах (например при 45, 65, 89 и 90 н.е.) несколько (до 30%) отклоняется от аппроксимирующей кривой 2, однако эти скачки резкими не являются и фрактального характера не носят. Таким образом, можно полагать, что в целом зависимость τ_D от γ ведет себя гораздо «спокойнее», чем подобная зависимость для τ_S .

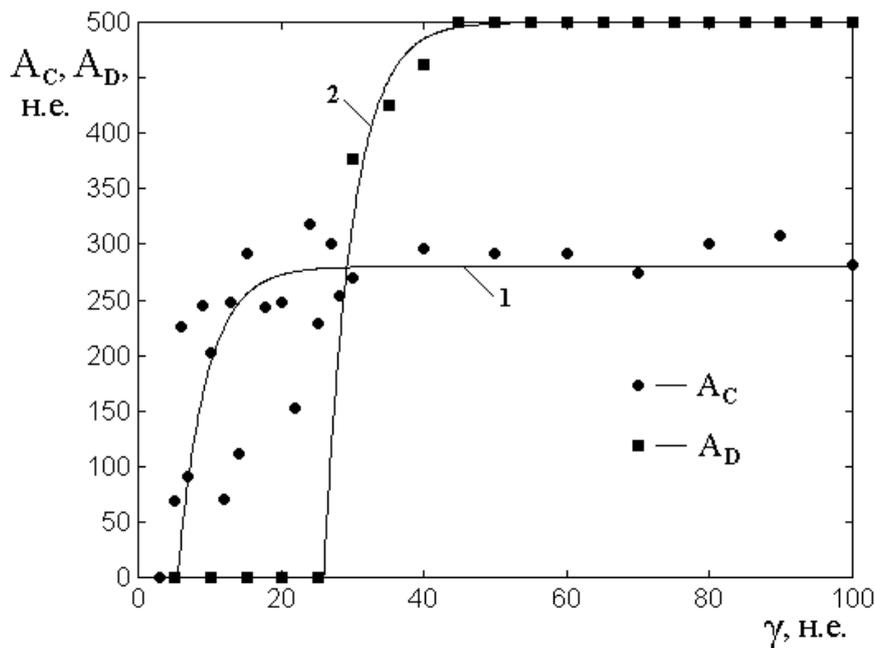


Рис.11. Зависимости установившейся амплитуды первого скачка A_C и установившейся второй стационарной амплитуды A_D от величины параметра линейной связи γ .

1, 2 – аппроксимирующие кривые, построенные по формулам (15) и (16).

Обратимся теперь к рис.11, где приведены зависимости установившейся амплитуды первого скачка A_C и установившейся второй стационарной ампли-

туды A_D от величины параметра линейной связи γ . Аппроксимирующие кривые построены по формулам:

кривая 1:

$$A_C = 280 - 15 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{4.0} + 4.3\right); \quad (15)$$

кривая 2:

$$A_D = 500 - 15 \cdot \exp\left(-\frac{\gamma}{4.0} + 10.0\right), \quad (16)$$

где структура обеих формул соответствует зависимости типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем».

Из рисунка можно видеть, что зависимость A_C от γ при $\gamma < 30$ н.е. претерпевает многочисленные скачки, подробно рассмотренные выше, однако по превышении γ этого значения скачки значительно стихают и вплоть до $\gamma = 100$ н.е. составляют менее 10%. Зависимость A_D от γ , исходя из нуля при $\gamma \approx 30$ н.е., стремится вверх достаточно плавно, а начиная с $\gamma = 45$ н.е. выходит на постоянный уровень равный 500 н.е. и далее совершенно не меняется. Таким образом, и здесь вторая стационарная амплитуда A_D ведет себя значительно «спокойнее», чем амплитуда первого скачка A_C .

9. Режим №3. Перемежающиеся скачки

Развитие колебаний в этом режиме показано на рис.12. Этот режим в чистом виде имеет место в интервале параметра γ более 200-300 н.е. Иллюстрацией развития колебаний в этом режиме является рис.12, соответствующий $\gamma = 300$ н.е.

В качестве параметров, характерных для этого режима, можно отметить следующие:

τ_P – время окончания режима перемежающихся скачков;

A_P – амплитуда перемежающихся скачков;

x_{1P} – значение переменной x_1 , соответствующее нулевой линии колебаний, устанавливающихся после окончания перемежающихся скачков.

