

УДК 537.874; 537.624

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ЗАПАЗДЫВАНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ МАГНИТОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕЖИМЕ УМНОЖЕНИЯ ЧАСТОТЫ. ЧАСТЬ 3. НЕЛИНЕЙНАЯ СВЯЗЬ

А. П. Иванов¹, В. Г. Шавров², В. И. Щеглов²

¹Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина,
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

²Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 8 августа 2017 г.

Аннотация. Продолжено рассмотрение задачи о возбуждении вынужденных нелинейных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Рассмотрение выполнено на основе модели двух связанных осцилляторов – нелинейного магнитного и линейного упругого. Интерпретации развития колебаний в такой системе проведена на основе модели динамического потенциала. Исследованы различные режимы колебаний при вариации параметра нелинейной связи. Выполнена классификация наблюдаемых режимов по величине амплитуды возбуждаемых колебаний. Показано, что из всего многообразия наблюдаемых колебаний можно выделить две большие группы режимов – малоамплитудные и высокоамплитудные. Исследовано развитие колебаний во времени в типичных высокоамплитудных режимах. Рассмотрен случай низкой степени линейной связи. Показано, что по мере увеличения параметра нелинейной связи последовательно наступают следующие режимы: двухступенчатое запаздывание с сильной хаотической составляющей, пилообразные колебания амплитуды и регулярное установление. Выявлен сильный разброс значений времени запаздывания при малых изменениях параметра нелинейной связи, имеющий фракталоподобный характер. Отмечен эффект самовоздействия первого осциллятора на амплитуду собственных колебаний через посредство вто-

рого осциллятора. В качестве механизма воздействия предложена модель положительной обратной связи, приводящая к лавинообразному росту амплитуды колебаний. Показано, что ограничение такого роста происходит за счет кубической нелинейности системы. Рассмотрен случай средней степени линейной связи. Показано, что по мере увеличения параметра нелинейной связи последовательно наступают следующие режимы: двухступенчатое запаздывание с сильной хаотической составляющей, пилообразные колебания амплитуды, регулярное установление и плавное насыщение. Показано, что значение установившейся амплитуды колебаний полностью соответствует модели динамического потенциала. Рассмотрен случай высокой степени линейной связи. Показано, что в этом случае для реализации высокоамплитудных режимов необходимо задание достаточного начального отклонения смещения первого осциллятора или достаточно высокая амплитуда возбуждающего сигнала. Показано, что в случае задания начального смещения, по мере увеличения параметра нелинейной связи, последовательно наступают следующие высокоамплитудные режимы: двухступенчатое запаздывание с пилообразным характером колебаний, асинхронная синусоида и регулярное установление. Рассмотрено формирования высокоамплитудных режимов за счет задания достаточно большой амплитуды возбуждения. Отмечено, что необходимым условием первичного запаздывания возбуждения колебаний является нулевое значение начального отклонения колебаний того и другого осцилляторов. В заключительном разделе приведены некоторые дополнительные вопросы, направленные на дальнейшее развитие работ.

Ключевые слова: нелинейные колебания, магнитоупругое взаимодействие, потенциал.

Abstract. It is continued the investigation of task about excitation of forced nonlinear vibrations of magnetization and elastic displacement in normal magnetized ferrite plate having magnetoelastic properties. The investigation is made on basis of two connected oscillators – nonlinear magnetic and linear elastic. For the explanation of the vibrations in this system development it is proposed the model of dynamical potential. It is investigated the different vibration regimes by the variation of nonlinear

connection parameter. It is made the classification of realized regimes by the value of amplitude of excited vibrations. It is shown that from total aggregate of observed vibrations may be selected two large groups of regimes: small-amplitude and high-amplitude. It is investigated the development of vibrations in typical high-amplitude regimes. It is investigated the case of small degree of nonlinear connection. It is shown that by the nonlinear connection parameter increasing it is successive realized next regimes: two-steps delay with high chaotic component, saw-liked vibrations of amplitude and regular establishment. It is found the considerable scattering of delay time by small variations of nonlinear connection parameter which having the fractal-similarity character. It is found the effect of first oscillator self-influence on own vibrations through of second oscillator participation. By way of influence mechanism it is proposed the positive reverse connection model which lead to avalanche-liked increasing of vibrations amplitude. It is shown that the restriction of this increasing is realized by the cubic nonlinearity of system. It is investigated the case of middle degree of nonlinear connection. It is shown that by the nonlinear connection parameter increasing it is successive realized next regimes: two-steps delay with high chaotic component, saw-liked vibrations of amplitude, regular establishment and smooth saturation. It is shown that the amplitude establishment value is completely correspond to dynamical potential model. It is investigated the case of high degree of nonlinear connection. It is shown that in this case for the high-amplitude regimes realization it is necessary the establishment of enough high initial deflection of first oscillator displacement or enough high amplitude of excitation signal. It is shown that in the case of initial deflection establishment by nonlinear connection parameter increasing it is successive realized next high-amplitude regimes: two-steps delay with high chaotic component, asynchronous sinusoid and regular establishment. It is investigated the realization of high-amplitude regimes by the assign of enough high amplitude of excitation signal. It is shown that the necessary condition of first delay of vibrations excitation realization is zero value of initial displacement of both oscillators. In concluding part of paper it is mentioned some additional questions of this work development.

Key words: nonlinear vibrations, magnetoelastic interaction, potential.

Введение

В двух предыдущих частях настоящей работы [1,2] было рассмотрено возбуждение нелинейных вынужденных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Исследование проведено на основе упрощенной модели, представляющих собой совокупность двух связанных осцилляторов, один из которых обладает гиромагнитными свойствами.

В первой части [1] получена система из двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, отражающая связь между осцилляторами. Для случая, когда резонансные частоты обоих осцилляторов различаются в кратном отношении, выполнено исследование развития вынужденных колебаний во времени. Показано, что в этих условиях возбуждение колебаний происходит с нестационарным запаздыванием во времени. Для интерпретации эффекта запаздывания предложена модель динамического потенциала, отражающая характер колебаний первого осциллятора при использовании амплитуды второго осциллятора как параметра. Исследован характер запаздывания в широком интервале изменения амплитуды возбуждения и параметра кубической нелинейности первого осциллятора. Отмечены критические значения того и другого, обеспечивающие пороговый характер запаздывания. Наблюдаемые явления интерпретированы на основе модели динамического потенциала.

Вторая часть настоящей работы [2] посвящена дальнейшему исследованию эффекта запаздывания, в первую очередь – выяснению роли линейной связи между осцилляторами. Для более полной интерпретации развития колебаний предложена модель, представляющая собой совокупность двух динамических потенциалов. Рассмотрен процесс развития колебаний во времени в случае симметричной линейной связи между осцилляторами. Выявлено четыре наиболее характерных режима, соответствующих различным уровням параметра линейной связи по возрастанию: режим №1 – двухступенчатое запаздывание; ре-

жим №2 – плавное насыщение; режим №3 – перемежающиеся скачки; режим №4 – малоамплитудная релаксация. Выполнена интерпретация наблюдаемых свойств этих режимов на основе двухпотенциальной модели. Показано, что несимметричность линейной связи не приводит к формированию каких-либо новых режимов колебаний, кроме рассмотренных при симметричной связи.

Настоящая работа является продолжением [1,2], в первую очередь выявлению роли нелинейной связи между осцилляторами. Рассматривается развитие колебаний в значительных промежутках времени, когда имеет место вторичное воздействие колебаний второго осциллятора на колебания первого. Основная интерпретация наблюдаемых явлений выполняется на основе модели динамического потенциала.

1. Геометрия задачи и уравнения движения

Геометрия задачи совпадает с принятой в работах [3-11] и подробно описана в [1]. Общая схема геометрии иллюстрируется рис.1.

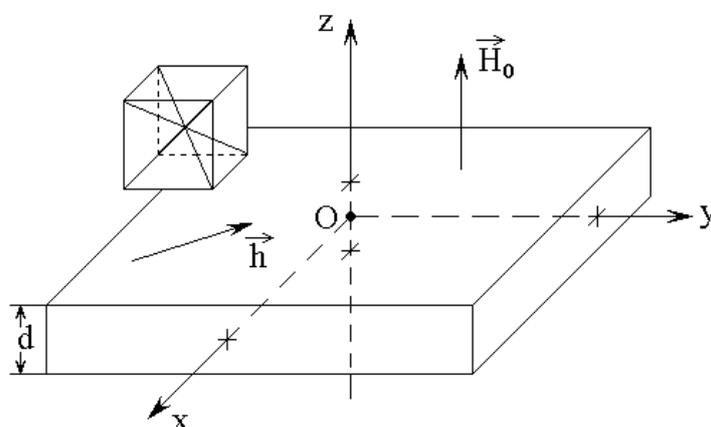


Рис.1. Геометрия задачи. Слева – схема кристаллографической ячейки.

В ее основе лежит безграничная плоскопараллельная пластина, обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами. Пластина намагничена постоянным полем, перпендикулярным ее плоскости. Переменное поле приложено в плоскости пластины и возбуждает в ней однородную прецессию

намагниченности, которая, в свою очередь, приводит к возбуждению толщинных упругих колебаний поперечной поляризации.

В работе [1] приведена система уравнений, отражающая в квадратичном приближении возбуждение магнитоупругих колебаний на основе модели двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (2)$$

В этой системе x_1 и x_2 – нормированные компоненты намагниченности и упругого смещения в плоскости пластины, β_1 и β_2 – параметры затухания той и другой компонент, ω_1 и ω_2 – собственные частоты осцилляторов, γ_1 и γ_2 – константы их линейной связи, δ – параметр кубической нелинейности первого осциллятора, η – параметр нелинейной связи первого осциллятора со вторым, A_0 и ω_0 – амплитуда и частота переменного поля. Явный вид всех коэффициентов и их выражение через параметры материала приведены в работе [9].

Из уравнений (1)-(2) можно видеть, что между осцилляторами имеют место два вида связи: линейная, описываемая коэффициентами γ_1 и γ_2 при переменных в первой степени, и нелинейная, имеющая единственный коэффициент η при произведении квадрата первой переменной на первую степень второй. Линейная связь подробно рассмотрена во второй части настоящей работы [2]. Здесь будет рассмотрена именно нелинейная связь.

Уравнения (1)-(2) в работах [1,2] записывались и решались в нормированном виде при нормировке на частоту возбуждения, в реальных системах преобразователей гиперзвука [3] лежащую с СВЧ диапазоне и составляющую порядка единиц и десятков гигагерц. В настоящей работе далее будет рассмат-

риваться умножение частоты на три, причем будут использоваться те же нормированные значения параметров, а именно: резонансные частоты осцилляторов: $\omega_1 = 5$, $\omega_2 = 15$ н.е., параметры затухания $\beta_1 = 1.0$ н.е., $\beta_2 = 0.1$ н.е., так что времена релаксации первого и второго осцилляторов составляют 2.2 и 22.0 ед. времени соответственно; параметры линейной связи $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ будут одинаковыми для обоих осцилляторов, причем значение γ будет варьироваться от 10 до 1000 н.е.; параметр кубической нелинейности первого осциллятора $\delta = 6$ н.е.; параметр нелинейной связи между осцилляторами η будет варьироваться от -10 до -1000 н.е. Частоту вынуждающей силы положим совпадающей с резонансной частотой первого осциллятора, то есть $\omega_0 = 5$ н.е., амплитуду $A_0 = 50$ н.е. Случаи выходя за эти параметры будут особо оговариваться в тексте.

Из уравнений (1)-(2) можно видеть, что между осцилляторами имеют место два вида связи: линейная, описываемая коэффициентами γ_1 и γ_2 при переменных в первой степени, и нелинейная, имеющая единственный коэффициент η при произведении квадрата первой переменной на первую степень второй. Линейная связь подробно рассмотрена во второй части настоящей работы [2]. Здесь будет рассмотрена именно нелинейная связь.

2. Динамический потенциал

Для интерпретации решения системы уравнений (1)-(2) в работе [1] был введен динамический потенциал следующего вида:

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (3)$$

Дифференцирование этого выражения по x_1 дает потенциальную группу слагаемых уравнения (1). При этом переменную $\tilde{\omega}_2$ следует рассматривать как постоянный параметр.

В работе [2] была предложена двухпотенциальная модель, содержащая два потенциала, каждый для своего осциллятора:

$$U_1 = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2. \quad (4)$$

$$U_2 = \frac{\omega_2^2}{2} \cdot x_2^2 + \gamma_2 \cdot x_1 x_2. \quad (5)$$

Там же показано, что с помощью следующей из (5) подстановки

$$x_2 = \frac{\gamma_2 x_1}{\omega_2^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right), \quad (7)$$

можно получить потенциал, зависящий только от одной переменной x_1 :

$$U_1 = \left\{ \frac{\omega_1^2}{2} + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\omega_2^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} \cdot x_1^2 + \\ + \left\{ \frac{\delta}{4} + \frac{\eta \gamma_2}{3 \omega_2^2} \cdot \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2U_2 \omega_2^2}{\gamma_2^2 x_1^2}} \right) \right\} \cdot x_1^4. \quad (8)$$

Это выражение не содержит второй переменной x_2 , так что параметром здесь является второй потенциал U_2 . Если этот второй потенциал известен, например, если выражен через x_2 в соответствии с (5), то его использование в выражении (8) приводит к тем же результатам, что и совокупность двух потенциалов (4) и (5).

3. Классификация режимов по интенсивности колебаний

Подробное рассмотрение различных режимов колебаний двухосцилляторной системы показывает, что из всего многообразия режимов можно выделить две большие группы, различающиеся амплитудой возбуждаемых колебаний. То есть можно сказать, что имеются два вида режимов: малоамплитудные и высокоамплитудные. Охарактеризуем их основные свойства.

Малоамплитудные режимы – амплитуда колебаний первого осциллятора x_1 составляет несколько единиц (обычно 2-5), амплитуда колебаний второго осциллятора x_2 составляет доли одной единицы. Отношение амплитуд x_1/x_2 составляет от 6 до 15.