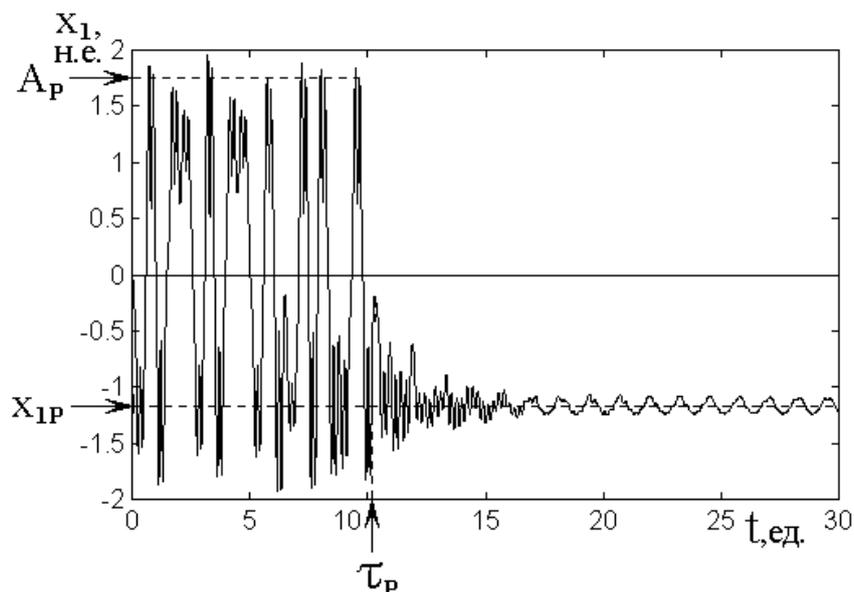


Рис.12. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значении параметра линейной связи $\gamma = 300$ н.е. Параметр кубической нелинейности $\delta = 6$ н.е., параметр нелинейной связи $\eta = -200$ н.е., амплитуда возбуждения $A = 50$ н.е. Остальные параметры приведены в тексте.

Из рассмотрения рисунка можно видеть, что характерным свойством этого режима можно считать резкое уменьшение амплитуды колебаний по сравнению с предыдущими режимами. Из сравнения этого рисунка с рис.3 и рис.9 можно видеть, что такое падение амплитуды происходит примерно на три порядка. Другим характерным свойством режима, резко отличающим его от других, является сдвиг равновесного положения колебаний с нуля на значение $x_{1R} = -1.2$ н.е., вокруг которого колебания происходят далее с весьма малой амплитудой – около 0.1 н.е. Следует отметить, что подобное же изменение равновесного положения происходит и для другого осциллятора. Так в условиях, соответствующих рис.12, после прекращения скачков колебания малой амплитуды происходят вокруг положения $x_{1R} = -1.1$ н.е.

При изменении γ в пределах от 200 н.е. до 800 н.е. заметные вариации времени τ_P не наблюдались. Это время всегда оставалось в интервале от 7 до 12 н.е. Также амплитуда перемежающихся скачков A_P менялась мало – от 1.5 до 2.0 н.е. Более подробное описание режима перемежающихся скачков требует отдельного исследования. Приведем лишь наиболее заметные его свойства.

Прежде всего следует отметить, что по мере увеличения γ режим плавного насыщения несколько трансформируется. Так после $\gamma = 100$ н.е. амплитуда насыщения A_D с величины 500 н.е. начинает плавно увеличиваться и при $\gamma = 200$ н.е. составляет уже 900 н.е. Затем рост амплитуды ускоряется и при $\gamma = 212$ н.е. она достигает 1100 н.е. Однако уже при $\gamma = 213$ н.е. амплитуда резко падает на три порядка до значения 1.5 н.е., что сопровождается сдвигом равновесного положения переменной x_I с нуля на значение $x_{IR} = -0.9$ н.е. То есть наступает режим перемежающихся скачков. Скачки заканчиваются при времени $\tau_P = 10$ ед., а дальнейшие колебания происходят вокруг нового положения равновесия с амплитудой около 0.1 н.е. При $\gamma = 213$ н.е. наблюдается всего один скачок, а по мере увеличения γ число скачков увеличивается и при $\gamma = 300$ н.е. достигает восьми, как это видно из рис.12. Возбуждение режима перемежающихся скачков по γ не является необратимым. Так при $\gamma = 214$ н.е. система снова возвращается к режиму плавного насыщения с величиной A_D равной 1500 н.е. Однако уже при $\gamma = 215$ н.е. колебания снова происходят в режиме перемежающихся скачков с амплитудой около 0.8 н.е. и сдвигом равновесного положения до -0.9 н.е. Если пренебречь таким возвращением, то можно считать, что режим перемежающихся скачков по γ имеет резкий пороговый характер – между 213 и 215 н.е., или в среднем при $\gamma = 214$ н.е. Следует отметить, что в этом режиме равновесное положение второго осциллятора также смещается и при $\gamma = 225$ н.е. составляет около $x_{2R} = 1.0$ н.е.

10. Режим №4. Малоамплитудная релаксация

Дальнейшее увеличение параметра связи при величине около 800 н.е. приводит к срыву режима перемежающихся скачков и переходу к новому режиму, который можно условно назвать «режимом малоамплитудной релаксации». При этом колебания как первого, так и второго осцилляторов происходят так, как если бы они возбуждались не непрерывным переменным сигналом, а ударным образом в начальный момент времени включения возбуждения. То есть те и другие колебания спадают со своими временами релаксации, для осциллятора x_1 равного 2.2 ед. времени, а для осциллятора x_2 – 22 ед. времени. По прошествии процесса релаксации те и другие колебания затухают не полностью, а продолжают непрерывно с малой амплитудой (менее 0.1 н.е.).

Замечание. В режиме релаксации, как и в режиме перемежающихся скачков, колебания обоих осцилляторов происходят с весьма малой амплитудой, на два-три порядка меньшей, чем в предшествующих им по силе связи режимах. Настоящая работа посвящена в первую очередь режимам с высокой амплитудой колебаний. Поэтому здесь эти режимы подробно не исследовались. В дальнейшем их изучению предполагается посвятить отдельную работу.

11. Интерпретация развития колебаний на основе модели динамического потенциала

Рассмотрим интерпретацию описанных выше режимов колебаний на основе модели динамического потенциала. Прежде всего отметим, что первичный скачок амплитуды, то есть собственно запаздывание развития колебаний, уже объяснен в первой части настоящей работы [29] и здесь дополнительной интерпретации не требует. Что касается второго скачка, то он, во-первых, выражен значительно (на два порядка) слабее первого и, во-вторых, проявляется не всегда, и часто стохастическим образом, поэтому на данном этапе подробно рассматривать его не будем. В то же время, смена режима плавного насыщения режимом перемежающихся скачков происходит пороговым образом и весьма резко: амплитуда падает более чем на два порядка и

центральное положение колебаний с нуля резко смещается в сторону. Поэтому основное внимание уделим этим двум моментам: смещению центрального положения колебаний и падению их амплитуды.

12. Смещение центрального положения

Согласно общим правилам физики колебаний, любые периодические движения происходят вокруг определенного среднего положения. По завершению процесса релаксации система приходит как раз в это среднее положение и остается в нем бесконечно долго, так что его можно назвать стационарным или равновесным состоянием. В рассмотренных в предыдущих разделах режимах колебаний таких состояний можно насчитать два. В процессе двухступенчатого запаздывания и плавного насыщения такому состоянию соответствует нулевое значение той или иной переменной. В режиме перемежающихся скачков сначала колебания, то есть собственно скачки, происходят также вокруг нуля, но затем, по окончании первичных скачков, система продолжает с небольшой амплитудой колебаться вокруг нового центра, от нуля значительно смещенного.

Для интерпретации смещения центра колебаний воспользуемся моделью двух потенциалов (4)-(5). Будем считать, что колебания происходят вокруг стационарного состояния, которое соответствует одновременному минимуму обоих потенциалов (4) и (5), то есть равенству нулю их производных:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \omega_1^2 x_1 + \gamma_1 x_2 + \delta x_1^3 + \eta x_1^2 x_2 = 0; \quad (17)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x_2} = \omega_2^2 x_2 + \gamma_2 x_1 = 0. \quad (18)$$

Выражая из второго равенства x_2 через x_1 и подставляя в первое, получаем:

$$x_1 \cdot \left\{ \left(\omega_1^2 - \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\omega_2^2} \right) + \left(\delta - \frac{\eta \gamma_2}{\omega_2^2} \right) \cdot x_1^2 \right\} = 0. \quad (19)$$

Это уравнение определяет два возможных положения минимума:

$$1) x_1 = 0; \quad (20)$$

$$2) x_1 = \sqrt{\frac{\gamma_1 \gamma_2 - \omega_1^2 \omega_2^2}{\delta \omega_2^2 + |\eta| \cdot \gamma_2}} \quad (21)$$

Действительность переменной x_1 требует положительности подкоренного выражения в (21). Положим для простоты $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ и рассмотрим вспомогательную функцию:

$$G(\gamma) = \frac{\gamma^2 - \omega_1^2 \omega_2^2}{\delta \omega_2^2 + |\eta| \cdot \gamma} \quad (22)$$

Зависимость этой функции от γ при принятых ранее значениях параметров, показана на рис.13.

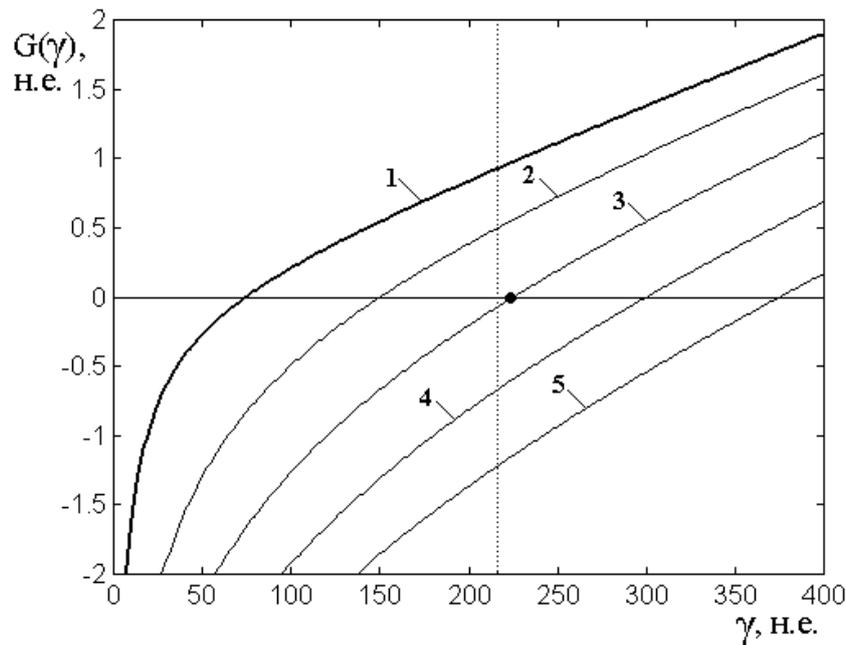


Рис.13. Зависимость функции G от γ при различных значениях коэффициента

K_S : 1 – 1 н.е.; 2 – 2 н.е.; 3 – 3 н.е.; 4 – 4 н.е.; 5 – 5 н.е.