Эти режимы в свою очередь делятся на две группы – без смещения установившегося положения относительно нуля и с таким смещением. К первой группе относятся режимы, имеющие место при слабой связи, как линейной, так и нелинейной. Они характеризуются отсутствием запаздывания и высокой стабильностью установившихся колебаний. Ко второй группе относятся режимы, имеющие место при очень сильной связи, как линейной, так и нелинейной. Они характеризуются малым запаздыванием или даже его отсутствием. Дальнейшее развитие колебаний в течение некоторого времени происходит с сильной хаотической составляющей (до 50% от средней величины), после чего амплитуда резко падает и устанавливаются малоамплитудные колебания вокруг смещенного равновесного положения.

К этой группе относятся описанный во второй части настоящей работы [2] режим №3 – перемежающихся скачков, а также в какой-то степени режим №4 – малоамплитудная релаксация.

Высокоамплитудные режимы – амплитуда колебаний первого осциллятора составляет несколько сотен и даже тысяч единиц (как правило от 400 до 2000), амплитуда колебаний второго осциллятора x_2 составляет от нескольких единиц до двух-трех десятков. Отношение амплитуд x_1/x_2 составляет от 30 до 40. От малоамплитудных эти режимы отличаются на два-три порядка большей амплитудой и заметно большим (до порядка) отношением амплитуд колебаний первого и второго осцилляторов.

Эти режимы характеризуются значительным запаздыванием, сильной примесью хаотических колебаний в процессе установления (до 30% от средней величины) и довольно высокой стабильностью установившихся колебаний. В некоторых случаях установившиеся колебания могут иметь пилообразный ав-

томодуляционный характер, но форма зубьев пилы приближается к периодическому повторению.

К этой группе относятся описанные во второй части настоящей работы [2] режим №1 – двухступенчатое запаздывание и режим №2 – плавное насыщение.

Рассмотрим интерпретацию тех и других режимов на некоторых примерах, опираясь на модель динамического потенциала.

4. Малоамплитудный режим слабой связи

Рассмотрим сначала пример режима, относящегося к первой группе малоамплитудных, имеющих место при слабой связи. Слабость связи здесь соответствует значению константы линейной связи γ не более 30-40 н.е. и нелинейной связи η по абсолютной величине менее 100 н.е. Развитие колебаний в таком режиме показано на рис.2

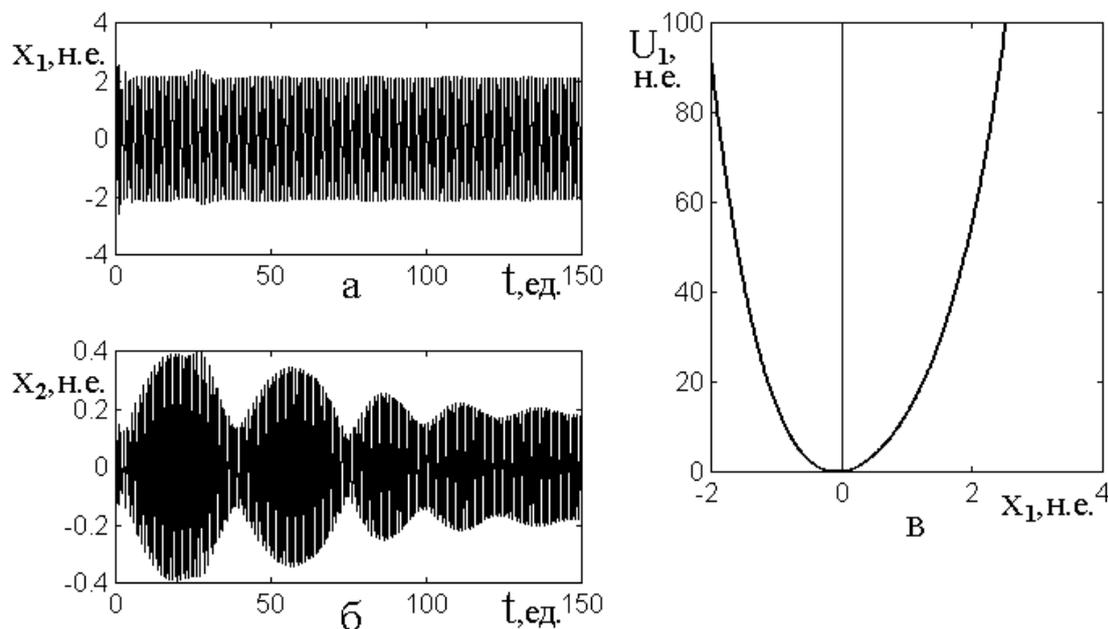


Рис.2. Малоамплитудный режим слабой связи. Параметры связи: $\gamma = 10$ н.е., $\eta = - 50$ н.е. В установившемся режиме амплитуды колебаний следующие: $x_1 = 2.0$ н.е., $x_2 = 0.17$ н.е. Отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 12$.

Из рисунка можно видеть, что колебания первого осциллятора устанавливаются сразу после включения возбуждения, так что их амплитуда не меняется. Колебания второго осциллятора также начинаются сразу после включения возбуждения, однако до установления проходят через несколько периодов затухающих биений. Потенциал имеет единственный минимум вблизи нуля. Других минимумов нет, так что колебания происходят в единственной потенциальной яме вокруг нуля. Динамический характер потенциала здесь проявляется только в биениях колебаний второго осциллятора, период которых, составляя около 40 ед. времени, приближается к удвоенному времени релаксации второго осциллятора, которое равняется 22 ед. времени. Биения затухают довольно медленно, однако при времени порядка 150 ед. амплитуду колебаний второго осциллятора можно считать установившейся.

5. Высокоамплитудный режим средней связи

Рассмотрим далее пример режима, относящегося к высокоамплитудному, имеющему место при средней величине связи. Средний порядок связи здесь соответствует значению константы линейной связи γ между 10 и 50 н.е. и нелинейной связи η по абсолютной величине между 100 и 400 н.е. Характерным свойством этого режима является наличие сильного запаздывания начала интенсивных колебаний относительно момента включения возбуждения (до 100 ед.). Развитие колебаний в таком режиме показано на рис.3.

Из рисунка можно видеть, что колебания первого осциллятора полностью подобны друг другу, с тем отличием, что амплитуда колебаний второго осциллятора меньше амплитуды колебаний первого в 30-40 раз.

Следует заметить, что незначительные колебания хаотического характера, вообще говоря, имеют место сразу после включения возбуждения, однако их амплитуда при этом крайне мала и составляет для первого осциллятора не более 1-2 н.е., а для второго – не более 0.5 н.е.

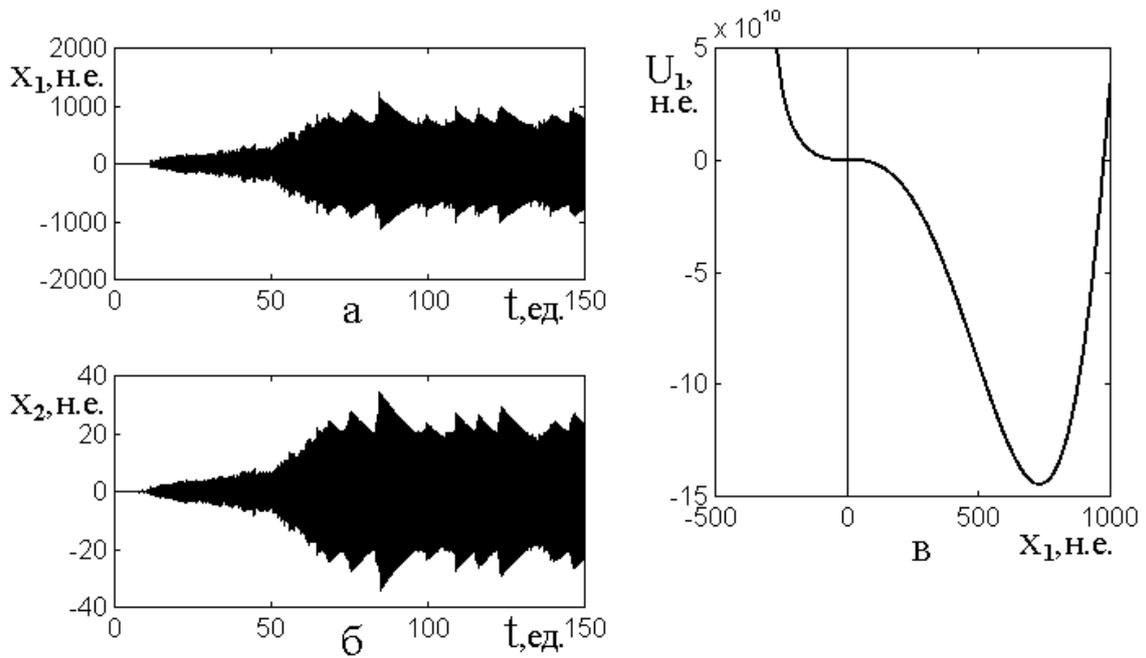


Рис.3. Высокоамплитудный режим средней связи. Параметры связи: $\gamma = 10$ н.е., $\eta = -200$ н.е. В установившемся режиме амплитуды колебаний следующие: $x_1 = 750$ н.е., $x_2 = 22$ н.е. Отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 34$.

Настоящие интенсивные колебания начинаются скачкообразным образом с сильным запаздыванием относительно момента включения возбуждения. Амплитуда первого скачка для первого осциллятора составляет несколько десятков нормированных единиц, после чего постепенно растет, достигая нескольких тысяч таких единиц, вследствие чего этот режим и назван «высокоамплитудным».

Потенциал имеет глубокий минимум в значительном удалении от нуля. Имеется также небольшой минимум вблизи нуля (около перегиба), но он настолько мал, что на рисунке не заметен и серьезного влияния на колебания не оказывает. Колебания происходят в весьма глубокой потенциальной яме далеко от нуля. Именно удаление основного минимума потенциала от нуля обуславливает значительную амплитуду установившихся колебаний в этом режиме. Динамический характер потенциала здесь проявляется в механизме самовоздействия осцилляторов друг на друга, с участием положительной обратной связи первого осциллятора самого на себя через посредство второго. Колебания вто-

рого осциллятора с высокой точностью повторяют колебания первого осциллятора, только лишь со значительно меньшей амплитудой. Рост амплитуды в процессе установления происходит с сильной примесью хаотических колебаний (до 20% от средней величины). В установившемся режиме колебания имеют автомодуляционный пилообразный характер, близкий к периодическому. Время установления более или менее стабильного режима составляет около 80 ед. времени, что значительно превышает время релаксации второго осциллятора (22 ед. времени).

Замечание. Из рассмотрения рис.2 и рис.3 можно видеть, что установление колебаний может требовать времени, значительно превышающего время собственной релаксации того и другого осцилляторов. Такое затягивание времени установления может говорить о наличии каких-то механизмов, противодействующих релаксации, но проявляющихся не через первую производную по времени (как сила трения, пропорциональная скорости), а каким-то другим образом. В рамках настоящей работы такой механизм не рассматривается, однако, по-видимому, может составить интерес для более подробного исследования.

6. Малоамплитудный режим сильной связи

Рассмотрим теперь пример режима, относящегося ко второй группе малоамплитудных режимов, имеющему место при сильной величине связи. Сильный порядок связи здесь соответствует значению константы линейной связи γ более 200 н.е. и нелинейной связи η по абсолютной величине между 200 и 1000 н.е. Этот режим можно образно назвать «перенапряженным», так как слишком большие значения связи в совокупности приводят опять к падению амплитуды колебаний того и другого осцилляторов. Характерным свойством этого режима является установлением колебаний того и другого осцилляторов вокруг новых положений равновесия, формирование которых обсуждено во второй части настоящей работы [2]. Развитие колебаний в таком режиме показано на рис.4.

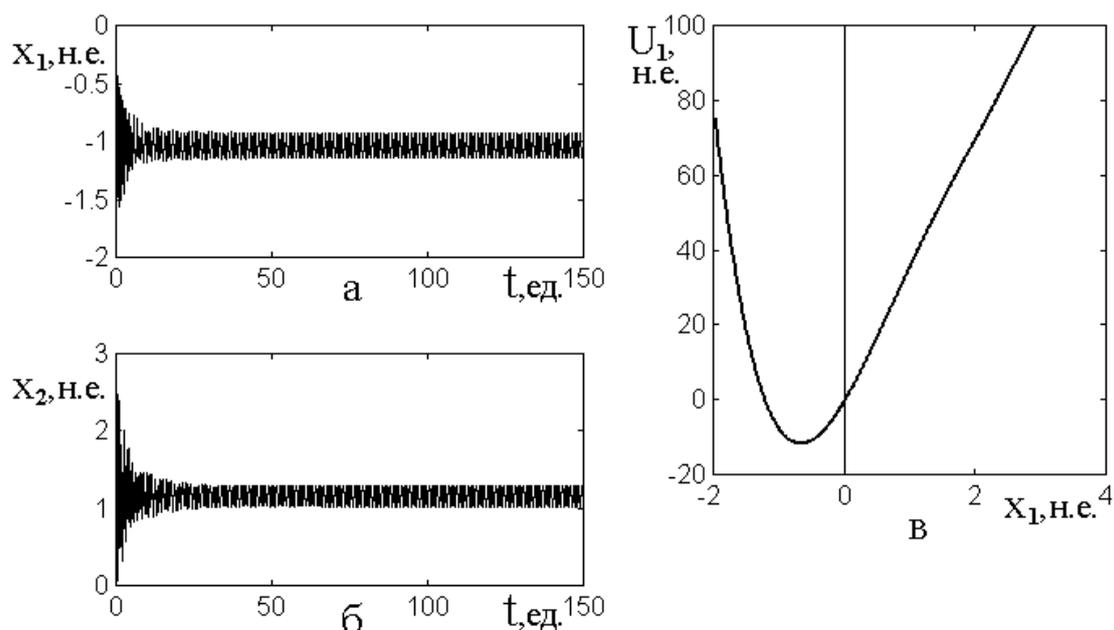


Рис.4. Малоамплитудный режим сильной связи. Параметры связи: $\gamma = 250$ н.е., $\eta = -200$ н.е. В установившемся режиме амплитуды колебаний следующие:

$$x_1 = 1.0 \text{ н.е.}, \quad x_2 = 0.12 \text{ н.е.} \quad \text{Отношение амплитуд: } x_1/x_2 = 8.$$

Из рисунка можно видеть, что внешнее сходство характера колебаний первого и второго осцилляторов остается, однако равновесные положения, вокруг которых происходят колебания после установления, для обоих осцилляторов различны. В обоих случаях колебания начинаются сразу после включения возбуждения, с заметной амплитудой (до нескольких единиц), однако такие колебания быстро затухают, освобождая место установившимся регулярным колебаниям с малой амплитудой, происходящим вокруг нового положения равновесия. Время затухания первичных колебаний составляет порядка 10 ед., что приходится между временами релаксации того и другого осцилляторов. Амплитуда установившихся колебаний составляет порядка 0.1 н.е., смещение равновесного положения – до 1-2 н.е., причем знаки смещения для того и другого осцилляторов различны.

Потенциал имеет минимум в небольшом удалении от нуля, причем степень этого удаления как раз соответствует новому установившемуся положению равновесия. Следует заметить, что полный потенциал имеет также второй

более глубокий минимум, подобный показанному на рис.3в, однако он отделен от минимума вблизи нуля, соответствующего рис.4в, довольно высоким потенциальным барьером, который препятствует развитию высокоамплитудного режима. В части второй настоящей работы [2] показано, что преодоление такого барьера возможно или путем значительного увеличения амплитуды возбуждения, или путем задания начального отклонения хотя бы одного из осцилляторов по другую сторону от барьера.

Итак, после выполненной общей классификации классификация различных режимов обратится более подробно к рассмотрению из особенностей при различной степени нелинейной связи.

7. Общий характер развития колебаний при низкой степени линейной связи

В предыдущих частях настоящей работы [1,2] было исследовано развития колебаний в сравнительно небольшой промежуток времени, который можно считать начальным после первичного запаздывания.

В работе [2] были выявлены четыре режима, соответствующих возрастающим уровням параметра линейной связи: режим №1 – двухступенчатое запаздывание; режим №2 – плавное насыщение; режим №3 – перемежающиеся скачки; режим №4 – малоамплитудная релаксация. В режиме №1 развитие колебаний после первичного запаздывания происходит путем двух следующих друг за другом резких возрастаний амплитуды. В режиме №2 развитие колебаний после первичного двухступенчатого запаздывания происходит путем плавного увеличения амплитуды с выходом на стационарный уровень. Режим №3 характеризуется двумя свойствами: амплитуда перемежающихся скачков более чем на два порядка меньше амплитуды установившихся колебаний в режиме №2, а после окончания скачков колебания происходят вокруг нового положения равновесия. Режим №4 имеет место только при весьма высоких значениях параметров линейной связи и характеризуется быстрым затуханием колебаний обоих осцилляторов с их собственными временами релаксации.

Характерные значения параметра линейной связи γ , принятые в работе [2] за отправные точки исследования перечисленных режимов, были следующими: для режима №1 – 10 н.е. (слабая связь), для режима №2 – 50 н.е. (средняя связь), для режима №3 – 300 н.е. (сильная связь), для режима №4 – 800 н.е. (сверхсильная связь).

Развитие колебаний во всех этих режимах исследовалось лишь при временах, сравнимых со временем первичного запаздывания, то есть в пределах 30-50 единиц времени в нормировке, приведенной выше. При изменении времени в этих пределах изменение переменной x_2 в качестве параметра в выражении для потенциала (3) по мере ее возрастания не учитывалось, так что она, как правило, полагалась равной 4 н.е. Однако более подробное исследование показало, что переменная x_2 с течением времени меняется, как и переменная x_1 , имея лишь амплитуду значительно меньшую, чем x_1 (примерно на два порядка). Такое изменение x_2 приводит к значительному изменению характера колебаний, имеющему место при достаточно больших промежутках времени. Этот характер различен в зависимости от величины параметров линейной связи в обусловленных этими параметрами режимах.

Первичное запаздывание развития колебаний наиболее ярко проявляется в режиме №1, то есть при сравнительно невысоком уровне линейной связи. Слабость связи обеспечивает достаточно медленное развитие колебаний во времени, позволяющее проследить тонкие детали их развития, поэтому более подробно остановимся именно на этом случае. Типичная картина развития колебаний показана на рис.5, который соответствует интервалу времени от нуля до 150 ед. при параметре линейной связи $\gamma = 10$ н.е. и параметре нелинейной связи $\eta = -200$ н.е. Там же показана схема определения основных рассматриваемых далее параметров колебаний.

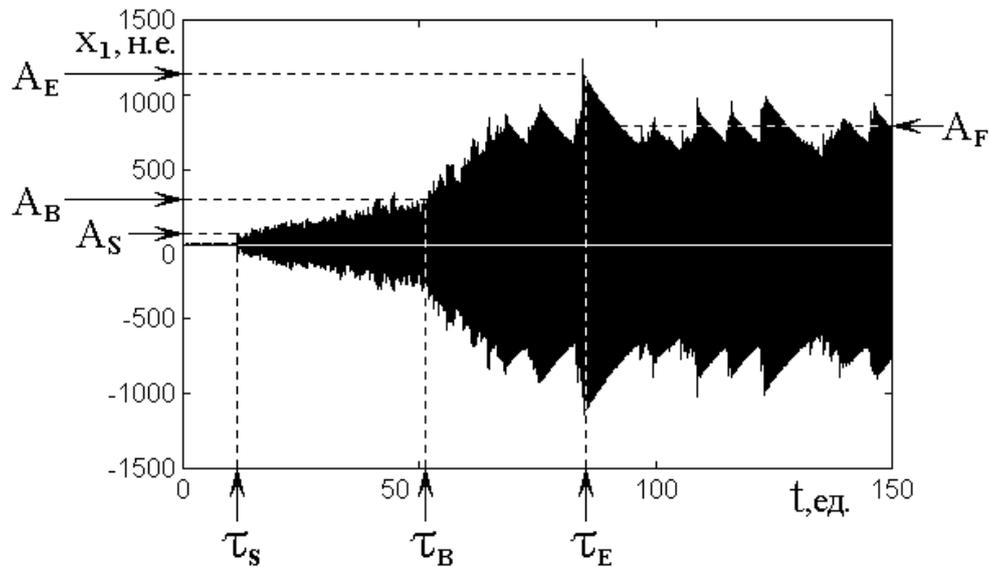


Рис.5. Развитие колебаний во времени и схема определения основных характеристик процесса при значениях параметров: параметр линейной связи $\gamma = 10$ н.е., параметр кубической нелинейности $\delta = 6$ н.е., параметр нелинейной связи $\eta = -200$ н.е., амплитуда возбуждения $A_0 = 50$ н.е. Остальные параметры указаны в тексте.

Из рисунка можно видеть, что развитие колебаний проходит последовательно следующие стадии:

- запаздывание развития колебаний, малая амплитуда, колебания нерегулярные, типа биений;
- резкий скачок амплитуды после запаздывания;
- плавное увеличение амплитуды, амплитуда меняется хаотическим образом в пределах 10-20% от средней величины;
- резкое увеличение скорости роста амплитуды, колебания остаются частично хаотическими (хаотическая составляющая – до 20% от средней величины);
- установившиеся колебания с пилообразной модуляцией амплитуды, амплитуда зубцов пилы составляет 20-30% от средней величины.

В связи с этим в качестве основных параметров, характеризующих развитие колебаний, были выбраны следующие:

τ_S – момент времени первого (основного) скачка, то есть собственно время запаздывания в принятом ранее смысле;

A_S – амплитуда, достигаемая непосредственно в момент первого скачка;

τ_B – момент времени резкого увеличения скорости роста амплитуды;

A_B – амплитуда, соответствующая моменту увеличения скорости роста амплитуды;

τ_E – момент времени начала пилообразных колебаний;

A_E – амплитуда первого пилообразного колебания;

A_F – средняя амплитуда установившихся пилообразных колебаний.

Можно заметить, что в интервалах времени от τ_S до τ_B и от τ_B до конца рисунка средняя амплитуда тех и других колебаний, меняется по закону, близкому к «единице минус экспонента в отрицательной степени». На этот закон накладываются колебания амплитуды, близкие к хаотическим. В установившемся режиме, то есть когда размах колебаний насыщается, что имеет место, начиная со времени τ_E , колебания приобретают пилообразный характер автомодуляционного типа, близкий к периодическому. При этом период такой «пилы», составляющий около 10 ед. времени, занимает по продолжительности среднее положение между временем релаксации первого (2.2 ед.) и второго (22 ед.) осцилляторов.

Из сравнения приведенного здесь рисунка с рис.3 в работе [2] можно видеть, что в интервале времени до 30 ед. колебания на том и другом рисунках ведут себя, в общем, одинаковым образом. Здесь второй скачок амплитуды выражен слабее, однако и там он был довольно малым по сравнению с первым. Остальные незначительные отличия можно отнести к различию масштабов и погрешностям машинного расчета при нестационарном развитии колебаний с заметной хаотической составляющей.

Замечание. Введенные здесь временные и амплитудные параметры колебаний дополняют принятые в работе [2, рис.3], распространяя их на более про-

должительный промежуток времени. Так время запаздывания в обоих случаях обозначается как τ_S , а еще два временных параметра τ_B и τ_E введены только здесь, так как они значительно превышают τ_S и выходят за пределы рассмотренного в [2] интервала времени. То же касается амплитуд: A_S в обоих случаях одна и та же, а A_B , A_E и A_F подробно рассматриваются только здесь. Параметры τ_C и A_C , введенные в [2], здесь подробно не анализируются, так как их роль на больших интервалах времени становится незначительной, а характерные их свойства уже в достаточной степени рассмотрены в [2].

8. Динамические характеристики колебаний при низкой степени линейной связи

Рассмотрим теперь, как зависят основные временные и амплитудные характеристики процесса развития колебаний от величины параметра нелинейной связи. Поскольку в работе [1] установлено, что для реализации нестационарного запаздывания параметр нелинейной связи должен быть отрицательным, ограничимся далее только этим случаем, а все характеристики будет строить в виде зависимостей от абсолютной величины этого параметра, то есть от $|\eta|$. Начнем рассмотрение со случая сравнительно слабой линейной связи $\gamma = 10$ н.е., так как при этом вариации параметра нелинейной связи η выявляются наиболее рельефно. Остальные параметры положим теми же, что и ранее.

На рис.6 приведены зависимости временных параметров процесса развития колебаний τ_S , τ_B , τ_E от абсолютной величины параметра нелинейной связи $|\eta|$. Точки соответствуют параметрам, измеренным с шагом по $|\eta|$ в 10 н.е., причем в области наиболее резкого их изменения (от 180 до 230 н.е.) этот шаг уменьшен до 5 н.е. Тонкие сплошные кривые построены путем соединения последовательных точек отрезками прямых. Утолщенные пунктирные кривые 1, 2, 3, приближенно аппроксимирующие точки, построены по следующим эмпирическим формулам:

кривая 1:
$$\tau_S = \frac{800}{|\eta| - 100} + 2; \tag{9}$$

кривая 2:
$$\tau_B = \frac{6500}{|\eta| - 100} - 5; \tag{10}$$

кривая 3:
$$\tau_E = \frac{6500}{|\eta| - 100} + 7. \tag{11}$$

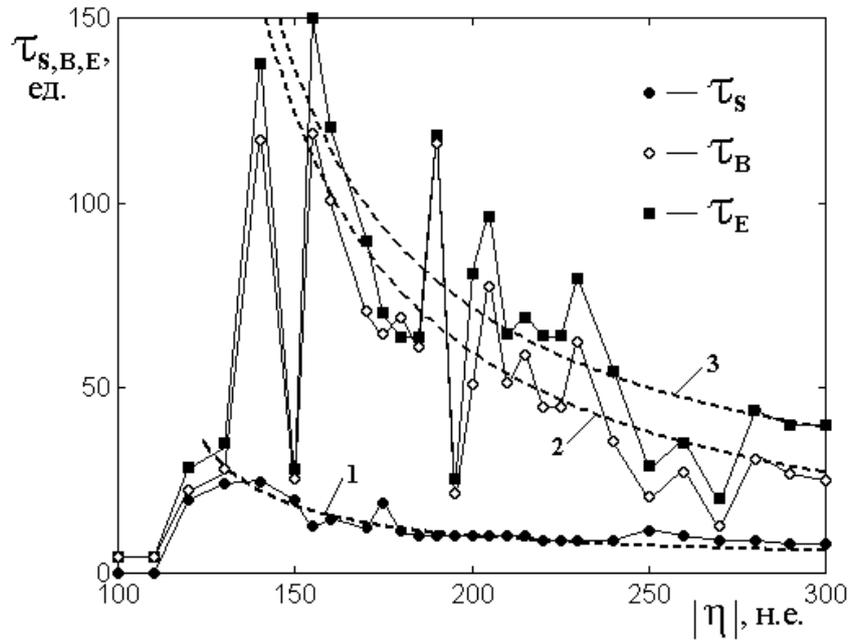


Рис.6. Зависимости временных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи.

Из рисунка можно видеть, что все зависимости в среднем с той или иной степенью приближения соответствуют функциям обратной пропорциональности. Такая зависимость наблюдается после превышения $|\eta|$ критического значения около 120-130 н.е. При этом время запаздывания τ_S составляет около 20-30 ед., а времена τ_B и τ_E , хотя и составляют несколько большие величины, но отличаются незначительно (на 20%). Обратная пропорциональная зависимость характерных времен аналогична отмеченной в работе [2, рис.4, 10] подобной зависимости введенных там параметров τ_S и τ_C . Можно полагать, что такой

характер временных зависимостей просто отражает факт усиления связи между осцилляторами, не важно, какой именно – линейной или нелинейной.

По мере увеличения $|\eta|$ время τ_S более или менее монотонно уменьшается в соответствии с законом (9), тогда как времена τ_B и τ_E при переходе $|\eta|$ через критическое значение, резко увеличиваются до величин порядка 120-140 ед. времени, после чего в среднем постепенно спадают в несколько раз в соответствии с (10) и (11). Однако, как и подобные зависимости в работах [1, 2], точки для времен τ_B и τ_E (кривые 2 и 3) испытывают сильный разброс.

Характерным является тот момент, что разброс точек, соответствующих времени τ_S , то есть собственно запаздыванию (кривая 1), составляет не более 20-30%, что по величине согласуется с подобным разбросом в работах [1,2], однако для τ_B и τ_E (кривые 2 и 3) разброс достигает нескольких раз. Так при $|\eta| = 190$ н.е. эти времена достигают 120 ед., при $|\eta| = 195$ н.е. падают до 40 ед., а при $|\eta| = 205$ н.е. снова возрастают до 70-80 ед. То есть амплитуда скачков достигает трех раз и более. Более подробное исследование показывает, что зависимости τ_B и τ_E , как и подобные зависимости в работе [2], имеют фракталоподобный характер.