Вертикальная точечная линия соответствует критическому значению γ при котором наступает смещение равновесного положения в соответствии с рис.12.

Параметры: $\omega_1 = 5$ н.е., $\omega_2 = 15$ н.е., $\delta = 6$ н.н., $\eta = -200$ н.е.

Зависимость, построенная точно по формуле (22), соответствует кривой 1 (показана утолщенной линией). Можно видеть, что при $\gamma < 53$ н.е. эта кривая проходит ниже нулевой линии. То есть в этом случае минимум потенциала соответствует решению (20), при котором равновесное положение равно нулю. При $\gamma > 53$ н.е. кривая 1 проходит выше нулевой линии, то есть минимум потенциала соответствует решению (21), так что равновесное положение относительно нуля смещено на величину, равную $\sqrt{G(\gamma)}$. При $\gamma = 300$ н.е. такое смещение составляет примерно 1.2 н.е., что с точностью до знака довольно близко соответствует значению $x_{IP} = -1.1$ н.е., приведенному на рис.12. Заметим, что знак здесь роли не играет, ибо корень в формуле (21) может иметь оба знака (то есть его подстановка в (19) равенства не меняет).

С другой стороны, минимальное значение $\gamma = 53$ н.е., при котором происходит смещение положения равновесия, по сравнению с ситуацией, соответствующей рис.12, заметно занижено. Так там критическое значение равно $\gamma = 214$ н.е., что значение $\gamma = 53$ н.е. значительно превышает.

Можно предполагать, что такая ситуация обусловлена близким к стохастическому характером колебаний, особенно заметным в режиме перемежающихся скачков. То есть период возбуждающей силы приходится не на три периода колебаний второго осциллятора, а на какое-то дробное их количество, от периода к периоду изменяющееся. Можно полагать, что такое нестационарное соответствие этих периодов эквивалентно повышению частоты второго осциллятора, так как далеко не все попадания возбуждения на его колебания будут «удачными». Для того чтобы учесть такое рассогласование, можно феноменологически ввести вспомогательный безразмерный «коэффициент синхронизации» K_S , на который следует умножить частоту второго осциллятора. То есть, когда этот коэффициент равен единице, то синхронизация достаточно полная, а когда он больше единицы, то эффективная частота второго осциллятора

$\omega_{2e} = \omega_2 \cdot K_S$ увеличивается и синхронизация нарушается. То есть формула (22) принимает вид:

$$G(\gamma) = \frac{\gamma^2 - \omega_1^2 (\omega_2 \cdot K_S)^2}{\delta (\omega_2 \cdot K_S)^2 + |\eta| \cdot \gamma}. \quad (23)$$

Зависимости функции G от γ при небольших целочисленных значениях коэффициента синхронизации K_S показаны на рис.13 кривыми 2-5. Можно видеть, что критическому значению $\gamma = 214$ н.е. наиболее близко соответствует кривая 3, для которой $K_S = 3$ (пересечение этой кривой с нулевой линией показано укрупненной точкой). Для кривой 3 однако величина смещения равновесного положения по сравнению с кривой 1 несколько ухудшается. Так здесь оно равно около 0.7 н.е., что впрочем, учитывая сложность явления, не так уж сильно отличается от значения $x_{1P} = -1.1$ н.е., приведенного на рис.12.

Таким образом, можно полагать, что совокупная минимизация обоих потенциалов двухпотенциальной модели в сочетании с введением коэффициента синхронизации описывает наблюдаемые свойства режима перемежающихся скачков (порог возбуждения и смещение равновесия) довольно удовлетворительно.

13. Падение амплитуды колебаний

Рассмотрим теперь другую особенность режима перемежающихся скачков, а именно – резкое (более чем на два порядка) падение амплитуды колебаний по сравнению с режимом плавного насыщения.

Исходя из модели потенциала, можно полагать, что колебания с малой амплитудой происходят в окрестности какого-то минимума потенциала, не выходя за пределы этой окрестности по причине окружения ее двумя потенциальными барьерами. В этом плане возникают две задачи: найти такой достаточно узкий локализованный минимум потенциала и объяснить, почему колебания

происходят именно в его пределах, не выходя за окружающие его потенциальные барьеры.

Прежде всего отметим, что рассматриваемые колебания соответствуют режиму перемежающихся скачков, который имеет место только при достаточно большой величине связи.

Будем исходить из однопотенциальной модели (3). Рассмотрим сначала изменение переменной x_1 в широких пределах, соответствующих колебаниям с большой амплитудой (то есть режимам №1 и №2). Для этого случая зависимости потенциала U_1 от первой переменной x_1 при различных значениях параметра линейной связи γ показаны на рис.14. Кривые 2 и 3 смещены вверх для удобства рисунка: в отсутствие такого смещения они точно ложатся друг на друга.