Замечание. Природа этих скачков, по-видимому, состоит в особенностях условий синхронизма между колебаниями осцилляторов и воздействием возбуждения, что особенно критично должно проявляться в режиме умножения частоты. В настоящей работе вопрос о скачках подробно не рассматривается, констатируется лишь их наличие. Исследованию скачков авторы намереваются посвятить отдельную работу.

Перейдем теперь к рассмотрению амплитудных характеристик развития колебаний, показанных на рис.7. Точки соответствуют амплитудам A_S , A_B , A_E , A_F , снятым при тех же значениях $|\eta|$, что на предыдущем рисунке. Тонкие сплошные кривые также соединяют точки отрезками прямых линий. Ап-

проксимирующие зависимости здесь представляют собой прямые линии, показанные утолщенным пунктиром, параллельные горизонтальной оси.

Эти прямые соответствуют следующим уровням амплитуды:

линия 1: $A_S = 30$ н.е.; (12)

линия 2: $A_B = 350$ н.е.; (13)

линия 3: $A_E = 910$ н.е.; (14)

линия 4: $A_F = 730$ н.е. (15)

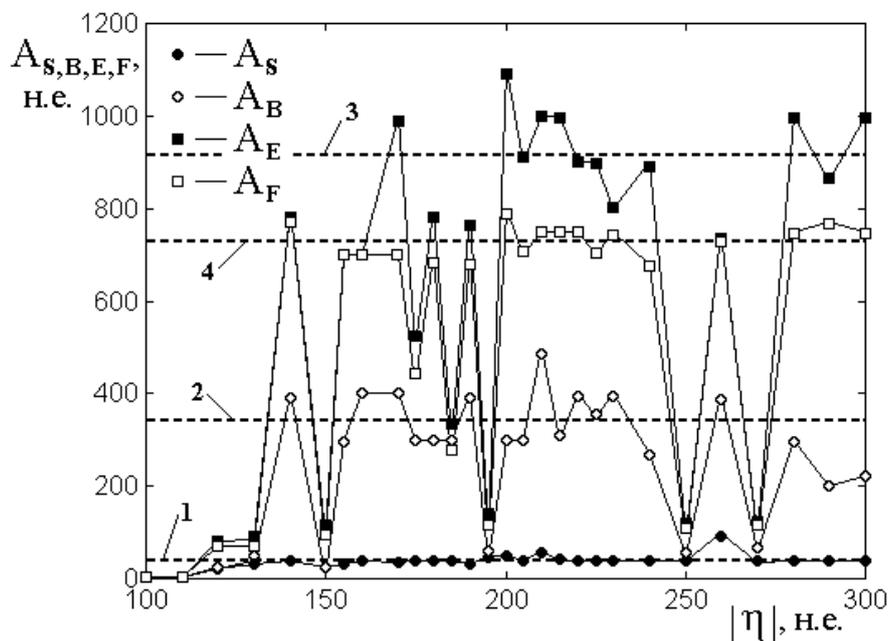


Рис.7. Зависимости амплитудных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи.

Из рисунка можно видеть, что все зависимости в среднем с той или иной степенью приближения соответствуют аппроксимирующим приближениям (12)-(15), означая отсутствие зависимости характерных амплитуд от параметра нелинейной связи $|\eta|$. Такое отсутствие зависимости начинается также с критического значения $|\eta|$, составляющего около 130 н.е. При $|\eta|$ меньше этого значения все амплитуды являются малыми (порядка 20-100 н.е.) и их значения сливаются друг с другом. По достижении критического значения $|\eta|$ про-

исходит резкий рост амплитуд: A_B до 400 н.е., A_E и A_F до 800 н.е., тогда как амплитуда первичного скачка A_S остается достаточно малой (около 30 н.е.). Дальнейшее увеличение $|\eta|$ амплитуду A_S практически не меняет, тогда как A_B , A_E и A_F по величине резко разграничиваются и проходят через ряд скачков, группируясь вокруг стационарных значений (12)-(15).

В большинстве случаев амплитуда A_E превышает A_F , что соответствует несколько большему значению скачка амплитуды при времени τ_E , чем установившееся в среднем значение A_F . Пример такого превышения можно видеть из рис.5, где A_E равняется 1100 н.е., тогда как A_F равно всего 900 н.е.

Следует отметить, что, несмотря на постоянство средних значений амплитуд A_B , A_E , A_F (кривые 2-4), их зависимости от $|\eta|$ имеют резко скачкообразный характер. Так при $|\eta|$ около 150, 190, 250, 270 н.е. эти зависимости имеют резкие провалы вниз вплоть до величины порядка 100 н.е., то есть меняются почти на порядок (так A_E при $|\eta| = 195$ н.е. составляет 120 н.е, а при $|\eta| = 200$ н.е – уже 1100 н.е.). Из сравнения с рис.6 можно видеть, что такие перепады приходятся как раз на аналогичные скачки зависимостей характерных времен от $|\eta|$, то есть обе характеристики колебаний – амплитуда и время изменения характера колебаний отражают одни и те же внутренние процессы в системе осцилляторов. Более подробное исследование показывает, что зависимости амплитуд A_B , A_E , A_F от параметра $|\eta|$, как и подобные зависимости характерных времен развития колебаний τ_B и τ_E от того же параметра, имеют фракталоподобный характер.

Природа скачкообразного характера обсуждаемых кривых, по-видимому, является той же, что и для временных зависимостей, то есть состоит в сложности условий синхронизма между собственными колебаниями осцилляторов и периодом возбуждения (см. замечание к рис.6).

Замечание. Следует заметить, что фракталоподобный характер приведенных кривых весьма затрудняет точное определение критического значения параметра нелинейной связи $|\eta|$, начиная с которого амплитуда колебаний резко растет. Так из рис.7 можно полагать, что критическое значение $|\eta|$ составляет около 120-130 н.е. Однако прохождение величины $|\eta|$ с более мелким, чем 5 н.е. показывает, что и ниже 120-130 н.е имеются редко расставленные узкие «островки» значений $|\eta|$, где амплитуда колебаний принимает довольно высокие значения. Такие островки наблюдаются примерно начиная с величины $|\eta|$ порядка 60 н.е. Так один из «островков» имеет место между 67.980 и 68.025 н.е. (то есть ширину 0.045 н.е.), где амплитуда колебаний первого осциллятора достигает 30-40 н.е., а в точке 68.020 даже возрастает до 120 н.е. Вне этого «островка» та же амплитуда составляет всего 2 н.е. Такой «всплеск» установившейся амплитуды сопровождается резким увеличением времени запаздывания τ_S , которое внутри «островка» достигает 70-80 ед., в отличие от полного отсутствия запаздывания вне него (см. рис.6). Другой подобный «островок» находится в районе значений $|\eta|$ около 80-90 н.е. и также имеет ширину порядка 0.05 н.е. Однако более или менее сплошной диапазон $|\eta|$, где амплитуда колебаний заведомо является достаточно высокой и время запаздывания значительным, начинается все же с $|\eta| = 120-130$ н.е., как это видно из рис.6 и рис.7.

9. Интерпретация наблюдаемых явлений на основе модели потенциала

Рассмотрим возможность интерпретации описанных в предыдущих разделах явлений на основе модели динамического потенциала.

В работе [1] отмечено, что нелинейная связь с отрицательным параметром взаимодействия между осцилляторами приводит к значительному первичному запаздыванию возбуждения колебаний. Линейная связь, согласно работе [2], существенным образом меняет время запаздывания, однако на небольших интервалах времени на амплитуде установившихся колебаний значительным

образом не сказывается. В настоящей работе выявлено, что нарастание амплитуды происходит в течение промежутка времени, значительно превышающего время первичного запаздывания, причем амплитуда в этих случаях может достигать весьма высоких значений (см. рис.5).

Для интерпретации характера наблюдаемой в работе [1] амплитуды колебаний первого осциллятора предложена модель динамического потенциала, минимум которого определяется амплитудой колебаний второго осциллятора. При амплитуде колебаний второго осциллятора порядка 5 н.е. минимум потенциала приходится на 200 н.е., что и определяет амплитуду колебаний первого осциллятора (см. рис.4 в работе [1]).

В работе [2] отмечена в некоторых случаях возможность увеличения амплитуды колебаний первого осциллятора до 500 н.е., однако ограничение сравнительно малым временем развертки колебаний (порядка 30 ед.) не позволило выявить более высоких уровней установления амплитуды. Для оценки уровня амплитуды первого осциллятора была привлечена модель динамического потенциала, хотя роль амплитуды второго осциллятора в достаточной степени не выявлялась. Однако подробное исследование показывает, что в формировании уровня амплитуды колебаний первого осциллятора второй осциллятор играет решающую роль.

Для демонстрации такой роли обратимся к системе (1)-(2), которую повторим здесь с целью наглядности:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma_1 \cdot x_2 + \delta \cdot x_1^3 + \eta \cdot x_1^2 x_2 = A \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (17)$$

Как можно видеть из уравнения (17), первый осциллятор, через переменную x_1 , обеспечивает возбуждение второго посредством слагаемого линейной связи вида $\gamma_2 x_1$. При этом второй осциллятор отдает первому часть энергии

своих колебаний через посредство слагаемого линейной связи в уравнении (16) вида $\gamma_1 x_2$. Кроме того второй осциллятор воздействует на первый за счет нелинейной связи вида $\eta \cdot x_1^2 x_2$. Однако, в отличие от линейной связи через $\gamma_1 x_2$, здесь эффективность воздействия пропорциональна квадрату переменной первого осциллятора x_1^2 . То есть эффективность воздействия второго осциллятора на первый тем выше, чем больше амплитуда колебаний первого осциллятора, причем благодаря квадратичности это воздействие увеличивается.

Таким образом, благодаря нелинейной связи, первый осциллятор через посредство второго воздействует сам на себя, подобно цепи положительной обратной связи, приводящей к лавинообразному процессу нарастания колебаний. Вообще говоря, такое самовоздействие в общем случае может привести к неограниченному росту амплитуды колебаний, то есть к уходу системы на бесконечность. Однако, как показано в работе [1], в ограничении амплитуды решающую роль играет член кубической нелинейности вида $\delta \cdot x_1^3$, не допускающий такой уход при надлежащей величине параметра δ . Тем не менее, можно ожидать, что механизм самовоздействия первого осциллятора, реализуемый в виде положительной обратной связи, через достаточный промежуток времени приведет к значительной величине установившейся амплитуды первого осциллятора. Решающую роль здесь будет играть также амплитуда колебаний второго осциллятора, так как член нелинейного воздействия $\eta \cdot x_1^2 x_2$ содержит эту амплитуду в виде коэффициента, прямо пропорционального x_2 .

Таким образом, в формировании динамического потенциала для уравнения (16) следует учитывать рост амплитуды колебаний второго осциллятора по мере увеличения амплитуды колебаний первого.

Рассмотрим, какую роль играет амплитуда второго осциллятора в формировании высокоамплитудных режимов колебаний. Обратимся к рис.8, где показаны зависимости амплитуд установившихся колебаний первого A_{F1} и второго

A_{F2} осцилляторов (а) и их отношения A_{F1}/F_{F2} (б) от параметра линейной связи γ . Параметр нелинейной связи положен равным $\eta = -200$ н.е. и от его изменения в пределах от 100 н.е до 800 н.е. характер картины не меняется.

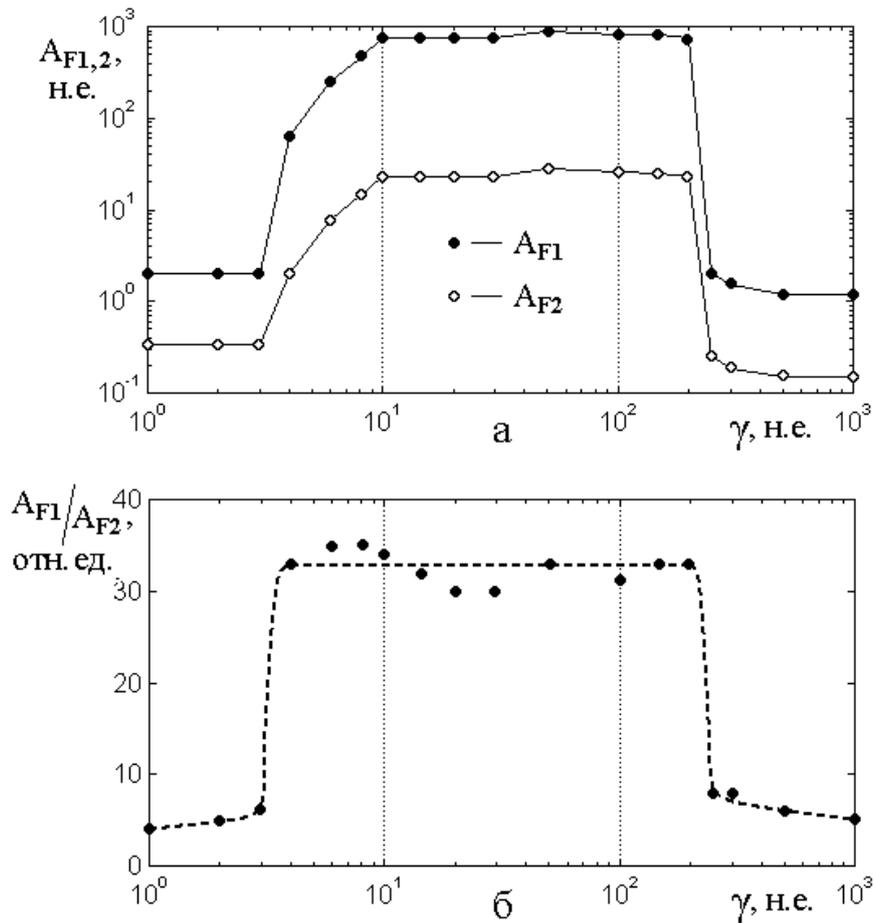


Рис.8. Зависимости амплитуд установившихся колебаний первого и второго осцилляторов (а) и их отношения (б) от параметра линейной связи.