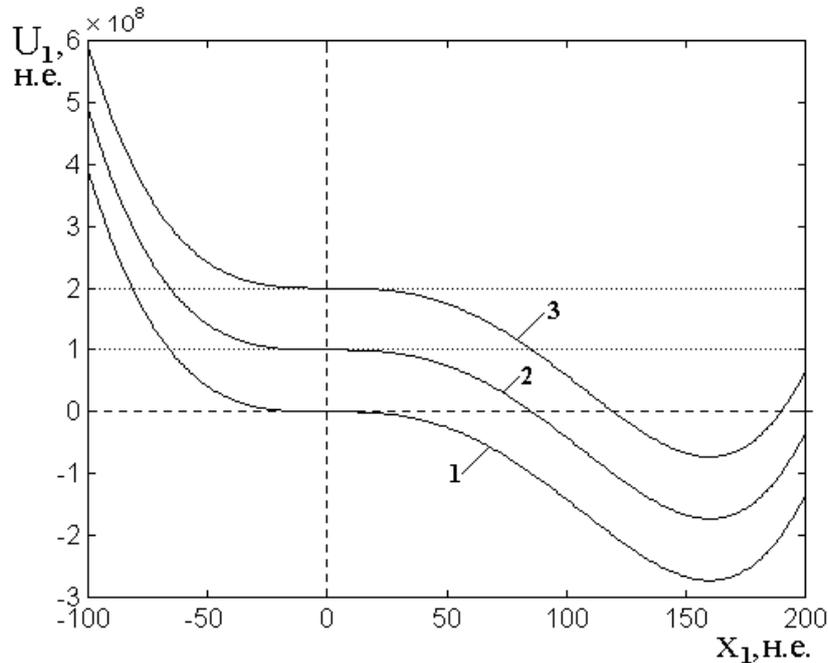


Рис.14. Зависимость потенциала U_1 от первой переменной x_1 при различных значениях параметра связи γ : 1 – 10 н.е., 2 – 50 н.е., 3 – 300 н.е.

Остальные параметры – те же, что на предыдущих рисунках.

Чтобы избежать наложения кривых друг на друга, кривые 2 и 3 смещены вверх

на $1 \cdot 10^8$ и $2 \cdot 10^8$ н.е. соответственно.

Из рисунка можно видеть, что вид кривых в исследованном интервале изменения γ от величины параметра связи не зависит. Все кривые имеют минимум вблизи $x_1 = 160$ н.е., а минимума, соответствующего малой амплитуде, не заметно. Контрольная проверка показывает, что вид кривых искажается только начиная с величины γ порядка 10^4 н.е. При этом глубина минимума в правой части рисунка уменьшается, а слева кривые слегка опускаются вниз. При $\gamma \sim 10^6$ н.е. минимум из правой части рисунка переходит на левую, так что кривая как бы отражается в вертикальной оси. Однако, как отмечено в предыдущих разделах, столь высокие значения параметра связи выходят за пределы существования режима перемежающихся скачков и приводят к режиму малоамплитудной релаксации, в настоящей работе не рассматриваемому.

Таким образом, применение модели потенциала в данном случае малоамплитудного режима не объясняет.

Заметим однако, что область малых амплитуд на рис.14 выражена недостаточно ясно из-за слишком мелкого масштаба. Поэтому обратимся к рис.15, где область тех же кривых вблизи нуля показана в крупном масштабе.

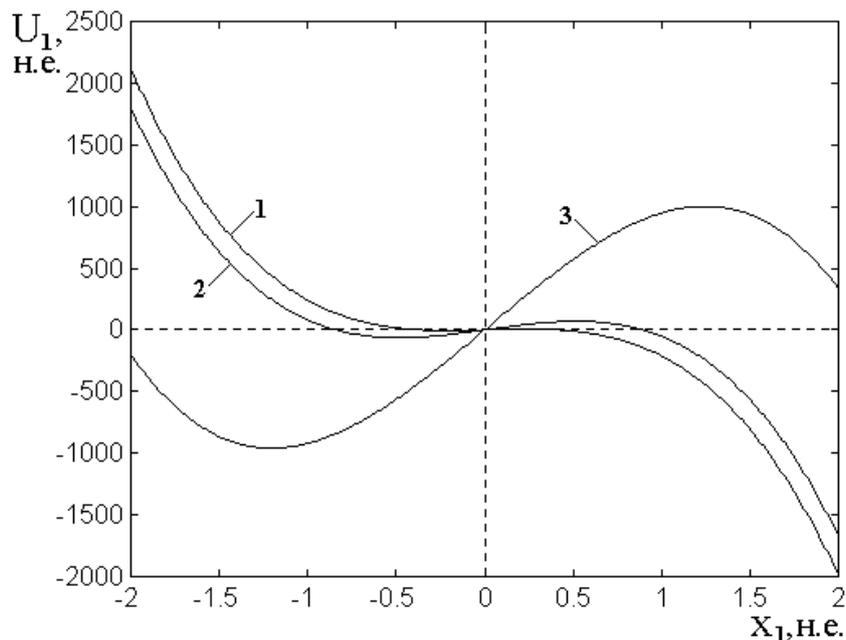


Рис.15. Те же кривые, что на рис.14 в крупном масштабе вблизи нуля.