Из рисунка можно видеть, что при параметре связи меньше 4 н.е. имеет место режим малой амплитуды: A_{F1} составляет порядка 2, отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 6 \pm 2$. При изменении параметра линейной связи γ от 4 до 200 н.е., то есть в высокоамплитудных режимах, где A_{F1} составляет от 60 н.е. до 1000 н.е. (согласно терминологии, введенной в [2], режим №1 – двухступенчатое запаздывание и режим №2 – плавное насыщение), отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 33 \pm 2$. При параметре связи больше 200 н.е., наступает снова мало-

амплитудный режим (режим №3 – перемежающиеся скачки), так что A_{FI} составляет от 0.5 до 2 н.е., а отношение амплитуд: $x_1/x_2 = 1.0 \pm 0.2$.

Примечательным является тот факт, что во всем интервале существования высокоамплитудных режимов отношение амплитуд колебаний осцилляторов составляет около 33 н.е. и практически не меняется. То есть, при амплитуде первого осциллятора порядка 800-1000 н.е., что, согласно рис.7, имеет место в интервале изменения $|\eta|$ от 140 до 300 н.е., амплитуда колебаний второго осциллятора составляет порядка 30 н.е. Можно полагать, что именно такая величина, в отличие от принятого в работах [1,2] значения 2-5 н.е., является основой для формирования динамического потенциала в случае высокоамплитудных режимов.

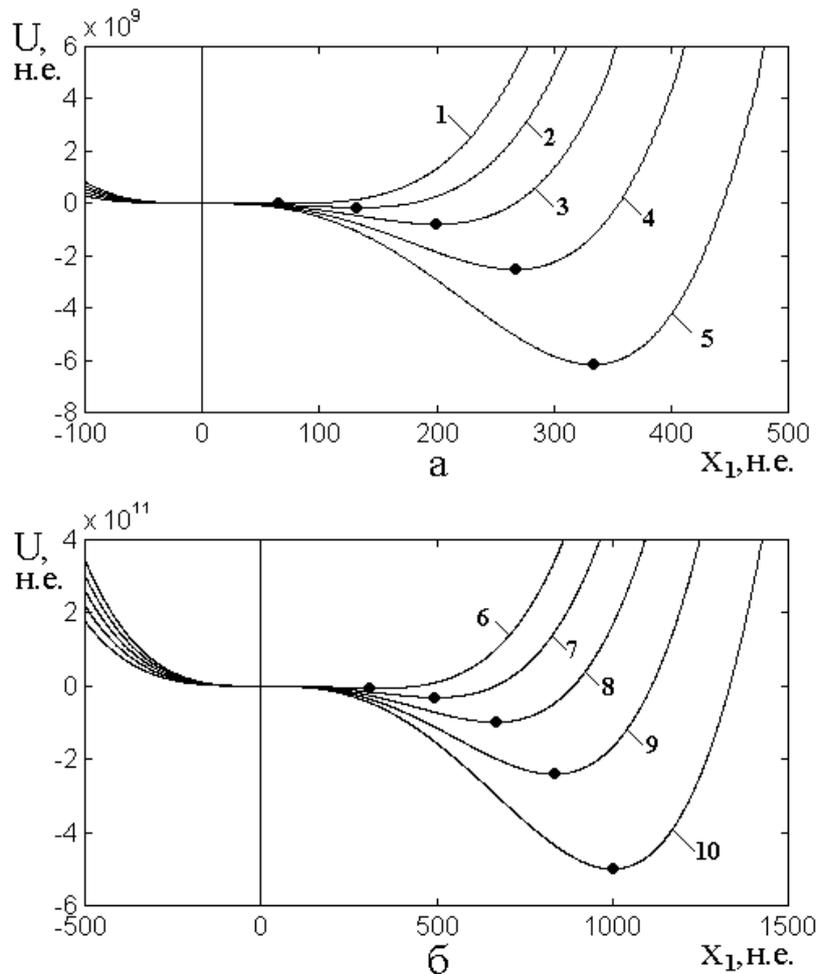


Рис.9. Потенциал при разных амплитудах второго осциллятора.

С целью наглядности рисунок разбит на две части «а» и «б», отличающиеся разными масштабами по обеим осям.

Кривые построены по формуле (18), где x_2 равняется: а – 1 – 2 н.е.; 2 – 4 н.е.; 3 – 6 н.е.; 4 – 8 н.е.; 5 – 10 н.е.; б – 6 – 10 н.е.; 7 – 15 н.е.; 8 – 20 н.е.; 9 – 25 н.е.; 10 – 30 н.е. Значение x_2 для кривых 5 и 6 – одно и то же: 10 н.е.

Точки соответствуют минимумам кривых.

Рассмотрим теперь, как в этих случаях ведет себя динамический потенциал, для чего обратимся к рис.9. На этом рисунке показаны зависимости потенциала (3)

$$U = \frac{\omega_1^2}{2} \cdot x_1^2 + \gamma_1 \cdot x_1 x_2 + \frac{\delta}{4} \cdot x_1^4 + \frac{\eta}{3} \cdot x_1^3 x_2 \quad (18)$$

от величины x_1 при различных значениях x_2 в качестве параметра.

Из рисунка можно видеть, что по мере увеличения x_2 минимум потенциала смещается в сторону больших значений x_1 , что и обеспечивает высокий уровень амплитуды в соответствующих режимах. На рис.10 показана зависимость переменной x_1 от x_2 в точках, соответствующих минимумам потенциала на предыдущем рисунке.

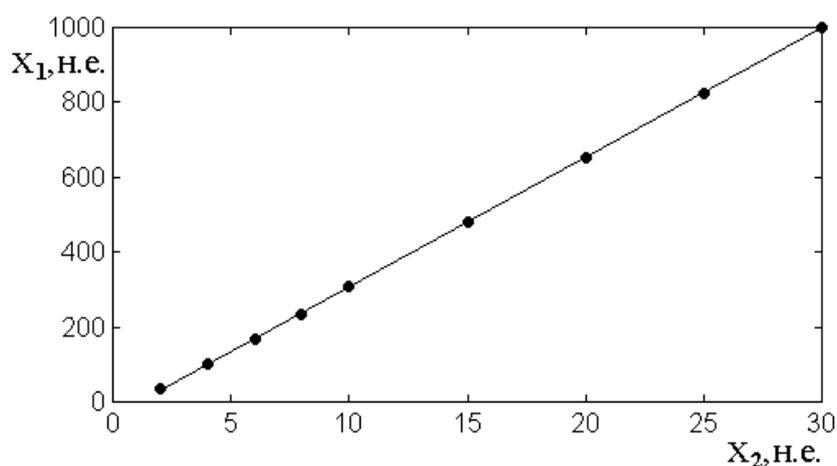


Рис.10. Зависимость переменной x_1 от x_2 в точках, соответствующих минимумам на предыдущем рисунке. Параметры – те же.

Из рисунка можно видеть, что точки с высокой степенью точности ложатся на линейную зависимость вида:

$$x_1 = k \cdot x_2, \quad (19)$$

где $k = 33.3$. Положения минимумов соответствуют равенству нулю производной от потенциала (18), то есть решению относительно x_1 следующего кубического уравнения:

$$\delta \cdot x_1^3 + \eta x_2 \cdot x_1^2 + \omega_1^2 \cdot x_1 + \gamma x_2 = 0. \quad (20)$$

Это уравнение содержит x_2 в качестве параметра. При этом оно в общем случае описывает кубическую параболу, однако при принятых в настоящей задаче значениях параметров первые два слагаемых значительно (на несколько порядков) превышают остальные, так что уравнение в первом приближении принимает вид:

$$\delta \cdot x_1^3 + \eta x_2 \cdot x_1^2 = 0, \quad (21)$$

что и дает линейную зависимость x_1 от x_2 вида:

$$x_1 = -\frac{\eta}{\delta} \cdot x_2, \quad (22)$$

которая при $\eta = -200$ н.е. и $\delta = 6$ н.е. соответствует (19).

Замечание. Приведенное здесь рассмотрение относится к единственному довольно специфическому набору параметров. То есть здесь везде (кроме рис. 8, приведенного для наглядности) приняты значения $\gamma = 10$ н.е. и $\delta = 6$ н.е. Однако в общем случае высокоамплитудные режимы сменяют малоамплитудные при различном соотношении параметров γ , η и δ . По-видимому, для получения наиболее полной информации о характере режимов, следует построить плоскость, по одной из координат которой будет отложен параметр линейной связи, а по другой – нелинейной. На такой плоскости можно наглядно отметить границы областей между различными режимами. Набор подобных плоскостей при различных значениях δ , как параметра, позволил бы получить трехмерную картину распределения режимов колебаний. Исследование возможности построения такой картины авторы оставляют до отдельной работы.

10. Развитие колебаний при средней степени линейной связи

Рассмотрим теперь особенности колебаний системы при средней степени линейной связи $\gamma = 50$ н.е., где переход к установившемуся режиму происходит за более короткий промежуток времени, чем в предыдущем случае.

Прежде всего отметим, что для реализации представленных далее высокоамплитудных режимов необходимо превышение первого критического значения параметра нелинейной связи $|\eta_{\tilde{N}1}| = 11$ н.е. При $|\eta|$ ниже этого значения запаздывание отсутствует и амплитуда остается постоянной на уровне 2-3 н.е., то есть режим является малоамплитудным, подобным рассмотренному в работе [2], имеющему место ниже критического значения линейной связи. Здесь этому режиму уделять внимания не будем, а рассмотрим лишь режимы, где амплитуда колебаний принимает большие значения.

На рис.11 показаны наиболее характерные варианты развития таких колебаний при различных уровнях параметра нелинейной связи $|\eta|$.

Из рисунка можно видеть, что во всех случаях имеет место начальное запаздывание развития колебаний, причем по мере увеличения параметра $|\eta|$ такое запаздывание уменьшается. Так на рис.11а время запаздывания равно 17 ед., на рис.11б – 7 ед., на рис.11в – 3 ед., а на рис.11г – всего около 1 ед. времени. В первых трех случаях установившаяся амплитуда имеет примерно одну и ту же величину – около 700-900 н.е., что говорит о едином значении главного минимума динамического потенциала, то есть об определенном единстве первых трех процессов. Однако видно, что характер самих колебаний во всех случаях заметно различается, что позволяет выделить три различных режима.

Итак, первый из показанных на рис.11 режимов (а), вообще говоря, тождественен обсужденному в работе [2] режиму двухступенчатого запаздывания. Этот режим имеет место при изменении $|\eta|$ от 11 до 40 н.е., то есть ограничен двумя критическими значениями параметра η : снизу $|\eta_{\tilde{N}1}| = 11$ н.е. и сверху $|\eta_{\tilde{N}2}| = 40$ н.е. Характерным свойством этого режима является сильно выра-

женный хаотический характер вариаций амплитуды, достигающих 30% от средней величины. После установления амплитуды при времени около 75 ед. колебания приобретают несколько более упорядоченный характер, имеющий следы двухпериодичности, однако элемент хаотичности остается достаточно сильным в пределах тех же 30%.

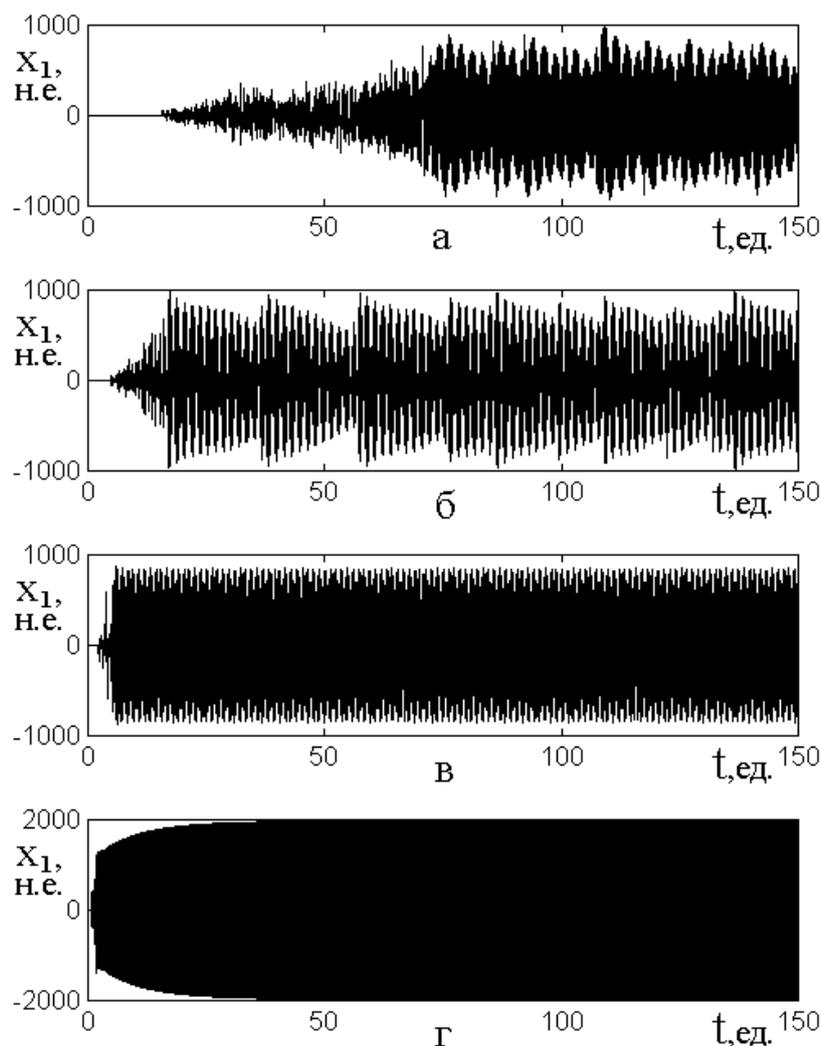


Рис.11. Развитие колебаний при средней степени линейной связи ($\gamma = 50$ н.е.) и различных уровнях параметра нелинейной связи $|\eta|$:
 а – 36 н.е., б – 110 н.е., в – 300 н.е., г – 1200 н.е.