Из этого рисунка видно, что при достаточно большой величине параметра связи на потенциальной кривой имеется дополнительный минимум, для $\gamma = 300$ н.е. (кривая 3) соответствующий $x_1 = -1.2$ н.е. Из сравнения с рис.12 можно видеть, что этот минимум как раз приходится на смещенное положение центра колебаний в установившемся режиме перемежающихся скачков. То есть можно полагать, что именно такой минимум обеспечивает колебания малой амплитуды. Из рисунка видно также, что такой локальный минимум отделен справа от минимума при $x_1 = 160$ н.е. (рис.14) барьером при $x_1 = 1.5$ н.е. Можно полагать, что при достаточной величине возбуждения этот барьер может быть пройден и колебания перейдут на минимум при $x_1 = 160$ н.е. с соответствующим увеличением амплитуды.

Контрольная проверка показала, что такое изменение режима действительно имеет место. Рис.12 построен при $A = 50$ н.е., а уже при увеличении амплитуды возбуждения до 160 н.е. режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения с запаздыванием $\tau_S = 24$ ед. времени и установившейся амплитудой $A_D = 1900$ н.е.

К такой же смене режима приводит изменение начального положения осциллятора. Так рис.12 построен при нулевом начальном смещении обоих осцилляторов. Но при начальном смещении только первого осциллятора на величину $x_1 = 3$ н.е. (то есть по рис.5555 на правом склоне барьера несколько ниже самой глубокой точки минимума при $x_1 = -1.2$ н.е.) и той же амплитуде возбуждения $A = 50$ н.е. режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения с запаздыванием $\tau_S = 0.5$ ед. времени и установившейся амплитудой $A_D = 1900$ н.е. Заметим попутно, что здесь не только амплитуда резко увеличилась, но и время запаздывания значительно уменьшилось, что также может составить предмет исследования.

Таким образом, можно считать, что колебания с малой амплитудой обусловлены наличием дополнительного минимума потенциала вблизи нулевого

значения переменной первого осциллятора, отделенного от главного минимума потенциальным барьером, а увеличение амплитуды возбуждения или достаточное начальное смещение осциллятора приводит к переходу колебаний к режиму с большой амплитудой.

14. Несимметричная связь

В предыдущих разделах рассматривались различные свойства колебаний связанных осцилляторов в условиях симметричной связи, то есть когда оба параметра связи того и другого осцилляторов между собой были равны: $\gamma_1 = \gamma_2$. Рассмотрим теперь некоторые особенности, накладываемые несимметричностью связи, то есть неравенством этих параметров: $\gamma_1 \neq \gamma_2$.

Прежде всего отметим, что при любом соотношении параметров связи между собой каких либо новых режимов, существенно отличных от описанных выше, обнаружено не было. В некоторых случаях кроме двух скачков наблюдался еще третий и даже иногда четвертый, однако все они были выражены по сравнению с первым также слабо, если не слабее, как и второй. Во всех случаях амплитуда последующего скачка превышала амплитуду предыдущего, но не более чем на 20%. При очень больших параметрах связи (порядка 600 н.е.) время запаздывания было настолько мало, что скачки даже не были ярко выражены, а сразу после небольшого запаздывания (до 4 ед. времени) наблюдался рост амплитуды колебаний с довольно быстрым насыщением на уровне порядка 2000 н.е. Таким образом, в подавляющем большинстве случаев наблюдались те же четыре режима, что и при равенстве параметров связи, с незначительными вариациями.

Было исследовано изменение как того, так и другого параметров связи в интервале от 10 н.е. до 1000 н.е. В основном, особенно при величине параметров до 300 н.е., в формировании характера режима наблюдалось преобладание второго параметра связи γ_2 . Так при изменении первого параметра связи γ_1 от 10 н.е. до 300 н.е. и задании второго параметра γ_2 неизменным, равным 10 н.е., всегда наблюдался режим №1 – двухступенчатое запаздывание, причем второй

скачок был выражен сравнительно слабо (не более чем на 10% выше первого). Время запаздывания τ_S составляло от 17 до 10 ед. времени и с увеличением первого параметра связи γ_1 слегка уменьшалось.

При задании второго параметра связи γ_2 равным 30 н.е. и изменении первого γ_1 от 10 до 300 н.е. всегда наблюдался также режим №1, причем второй скачок был выражен значительно ярче, чем в предыдущем случае. Так его амплитуда могла превышать амплитуду первого скачка в два и даже в три раза. Время запаздывания первого скачка τ_S составляло от 2 до 4 ед. времени, а второго τ_C менялось хаотическим образом от 4 до 28 ед. времени.