Второй режим (рис.11б) также близок к двухступенчатому запаздыванию, однако здесь скорее можно говорить не о двух, а о трех скачках амплитуды: при 7, 11 и 17 ед. времени. В установившемся состоянии (после 17 ед. времени)

здесь наблюдаются сильно выраженные пилообразные почти периодические колебания амплитуды. Этот режим имеет место при изменении $|\eta|$ от 40 до 140 н.е., то есть ограничен двумя критическими значениями параметра η : снизу $|\eta_{\tilde{N}2}| = 11$ н.е. и сверху $|\eta_{\tilde{N}3}| = 140$ н.е. Период «пилы» составляет около 20-25 н.е. и во времени несколько варьируется. Высота «зубьев» достигает 20-30% от средней величины. Хаотическая составляющая выражена слабо и проявляется только до третьего скачка амплитуды, то есть до времени около 17 ед.

Третий режим (рис.11в) тоже в какой-то степени можно отнести к варианту двухступенчатого запаздывания, однако здесь промежуток времени между первым и вторым скачками крайне мал (от 3 до 5 ед. времени), после чего колебания сразу устанавливаются в полностью регулярном виде с постоянной амплитудой без какой-либо примеси хаотической составляющей. То есть такой режим можно назвать режимом «регулярного установления». Этот режим ограничен двумя критическими значениями параметра η : снизу $|\eta_{\tilde{N}3}| = 140$ н.е. и сверху $|\eta_{\tilde{N}4}| = 400$ н.е. При увеличении параметра нелинейной связи выше $|\eta_{\tilde{N}4}|$ система уходит на бесконечность, причем увеличение параметра кубической нелинейности δ выше принятого значения 6 н.е. вплоть до 100 н.е. уход системы на бесконечность полностью не предотвращает, лишь несколько увеличивая значение $|\eta_{\tilde{N}4}|$, однако не более чем на 20%. Следует отметить, что при $\delta = 6$ н.е. значение $|\eta_{\tilde{N}4}| = 400$ н.е. не является четко установленным. Так при $|\eta| = 405$ н.е. колебания снова возобновляются, но при 410 н.е. система все же уходит на бесконечность. Такие скачкообразные вариации зависимости амплитуды от $|\eta|$ продолжаются вплоть до нового критического значения $|\eta_{C5}| = 935$ н.е., после которого уход системы на бесконечность прекращается и колебания принимают четкий регулярный характер. Типичный пример таких колебаний показан на рис.11г. Этот режим уже не является «родственным» по отношению к первым трем. Установившаяся амплитуда по мере увеличения

$|\eta|$ от значения 700-900 н.е. начинает расти и, как можно видеть из рис.11г, при $|\eta| = 1200$ н.е. составляет 2000 н.е., а при дальнейшем увеличении $|\eta|$ еще более увеличивается. То есть главный минимум потенциала приходит в движение и начинает «сползать» к более высоким значениям x_1 .

Из рис.11г можно видеть, что после первичного скачка до примерно 1000 н.е., имеющего место при времени порядка 2-3 ед., амплитуда устанавливается не сразу (как на рис.11в), а постепенно растет по закону, типа «единица минус экспонента в отрицательной степени». При времени порядка 30 ед. амплитуда наконец устанавливается на уровне 2000 н.е. и далее не меняется. Таким образом, по своим свойствам это режим соответствует рассмотренному в работе [2] режиму №2 – плавного насыщения. Этот режим имеет место до следующего критического значения $|\eta_{C6}| = 4000$ н.е., выше которого система уже более или менее устойчиво уходит на бесконечность. Заметим однако, что это критическое значение, подобно η_{C4} , определено не вполне четко. Так отдельные «островки» регулярного режима встречаются вплоть до $|\eta| = 10000$ н.е., однако эти «островки» довольно узки и немногочисленны, так что для характеристики режима значение $|\eta_{C6}| = 4000$ н.е. можно считать вполне приемлемым.

11. Динамические характеристики колебаний при средней степени линейной связи

После общего обзора характера колебаний при средней степени линейной связи, обратимся к изучению некоторых наиболее характерных их характеристик. Из рис.11 можно видеть, что наибольшее разнообразие режимов имеет место при сравнительно небольшой величине параметра нелинейной связи, поэтому ограничимся сверху значением $|\eta| = 400$ н.е. и рассмотрим в этом интервале временные и амплитудные характеристики возбуждаемых колебаний более подробно. Сначала проследим за временем первичного запаздывания τ_S и временем последнего резкого скачка амплитуды колебаний τ_E (рис.5), после

которого характер колебаний принимает более или менее установившееся значение. Рассмотрим рис.12, где показаны зависимости τ_S и τ_E от $|\eta|$.

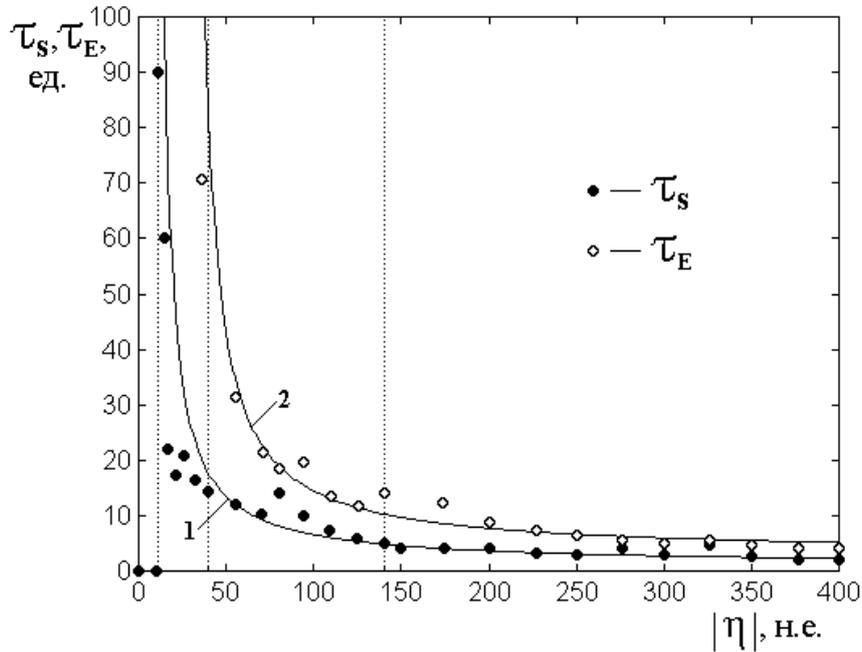


Рис.12. Зависимости временных параметров развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи. Параметр линейной связи $\gamma = 50$ н.е. Вертикальные точечные линии соответствуют границам между режимами.

Приведенные на рисунке линии 1, 2, приближенно аппроксимирующие точки, построены по следующим эмпирическим формулам:

$$\text{кривая 1: } \tau_S = \frac{500}{|\eta| - 10} + 1; \quad (23)$$

$$\text{кривая 2: } \tau_E = \frac{800}{|\eta| - 30} + 3. \quad (24)$$

Из рисунка видно, что обе зависимости, подобно таковым на рис.6 (кривые 1 и 3) аппроксимируются кривыми зависимостями типа обратной пропорциональности. Здесь однако область высоких запаздываний (порядка 100 ед. времени) начинается при $|\eta| = 11$ н.е. (то есть при $|\eta_{C1}|$), тогда как на рис.6 –

при $|\eta| = 130$ н.е., то есть при значении $|\eta|$ более чем на порядок меньшем. Время запаздывания τ_S здесь также несколько меньше, однако не более чем в 2-3 раза. Время установления стационарной амплитуды здесь также намного меньше такового при слабой связи. Так при $|\eta| = 150$ н.е. на рис.6 это время составляет порядка 120 ед. времени, здесь же – всего около 12 ед., что меньше как раз на порядок.

Следует заметить также, что здесь скачкообразный характер приведенных зависимостей, особенно τ_E , по сравнению с рис.6, значительно сглажен. Разброс значений τ_S примерно такой же, однако разброс значений τ_E в области $|\eta|$ от 150 н.е. до 200 н.е. там достигает двух трех раз, тогда как здесь не превышает 30%.

Обратимся теперь к рис.13, где показана зависимость установившейся амплитуды A_F от $|\eta|$ при тех же условиях.

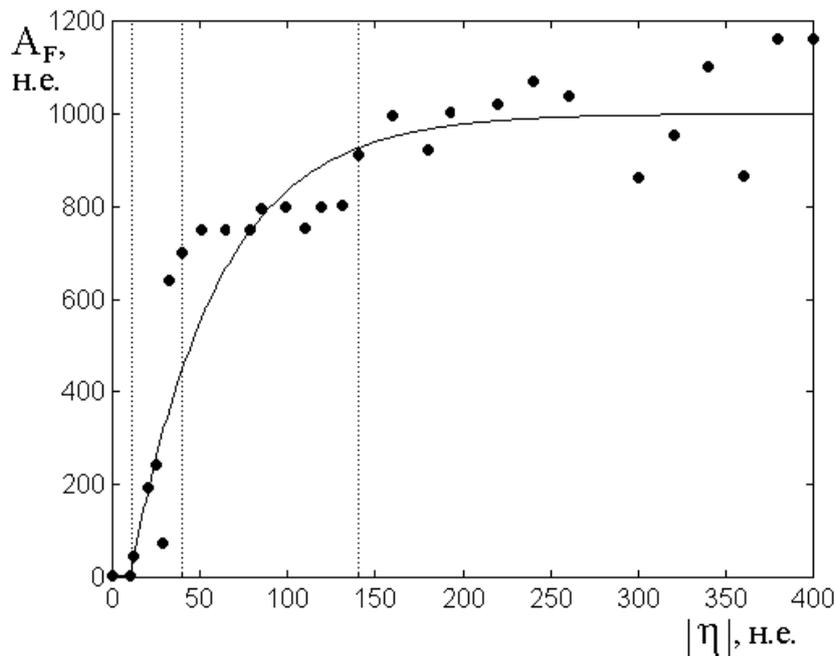


Рис.13. Зависимость амплитуды установившихся колебаний первого осциллятора от абсолютной величины параметра нелинейной связи. Параметр линейной связи $\gamma = 50$ н.е. Вертикальные точечные линии соответствуют границам между режимами.

Приведенная на рисунке аппроксимирующая кривая построена по формуле:

$$A_F = 1000 \cdot \left\{ 1 - \frac{\exp[-(|\eta| - 10)]}{50} \right\}. \quad (25)$$

Из рисунка можно видеть, что зависимость установившейся амплитуды в среднем аппроксимируется кривой типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем». Такое поведение составляет заметное отличие от кривых, приведенных на рис.7 (кривая 4), где в среднем какая-либо зависимость отсутствует. Заметим однако, что там кривые также начинались при $|\eta| = 130$ н.е. с весьма малых значений (около 70 н.е.), так что, вообще говоря, кривую типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем» там построить также было бы можно. Однако роста этой кривой на начальном участке был бы весьма крутым. Так значение $A_F = 750$ н.е., приходящееся как раз на аппроксимирующую прямую 4 там достигалось уже при $|\eta| = 140$ н.е. (то есть правее начала кривой на 10 н.е.). Здесь же выход на более или менее установившийся уровень в 900 н.е. требует изменения $|\eta|$ с 10 до 150 н.е., то есть на 140 н.е. Поэтому зависимость типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем» здесь более уместна, чем горизонтальная прямая на рис.7. Заметим дополнительно, что здесь скачкообразные отклонения от аппроксимирующей зависимости выражены также значительно слабее. Так на рис.7 отдельные выбросы точек относительно кривой 4 в области $|\eta|$ от 150 до 200 н.е. достигают 4-5 раз, тогда как здесь отклонения точек от аппроксимирующей кривой не превышают 20%.

Контрольная проверка конфигурации динамического потенциала показывает, что здесь, как и в случае слабой связи, амплитуда колебаний соответствует главному минимуму потенциала с учетом амплитуды колебаний второго осциллятора. Однако здесь, в отличие от предыдущего случая, где во всем интервале существования высокоамплитудных режимов соотношение амплитуд пер-

вого осциллятора ко второму A_{F1}/A_{F2} сохранялось постоянным, равным 33 отн. ед. (рис.8б), подобное соотношение по мере изменения $|\eta|$ меняется. Так, при $|\eta| = 40$ н.е. отношение A_{E1}/A_{E2} равно 7, при $|\eta| = 200$ н.е. оно составляет 33, при $|\eta| = 300$ н.е. увеличивается до 50, а при $|\eta| = 3800$ н.е. возрастает до 630. Если оставить в стороне последнее значение, как относящееся к другому режиму, то все равно, в первых трех случаях, являющихся разновидностями режима двухступенчатого запаздывания, отношение установившихся амплитуд осцилляторов в полном интервале изменения $|\eta|$ все же возрастает примерно в 5-7 раз. Тем не менее, как уже сказано выше, амплитуда установившихся колебаний главному минимуму потенциала соответствует с довольно высокой степенью точности.

12. Развитие колебаний при высокой степени линейной связи

Рассмотрим теперь особенности колебаний системы при высокой степени линейной связи $\gamma = 300$ н.е. Как показано в работе [2], при такой степени связи (то есть выше критической равной 214 н.е.) высокоамплитудные колебания в обычных условиях не возбуждаются. Вместо них происходит установление нового равновесного положения, вокруг которого затем происходят более или менее регулярные колебания малой амплитуды (согласно [2] – режим малоамплитудной релаксации). Там же показано, что колебания с малой амплитудой обусловлены наличием дополнительного локального минимума потенциала вблизи нулевого значения переменной первого осциллятора, отделенного от главного минимума потенциальным барьером (рис.15 в работе [2]).

Для возбуждения колебаний большой амплитуды следует выйти из локального минимума и перейти в область главного минимума потенциала, для чего надо преодолеть разделяющий эти минимумы потенциальный барьер.

В работе [2] предложены два варианта преодоления такого барьера: задание достаточно большого начального смещения осциллятора, приходящегося по другую сторону барьера или задание достаточно большой амплитуды воз-

буждения, способной «выкинуть» колебания осциллятора за пределы локального минимума. Воспользуемся обеими такими возможностями возбуждения высокоамплитудных колебаний и рассмотрим это способы более подробно.