При задании второго параметра связи γ_2 равным 60 н.е. и изменении первого γ_1 от 10 до 300 н.е. наблюдался также режим №1, который после двух скачков переходил в режим №2 – плавного насыщения. Время первого запаздывания τ_S составляло от 2 до 3 ед. времени, второго τ_C – от 3 до 17 ед. времени, а время полного насыщения τ_D менялось от 10 до 30 ед. времени. Амплитуда в режиме насыщения A_D достигала от 1000 до 2000 н.е.

Довольно критичным к соотношению параметров связи оказался режим №3 – перемежающихся скачков. Наиболее оптимальными условиями для его возбуждения было равенство обеих параметров, то есть $\gamma_1 = \gamma_2$, тогда как при отклонении от такого равенства более чем на 20% этот режим заменялся режимом №2 с довольно быстро (при τ_D порядка 10 н.е.) устанавливающимся насыщением. Так при $\gamma_1 = \gamma_2 = 300$ н.е. и $\gamma_1 = \gamma_2 = 400$ н.е. наблюдались перемежающиеся скачки, а при $\gamma_1 = 300$ и $\gamma_2 = 400$ н.е. или $\gamma_1 = 400$ и $\gamma_2 = 300$ н.е. уже имело место только плавное насыщение с высокой амплитудой (до 2000 н.е.).

Для возбуждения режима №4 – малоамплитудной релаксации, решающая роль второго параметра связи уже отсутствовала, так что он наблюдался с при-

мерно одинаковыми свойствами как при $\gamma_1 = 400$ и $\gamma_2 = 1000$ н.е., так и при $\gamma_1 = 1000$ и $\gamma_2 = 400$ н.е.

Заключение

Основные результаты настоящей работы, являющейся продолжением [29], сводятся к следующему.

Продолжено рассмотрение задачи о возбуждении вынужденных нелинейных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. В основу рассмотрения положена модель двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого, первый из которых обладает нелинейными свойствами, а второй остается линейным.

На основе квадратичного приближения для осцилляторов записана система из двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка. При этом первое уравнение обладает кубической нелинейностью, тогда как второе остается линейным. Нелинейная связь в такой системе обеспечивается членом, пропорциональным произведению квадрата первой переменной на вторую, присутствующим только в первом уравнении. Линейная связь в каждом из уравнений обеспечивается членом, пропорциональным переменной другого уравнения, причем параметры такой связи в обоих уравнениях могут различаться.

Для интерпретации развития во времени колебаний в такой системе предложена модель динамического потенциала. В отличие от первой части настоящей работы, где рассмотрение проведено на основе единственного потенциала, здесь введена двухпотенциальная модель, представляющая собой совокупность двух потенциалов, по одному для каждого осциллятора. Отмечена невзаимность двухпотенциальной модели, обусловленная сочетанием в полной колебательной системе линейного и нелинейного осцилляторов.

Показана возможность сведения двухпотенциальной модели к однопотенциальной на основе представления потенциала второго осциллятора в качестве параметра для потенциала первого. Показано, что такой потенциал имеет

вид биквадратичной параболы в сочетании с обратной пропорциональностью первой переменной, что обеспечивает в нуле инверсию параболы с формированием двух симметричных минимумов.

Рассмотрена качественная картина развития колебаний в двухпотенциальной системе, имеющих место после включения возбуждения. Отмечен динамический характер связи и требование соблюдения синхронизма колебаний того и другого осцилляторов. Показано, что сочетание механизма синхронизации с процессом релаксации первого осциллятора может приводить к запаздыванию возбуждения интенсивных колебаний относительно момента включения возбуждения.

Рассмотрен процесс развития колебаний во времени в случае симметричной линейной связи между осцилляторами, то есть при равенстве ее обоих параметров друг другу. Выявлено четыре наиболее характерных режима, соответствующих различным уровням параметра линейной связи по возрастанию: режим №1 – двухступенчатое запаздывание; режим №2 – плавное насыщение; режим №3 – перемежающиеся скачки; режим №4 – малоамплитудная релаксация.

Отмечено, что в режиме №1 развитие колебаний после первичного запаздывания происходит путем двух следующих друг за другом резких возрастаний амплитуды. Показано, что время запаздывания того и другого скачков амплитуды с увеличением связи уменьшается по закону обратной пропорциональности. При этом величина того и другого скачков сначала резко возрастает, после чего насыщается в соответствии с зависимостью типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем». Как временные, так и амплитудные характеристики скачков, главным образом второго, по мере изменения связи, особенно при небольшой ее величине, испытывают резкие колебания, в результате чего зависимости этих характеристик от величины связи приобретают фракталоподобный характер.

Отмечено, что в режиме №2 развитие колебаний после первичного двухступенчатого запаздывания происходит путем плавного увеличения амплитуды

с выходом на стационарный уровень. Показано, что время такого выхода значительно превышает время второго скачка, причем также зависит от величины линейной связи по закону обратной пропорциональности. При этом установление амплитуды во времени также соответствует зависимости типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем».

Отмечено, что режим №3 характеризуется двумя свойствами: амплитуда перемежающихся скачков более чем на два порядка меньше амплитуды установившихся колебаний в режиме №2, а после окончания скачков колебания с малой амплитудной происходят вокруг нового положения равновесия, заметно смещенного относительно начального.