13. Задание начального смещения

Рассмотрим сначала вариант задания начального смещения. Из рис.15 в работе [2] можно видеть, что вершина разделяющего минимума потенциального барьера приходится примерно на 1.5 н.е. Более подробная проверка показывает, что имеет место критическое значение начального смещения первого осциллятора $x_{10C} = 2.5$ н.е. Ниже этого значения при амплитуде возбуждения $A_0 = 50$ н.е. наблюдается малоамплитудный режим перемежающихся скачков со смещением положения равновесия на величину порядка 2-4 н.е., а выше – ряд высокоамплитудных режимов без смещения центра. Эти режимы по мере увеличения параметра нелинейной связи сменяют друг друга при достижении этим параметром определенных критических значений. Типичный ряд наблюдаемых при задании начального отклонения высокоамплитудных режимов колебаний показан на рис.14.

Из рисунка можно видеть, что большинство наблюдаемых режимов совпадает с рассмотренными в работе [2]. Так рис.14а соответствует малоамплитудному режиму перемежающихся скачков с равновесным положением около 4 н.е. Рис.14б соответствует варианту режима двухступенчатого запаздывания с пилообразным развитием колебаний. Рис.14г соответствует другому варианту режима двухступенчатого запаздывания – регулярному установлению.

Исключением является отсутствующий в работе [2] режим, показанный на рис.14в, где колебания развиваются в виде высокоамплитудной синусоиды, не коррелирующей по фазе ни с колебаниями обоих осцилляторов, ни с сигналом возбуждения. Будем называть далее этот режим «асинхронной синусоидой». Период такой синусоиды значительно превышает периоды колебаний как обоих осцилляторов, так и возбуждения. Так период собственных колебаний первого осциллятора (а также и возбуждения) равен 1.25 ед. времени, второго –

0.417 ед. времени, тогда как период наблюдаемой синусоиды меняется от 2 до 12 ед. времени и составляет тем большую величину, чем параметр нелинейной связи больше.

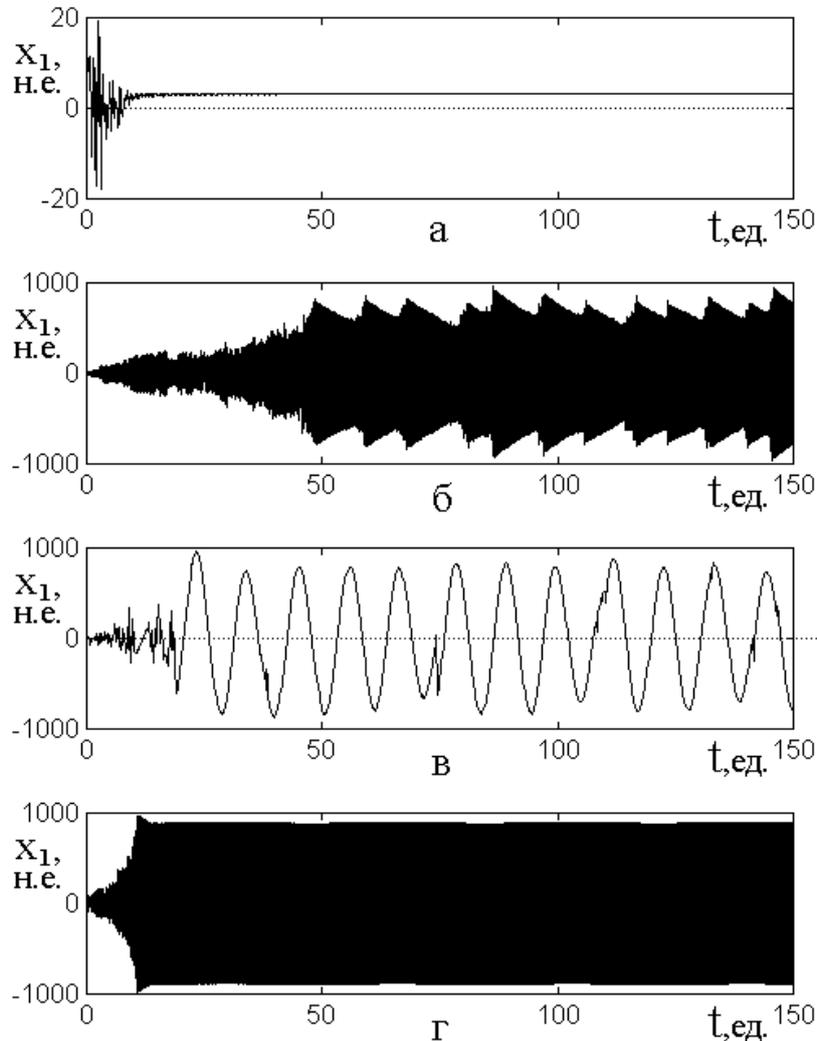


Рис.14. Развитие колебаний при высокой степени линейной связи ($\gamma = 300$ н.е.) и начальном смещении $x_{10} = 20$ н.е., соответствующих различным уровням параметра нелинейной связи $|\eta|$: а – 6 н.е., б – 10 н.е., в – 22 н.е., г – 30 н.е.

Можно полагать, что причиной значительной величины периода асинхронной синусоиды является почти плоский участок потенциала (вблизи нуля, где имеется перегиб), на котором рабочая точка вследствие малости его наклона движется медленно, поэтому проводит на нем много времени.

Из приведенных на рис.14 численных значений параметра нелинейной связи $|\eta|$ можно видеть, что наблюдаемое многообразие режимов имеет место

при сравнительно небольших величинах этого параметра. Так при возбуждении колебаний с нулевым начальным отклонением, рассмотренных в работе [2], требуется величина параметра нелинейной связи $|\eta| = 200$ н.е. Здесь же все подобные режимы реализуются уже при $|\eta| = 30$ н.е. Дальнейшее (выше 30 н.е.) увеличение параметра $|\eta|$, вплоть до 400 н.е., к изменению режима регулярного установления (рис.14г) не приводит, а при еще большем превышении система уходит на бесконечность.

Наблюдаемые малые величины параметра нелинейной связи можно объяснить тем, что в реализации того или иного режима главным фактором является конкретная конфигурация динамического потенциала [1, 2]. В формировании такого потенциала участвуют одновременно оба вида связи осцилляторов: линейная и нелинейная. Можно полагать, что, чем выше линейная связь, тем меньшее значение нелинейной связи требуется для реализации того же вида потенциала, что и приводит к следующему из этой конфигурации виду режима.

Важно отметить, что первичное запаздывание отсутствует во всех режимах. То есть можно считать, что именно нулевое начальное отклонение является необходимым условием первичного запаздывания.

Замечание. В работе [2] в разделе 13 при описании рис.15 отмечено, что при начальном отклонении $x_{10} = 3$ н.е. режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения, имеющим время запаздывания $\tau_S = 0.5$ ед. времени, что противоречит высказанному выше утверждению. Однако можно полагать, что столь малое время запаздывания (меньше периода колебаний первого осциллятора) находится в пределах ошибки измерения, особенно с учетом фракталоподобного характера зависимости τ_S от параметров связи. Поэтому можно считать, что высказанное выше положение о необходимости для первичного запаздывания нулевого значения начального отклонения, в первом приближении является достаточно достоверным.

По мере увеличения параметра нелинейной связи характер возбуждаемых режимов сменяется пороговым образом при определенных его критических

значениях, которые обозначим далее в порядке возрастания $|\eta_{D1,2,3,4}|$, так что $|\eta_{D1}| \leq |\eta_{D2}| \leq |\eta_{D3}| \leq |\eta_{D4}|$. Так при $0 \leq |\eta| \leq |\eta_{D1}|$ имеет место малоамплитудный режим перемежающихся скачков. Между $|\eta_{D1}|$ и $|\eta_{D2}|$, то есть при $|\eta_{D1}| \leq |\eta| \leq |\eta_{D2}|$ – высокоамплитудный режим пилообразной амплитуды. Между $|\eta_{D2}|$ и $|\eta_{D3}|$, то есть при $|\eta_{D2}| \leq |\eta| \leq |\eta_{D3}|$ – высокоамплитудный режим асинхронной синусоиды. Выше $|\eta_{D3}|$, то есть при $|\eta_{D3}| \leq |\eta| \leq |\eta_{D4}|$ – высокоамплитудный режим регулярного установления, а еще выше, то есть при $|\eta_{D4}| \leq |\eta| \rightarrow +\infty$ система уходит на бесконечность.

Обратимся к рис.15, где показаны зависимости критических значений параметра нелинейной связи от величины начального смещения первого осциллятора. Кривые соответствуют следующим критическим значениям: 1 – $|\eta_{D1}|$; 2 – $|\eta_{D2}|$; 3 – $|\eta_{D3}|$.

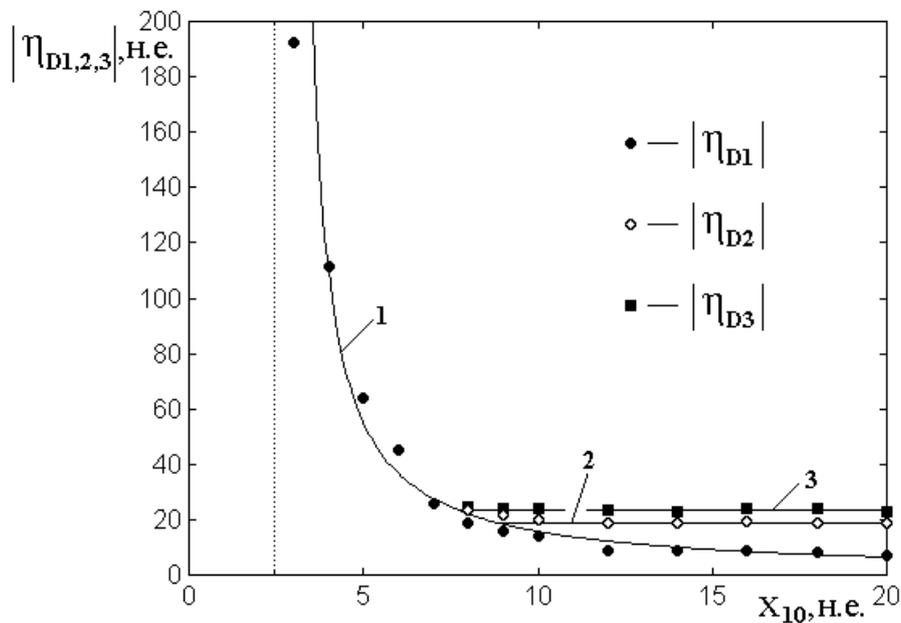


Рис.15. Зависимости критических значений параметра нелинейной связи от величины начального смещения первого осциллятора. Кривые соответствуют следующим критическим значениям: 1 – $|\eta_{D1}|$; 2 – $|\eta_{D2}|$; 3 – $|\eta_{D3}|$. Вертикальная точечная линия соответствует критическому начальному смещению первого осциллятора $x_{10C} = 2.5$ н.е.

Приведенная на рисунке аппроксимирующая кривая 1 построена по формуле:

$$|\eta_{D1}| = \frac{110}{x_{10} - 3}. \quad (26)$$

Аппроксимирующие кривые 2 и 3 – прямые линии, параллельные горизонтальной оси, проведенные на уровнях: 2 – 18 н.е., 3 – 20 н.е.

Из рисунка можно видеть, что основная аппроксимирующая кривая 1 довольно хорошо аппроксимируется зависимостью типа обратной пропорциональности. При этом ниже кривой 1, а также левее вертикальной точечной линии везде имеет место только малоамплитудный режим перемежающихся скачков. Выше аппроксимирующей кривой 1 имеют место высокоамплитудные режимы. Линии 2 и 3, определяющие верхние границы режимов асинхронной синусоиды и регулярного установления при $x_{10} < 8$ н.е. полностью сливаются с кривой 1, так что в этой области остается только этот последний режим. Выше линии 3 также имеет место только режим регулярного установления, а при $x_{10} > 8$ н.е. (или 9 н.е.) наблюдаются две узких полосы существования режимов пилообразной амплитуды и асинхронной синусоиды.

Таким образом, из высокоамплитудных режимов преобладающим является режим регулярного установления, а остальные режимы существуют только в довольно узких областях изменения параметра нелинейной связи, расположенных вблизи нижнего его критического значения.

14. Задание амплитуды возбуждения

Рассмотрим теперь вариант формирования высокоамплитудных режимов за счет задания достаточно большой амплитуды возбуждения при отсутствии начального отклонения.

Исследование показывает, что высокоамплитудные режимы имеют место только при превышении амплитудой возбуждения определенного критического значения A_{0C} , зависящего от величины параметра нелинейной связи $|\eta|$. Так в

работе [2] показано, что при $|\eta| = 200$ н.е. малоамплитудный режим перемежающихся скачков сменяется режимом плавного насыщения при достижении амплитудой возбуждения значения $A_{0C} = 160$ н.е. Более подробно зависимость критического значения амплитуды возбуждения от величины параметра нелинейной связи иллюстрируется рис.16.

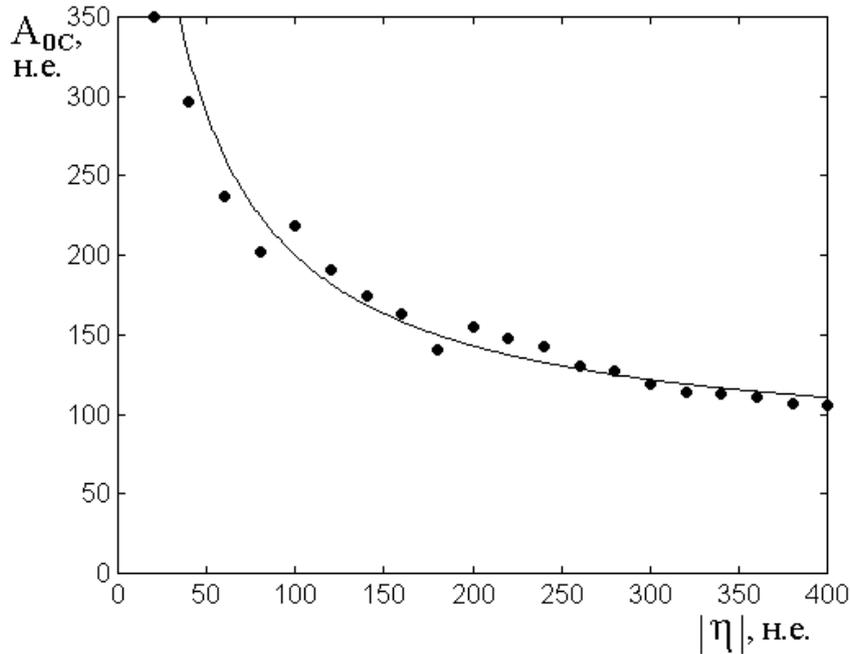


Рис.16. Зависимость критического значения амплитуды возбуждения от величины параметра нелинейной связи. Параметр линейной связи: $\gamma = 300$ н.е.