Интерпретации обоих этих свойств выполнена на основе модели динамического потенциала. Показано, что минимизация двухпотенциальной модели приводит к выявлению двух равновесных положений, различающихся резким порогом по величине параметра линейной связи. Так при величине связи ниже пороговой равновесие системы достигается в нуле по переменной первого осциллятора, а при величине связи выше пороговой положение равновесия смещается от нуля в сторону отрицательного или положительного значения первой переменной. Малое значение амплитуды колебаний после окончания скачков объяснено появлением дополнительного минимума потенциала, имеющего место при достаточно высокой величине линейной связи. Такой минимум расположен около нуля первой переменной и отделен от больших ее значений потенциальным барьером, что и объясняет малую величину амплитуды колебаний в этом режиме.

Отмечено, что режим №4 имеет место только при весьма высоких значениях параметров линейной связи и характеризуется быстрым затуханием колебаний обоих осцилляторов с их собственными временами релаксации, после чего амплитуда колебаний устанавливается на крайне малый уровень вблизи нулевого положения.

Рассмотрены особенности развития колебаний при несимметричной величине линейной связи между осцилляторами. Показано, что такая несиммет-

ричность не приводит к формированию каких-либо новых режимов колебаний, кроме рассмотренных при симметричной связи. В формировании режимов двухступенчатого запаздывания и плавного насыщения отмечена преобладающая роль величины параметра связи второго осциллятора. Выявлена критичность режима перемежающихся скачков к степени симметрии связи. Так при отклонении от такой симметрии на 20% его возбуждение срывается и он заменяется режимом плавного насыщения.

Работа выполнена при финансовой поддержке за счет гранта Российского Научного Фонда (проект № 14-22-00279).

Литература

1. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит. 1994. 464 с.
2. Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей под редакцией Гуревича А.Г. М.: ИЛ. 1961. 636 с.
3. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука. 1971. 376 с.
4. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука. 1987.
5. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. В кн.: Физическая акустика, под ред. Мэзона У.П., т.3Б, Динамика решетки. М.: Мир. 1968. С.156-243.
6. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Возбуждение связанных магнитоупругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе. // Сборник трудов XVI Международной конференции "Радиолокация и радиосвязь". Москва-Фирсановка: Издание МЭИ. 2008. С.197-205.
7. Моносов Я.А., Сурин В.В., Щеглов В.И. Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе. // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т.7. №9. С.315-317.

8. Зубков В.И., Моносов Я.А., Щеглов В.И. Спиновый эффект Манделштама-Бриллюэна. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т.13. №5. С.229-232.
9. Щеглов В.И. Взаимодействие упругих колебаний с прецессирующим магнитным моментом. // РЭ. 1971. Т.16. №12. С.2321-2322.
10. Щеглов В.И. Двойной акусто-магнитостатический резонанс. // ПЖТФ. 1980. Т.6. №15. С.922-924.
11. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. // РЭ. 2009. Т.54. №7. С.863-874.
12. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2013. №2. С.10. <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.html>.
13. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре при ферромагнитном резонансе. // РЭ. 2014. Т.59. №5. С.482-497.
14. Власов В.С., Иванов А.П., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромагнитным. // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2012. С.248-259.
15. Котов Л.Н., Власов В.С., Иванов А.П., Щеглов В.И., Шавров В.Г. Исследование автоколебаний двух связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. // Вестник Челябинского государственного университета. 2013. №25 (316). Физика. №18. С.27-30.
16. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2013. С.188-198.
17. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного пре-

образователя. // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2013. С.199-215.

18. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа автомодуляционного режима возбуждения гиперзвука магнитострикционным преобразователем. // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2014. С.161-175.

19. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамика вынужденных колебаний намагниченности в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами в условиях ориентационного перехода. // Сборник трудов XXII Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2014. С.176-188.

20. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: ИНФРА-М. 2015. С.202-216.

21. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. // РЭ. 2015. Т.60. №1. С.79-91.

22. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. // РЭ. 2015. Т.60. №3. С.297-310.

23. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2013. №11. <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>.

24. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преоб-

разователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2014. №1.

<http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.

25. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №5. <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>.

26. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №6. <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>.

27. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейные гиперзвуковые колебания магнестрикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 1. Деление частоты возбуждения. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №9. <http://jre.cplire.ru/jre/sep15/4/text.pdf>.

28. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейные гиперзвуковые колебания магнестрикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 2. Умножение частоты возбуждения. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №10. <http://jre.cplire.ru/jre/oct15/1/text.pdf>.

29. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2017. №7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>.

30. Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.:Наука. 1964. 440 с.

31. Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н. Основы теории колебаний. М.: Наука. 1978. 392 с.

32. Лакс Б., Баттон К. Сверхвысокочастотные ферриты и ферримагнетики. М.: Мир. 1965. 675 с.

33. Mandelbrot B.B. The fractal geometry of nature. S.F. 1982.

34. Фракталы. Физическая энциклопедия. Т.5. С.371-372. М.: Большая Российская Энциклопедия. 1998. 760 с.

Ссылка на статью:

А.П.Иванов, В.Г.Шавров, В.И.Щеглов. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>