Приведенная на рисунке аппроксимирующая кривая построена по формуле:

$$A_{0C} = \frac{15000}{|\eta| + 20} + 75. \quad (27)$$

Из рисунка можно видеть, что аппроксимирующая кривая довольно хорошо аппроксимируется зависимостью типа обратной пропорциональности. Ниже этой кривой везде имеет место малоамплитудный режим перемежающихся скачков. Выше – высокоамплитудный режим типа регулярного установления. Нижняя граница $|\eta|$ четко не выражена и находится около 12-15 н.е. Дру-

гие режимы, если где-то и существуют, то выражены в крайне малой степени и на рисунке не отражены.

Важным моментом является тот факт, что при превышении амплитудой возбуждения критического значения режим регулярного установления всегда сопровождается значительным первичным запаздыванием развития колебаний. При этом время такого запаздывания τ_S , в зависимости от параметра нелинейной связи $|\eta|$, меняется резкими скачками в интервале от 10 до 110 ед. времени и ведет себя фракталоподобным образом. Так при $|\eta| = 200$ н.е. время запаздывания $\tau_S = 25$ ед., при $|\eta| = 300$ н.е. это время составляет уже 110 ед., а при $|\eta| = 400$ н.е. падает до 10 ед. времени. Такое поведение τ_S сходно с наблюдаемым на рис.6 (кривая 1), однако проявляется здесь в значительно более сильной степени, более похожей на характер изменения времен τ_B и τ_E (кривые 2 и 3), однако относящейся все же к первичному запаздыванию τ_S .

Можно полагать, что такое усиление фракталоподобного характера изменения τ_S вызвано усложнением условий синхронизма колебаний при высоких уровнях возбуждения. Заметим однако, что точное выяснение этого вопроса требует подробного исследования, в настоящей работе не проводившегося.

Таким образом, можно полагать, что реализация высокоамплитудных режимов при нулевом начальном отклонении за счет увеличения амплитуды возбуждения, хотя и отличается меньшим их разнообразием (уверенно возбуждается только режим регулярного установления), но все же приводит к значительным вариациям времени первичного запаздывания. Такое обстоятельство может служить подтверждением сделанного выше вывода о том, что для реализации первичного запаздывания начальное отклонение должно отсутствовать.

Приведем в заключение еще одно небольшое наблюдение, касающееся амплитуды возбуждающего сигнала. Так при параметре $|\eta|$ вблизи нуля и даже равном нулю, если амплитуда возбуждения низкая (до 1000 н.е.) – имеют место регулярные синусоидальные колебания с малой амплитудой и частотой, соот-

ветствующей частоте возбуждения. Однако если амплитуда возбуждения превышает примерно 2000 н.е. (проверено до 10000 н.е.) колебания приобретают стохастический характер (амплитуда 4-20 н.е., смещение равновесия отсутствует), то есть наблюдается как бы квазихаотический шум малой амплитуды. При превышении параметром $|\eta|$ критического значения порядка 10-12 н.е. такой шум переходит в режимы, описанные выше. Квазихаотический режим авторы намереваются рассмотреть в отдельной работе.

15. Некоторые заключительные замечания

В этой и двух предыдущих частях настоящей работы [1, 2] рассмотрено явление нестационарного запаздывания возбуждения нелинейных колебаний системы из двух связанных осцилляторов в режиме умножения частоты. Основные стороны наблюдаемых явлений, в первую очередь амплитудные и пороговые характеристики, объяснены на основе модели динамического потенциала. Однако остается ряд вопросов, выходящих за рамки этой модели, по крайней мере в том виде, как она представлена в настоящей работе. Эти вопросы еще требуют разрешения, поэтому перечислим их вкратце, не вдаваясь в излишние подробности.

- 1) природа первичного запаздывания возбуждения колебаний;
- 2) причины различия характера высокоамплитудных режимов колебаний;
- 3) стохастический фракталоподобный характер временных и амплитудных зависимостей от параметров связи;
- 4) роль синхронизма между частотами обоих осцилляторов и возбуждающего воздействия;
- 5) роль времен релаксации первого и второго осцилляторов и необходимость их различия для реализации запаздывания;
- 6) роль несимметричности потенциала;
- 7) роль знака параметра нелинейной связи;
- 8) необходимость умножения частоты второго осциллятора относительно частоты первого;

9) природа шума при большой амплитуде возбуждения.

Очевидно, ввиду сложности явления, этот список вопросов нельзя считать полным, однако можно надеяться, что их разрешение прольет дополнительный свет на общую природу нелинейных колебаний системы с двумя степенями свободы.

Заключение

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему.

Продолжено рассмотрение задачи о возбуждении вынужденных нелинейных колебаний намагниченности и упругого смещения в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. В основу рассмотрения положена модель двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого, первый из которых обладает нелинейными свойствами, а второй остается линейным.

На основе квадратичного приближения для осцилляторов записана система из двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка. Нелинейная связь в такой системе обеспечивается членом первого уравнения, пропорциональным произведению квадрата первой переменной на вторую. Линейная связь в каждом уравнении обеспечивается членом, пропорциональным переменной другого уравнения.

Интерпретация развития колебаний в такой системе проведена на основе модели динамического потенциала, предложенной в первой части настоящей работы. Во второй части рассмотрены различные режимы колебаний, имеющие место при вариации параметра линейной связи. В настоящей, третьей части работы исследованы различные режимы колебаний при вариации параметра нелинейной связи.

Выполнена классификация наблюдаемых режимов по величине амплитуды возбуждаемых колебаний. Показано, что из всего многообразия наблюдаемых колебаний можно выделить две большие группы режимов – малоамплитудные и высокоамплитудные. Амплитуда колебаний в высокоамплитудном

режиме превышает таковую в малоамплитудном режиме на три порядка и более. Отношение амплитуды колебаний первого осциллятора к амплитуде второго в малоамплитудном режиме составляет несколько единиц, а в высокоамплитудном режиме достигает нескольких десятков. Малоамплитудные режимы имеют место в двух случаях: при очень слабой степени линейной связи и при очень сильной. Высокоамплитудные режимы имеют место при промежуточной величине линейной связи. Малоамплитудные режимы слабой связи характеризуются отсутствием запаздывания и высокой стабильностью возбуждаемых колебаний. Малоамплитудные режимы сильной связи характеризуются сильной хаотической составляющей начальных колебаний, после чего их амплитуда резко падает и далее колебания происходят с малой амплитудой вокруг смещенного положения равновесия. Высокоамплитудные режимы характеризуются значительным запаздыванием, сильной примесью хаотических колебаний в процессе установления и высокой стабильностью установившихся колебаний.

Исследовано развитие колебаний во времени в типичных высокоамплитудных режимах. Показано, что развитие колебаний последовательно проходит следующие стадии: первичное запаздывание, первичный скачок амплитуды, постепенный хаотический рост амплитуды, пилообразные колебания, регулярное установление. Выделены типичные временные и амплитудные параметры, характеризующие развитие колебаний. Показано, что характер колебаний при изменении параметра нелинейной связи существенным образом зависит от величины параметра линейной связи. Выявлены три различных степени величины этого параметра: сильная, средняя и слабая, приводящие к различным режимам колебаний.

Рассмотрен случай низкой степени линейной связи. Показано, что по мере увеличения параметра нелинейной связи последовательно наступают следующие режимы: двухступенчатое запаздывание с сильной хаотической составляющей, пилообразные колебания амплитуды и регулярное установление. Показано, что зависимости временных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи в среднем описываются

функциями типа обратной пропорциональности. В качестве причины формирования такой функциональной зависимости предложено усиление степени связи между осцилляторами. Выявлен сильный разброс значений времени запаздывания при малых изменениях параметра нелинейной связи, имеющий фракталоподобный характер. В качестве причины такого разброса высказано предположение о сложности условий синхронизма между колебаниями обоих осцилляторов и сигналом возбуждения.

Рассмотрены зависимости амплитудных параметров возбуждаемых колебаний от величины параметра нелинейной связи. Показано, что начиная с критической величины этого параметра амплитуды возбуждаемых колебаний имеют в среднем постоянные значения, от величины параметра не зависящие. Однако фактические амплитуды колебаний вокруг средних значений испытывают сильные скачки фрактального характера.

Наблюдаемые явления интерпретированы на основе модели динамического потенциала. Показано, что по мере увеличения амплитуды колебаний первого осциллятора имеет место сильный рост амплитуды второго осциллятора. Выявлена решающая роль амплитуды второго осциллятора в формировании амплитуды первого осциллятора.

Отмечен эффект самовоздействия первого осциллятора на амплитуду собственных колебаний через посредство второго осциллятора. В качестве механизма воздействия предложена модель положительной обратной связи, приводящая к лавинообразному росту амплитуды колебаний. Показано, что ограничение такого роста происходит за счет кубической нелинейности системы, вызывающей нелинейную расстройку и выход системы из резонанса с частотой возбуждения.

Показано, что реализация механизма положительной обратной связи ограничена сверху и снизу двумя критическими значениями параметра нелинейной связи, по обе стороны от которых реализуются малоамплитудные режимы. Рассмотрена конфигурация динамического потенциала в пределах реализации режима положительной обратной связи. Показано, что амплитуда воз-

буждаемых колебаний во всех случаях точно соответствует главному минимуму динамического потенциала.

Получено уравнение, связывающее амплитуды первого и второго осцилляторов при различных значениях параметра нелинейной связи. Выявлена линейная зависимость между этими амплитудами, соответствующая положению минимума динамического потенциала.

Рассмотрен случай средней степени линейной связи. Показано, что по мере увеличения параметра нелинейной связи последовательно наступают следующие режимы: двухступенчатое запаздывание с сильной хаотической составляющей, пилообразные колебания амплитуды, регулярное установление и плавное насыщение. По величине параметра нелинейной связи эти режимы отделены друг от друга и от режима малоамплитудных колебаний четырьмя критическими значениями. Выявлено пятое критическое значение параметра нелинейной связи, при превышении которого система уходит на бесконечность. Показано, что зависимости временных параметров процесса развития колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи в среднем описываются функциями типа обратной пропорциональности. Показано, что зависимость амплитуды установившихся колебаний от абсолютной величины параметра нелинейной связи в среднем описывается функцией типа «единица минус экспонента с отрицательным показателем». Выявлен некоторый разброс значений времени запаздывания и амплитуды от величины параметра нелинейной связи, однако значительно меньший, чем в предыдущем случае. Показано, что значение установившейся амплитуды колебаний полностью соответствует модели динамического потенциала.

Рассмотрен случай высокой степени линейной связи. Показано, что при параметре линейной связи выше критического значения, высокоамплитудные режимы в рассмотренных выше условиях не реализуются, а всегда имеет место только малоамплитудный режим перемежающихся скачков. В этом случае для реализации высокоамплитудных режимов необходимо задание достаточного начального отклонения смещения первого осциллятора или достаточно высокая

амплитуда возбуждающего сигнала. Такие требования обусловлены необходимостью преодоления потенциального барьера, отделяющего дополнительный минимум динамического потенциала от главного.

Показано, что в случае задания начального смещения, по мере увеличения параметра нелинейной связи, последовательно наступают следующие высокоамплитудные режимы: двухступенчатое запаздывание с пилообразным характером колебаний, асинхронная синусоида и регулярное установление. Показано, что период колебаний в режиме асинхронной синусоиды значительно превышает как периоды собственных колебаний обоих осцилляторов, так и период сигнала возбуждения. В качестве причины значительной величины периода асинхронной синусоиды предложено существование плоского участка потенциала, где рабочая точка колебаний проводит значительное время. Отмечено, что перечисленные режимы реализуются при величине параметра нелинейной связи значительно меньшей, чем в предыдущем случае. Выявлены критические значения параметра нелинейной связи, при которых происходит последовательное изменение перечисленных режимов. Показано, что зависимость минимального критического значения возбуждения высокоамплитудного режима от величины начального смещения соответствует функции обратной пропорциональности.

Рассмотрено формирования высокоамплитудных режимов за счет задания достаточно большой амплитуды возбуждающего сигнала. Показано, что для возбуждения таких режимов амплитуда возбуждения должна превышать определенное критическое значение. Исследована зависимость критического значения амплитуды возбуждения от величины параметра нелинейной связи. Показано, что эта зависимость в среднем соответствует функции обратной пропорциональности. Отмечено, что необходимым условием первичного запаздывания возбуждения колебаний является нулевое значение начального отклонения колебаний того и другого осцилляторов.

В заключительном разделе приведены некоторые дополнительные вопросы, направленные на дальнейшее развитие работ.

Благодарность

Авторы признательны к.ф.-м.н. В.С.Власову (СыктГУ) за первичную постановку задачи, помощь на предварительных этапах и постоянное стимулирующее внимание к работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке за счет гранта Российского Научного Фонда (проект № 14-22-00279).

Литература

1. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2017. №7. <http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>.

2. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2017. №8. <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>

3. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. // РЭ. 2009. Т.54. №7. С.863-874.

4. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в двухслойной ферритовой структуре. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2013. №2. С.10. <http://jre.cplire.ru/jre/feb13/10/text.pdf>.

5. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя. // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». М.: НИУ МЭИ. 2013. С.199-215.

6. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзву-

ка в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. // РЭ. 2015. Т.60. №1. С.79-91.

7. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. // РЭ. 2015. Т.60. №3. С.297-310.

8. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2013. №11. <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>.

9. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. // Электронный "Журнал радиоэлектроники". 2014. №1. <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.

10. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейные гиперзвуковые колебания магнитострикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 1. Деление частоты возбуждения. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №9. <http://jre.cplire.ru/jre/sep15/4/text.pdf>.

11. Власов В.С., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейные гиперзвуковые колебания магнитострикционного преобразователя на частотах, кратных частоте возбуждения. Часть 2. Умножение частоты возбуждения. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №10. <http://jre.cplire.ru/jre/oct15/1/text.pdf>.

Ссылка на статью:

А.П.Иванов, В.Г.Шавров, В.И.Щеглов. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>