

## О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ЭЙКОНАЛА НА ПОВЕРХНОСТИ ГРАДИЕНТНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛИНЗЫ

А. С. Венецкий

Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН  
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 3 августа 2018 г.

**Аннотация.** Получена формула для эйконала на выходной поверхности цилиндрической градиентной линзы с одномерным градиентом показателя преломления при смещении источника из фокуса в виде разложения по степеням величин продольного и поперечного смещения, включая члены первого и второго порядка малости. Проведена оценка точности формулы для эйконала в градиентной линзе, преобразующей цилиндрический фронт в цилиндрический и цилиндрический фронт в плоский.

**Ключевые слова:** градиентные линзы, лучи, эйконал.

**Abstract.** Lenses of non-uniform dielectric are used in both optical and radio bands. Compared with homogeneous lenses, they have an additional degree of freedom - the gradient of the refractive index of the dielectric. However, the study of aberrations in such lenses when the source is shifted out of focus is complicated due to the curved shape of the rays. The formula for the eikonal on the output surface of a cylindrical gradient lens with a one-dimensional gradient of the refractive index when the source is displaced from the focus in the form of decomposition of the eikonal in the series by the powers of values of longitudinal and transverse displacement, including members of the first and second order of smallness is derived. The accuracy of the obtained formula for eikonal in a gradient lens is estimated.

**Key words:** gradient lenses, rays, eikonal.

### Введение

Линзы из неоднородного диэлектрика используются как в оптическом так и в радио диапазонах волн. По сравнению с однородными линзами они имеют дополнительную степень свободы – градиент показателя преломления

диэлектрика. Исследование aberrаций в таких линзах при смещении источника из фокуса усложняется из-за криволинейной формы лучей. Существующая теория описывает aberrации в градиентных линзах в параксиальном приближении [1]. В работах [2,3] развита теория aberrаций эйконала в однородных линзах, где используется разложение эйконала по одному параметру – величине смещения источника. В данной работе аналогичный подход обобщается для описания эйконала на поверхности цилиндрической градиентной линзы.

### Вывод формулы для эйконала на выходной поверхности линзы при смещенном источнике

Запишем уравнение луча в цилиндрической градиентной линзе с показателем преломления, зависящем от  $x$ , преобразующей цилиндрический фронт в цилиндрический (рис.1). Сначала будем предполагать, что все лучи в линзе – немонотонные, т.е. имеют максимум. Ниже будет показано, что все результаты верны и для случая монотонных лучей.

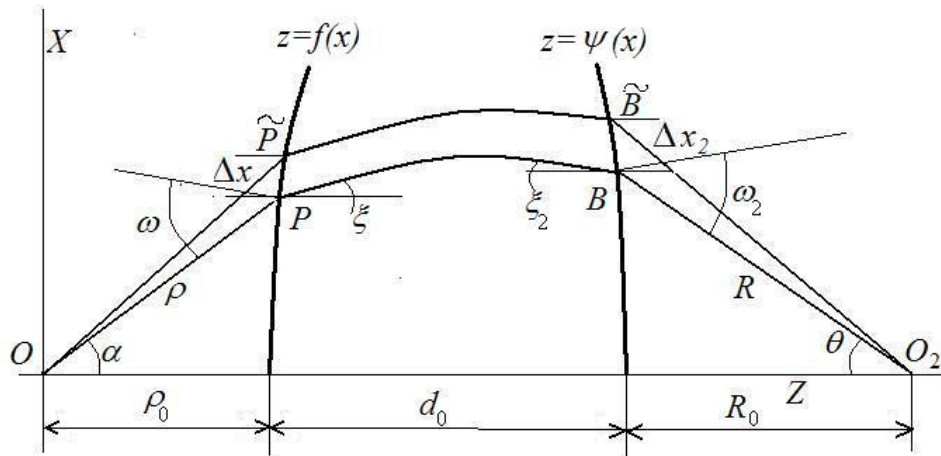


Рис.1 Геометрия лучей в линзе

$$z_{O_2} = \rho \cos \alpha + \int_{x_1}^{x_m} \frac{adx}{\sqrt{n^2(x) - a^2}} + \int_{x_2}^{x_m} \frac{adx}{\sqrt{n^2(x) - a^2}} + R \cos \theta \quad (1)$$

$(0,0)$  – координаты первого источника,  $(0,z_{O_2})$  – координаты второго,  $(x_m, z_m)$  – координаты точки максимума луча.

Запишем также уравнение близкого к нему (возмущенного) луча

$$z_{O2} = \tilde{\rho} \cos \tilde{\alpha} + \int_{x_1+\Delta x}^{x_m+\gamma\Delta x} \frac{\tilde{a} dx}{\sqrt{n^2(x) - \tilde{a}^2}} + \int_{x_2+\lambda\Delta x}^{x_m+\gamma\Delta x} \frac{\tilde{a} dx}{\sqrt{n^2(x) - \tilde{a}^2}} + \tilde{R} \cos \tilde{\theta} \quad (2)$$

В приведенных выражениях интегралы – несобственные, верхние пределы в них удовлетворяют соотношениям

$$n(x_m) - a = 0, \quad n(\tilde{x}_m) - \tilde{a} = 0, \quad \tilde{x}_m = x_m + \gamma\Delta x.$$

Разложим интегралы, входящие в (2) по  $\Delta x$ . Для этого предварительно выделим в них особенности.

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1 &= \int_{x_1+\Delta x}^{\tilde{x}_m} \frac{\tilde{a} dx}{\sqrt{n^2(x) - \tilde{a}^2}} = \int_{x_1+\Delta x}^{\tilde{x}_m} \left( \frac{\tilde{a}}{\sqrt{n^2(x) - \tilde{a}^2}} - \frac{\tilde{a}}{\sqrt{-2\tilde{a}n'(x_m)(\tilde{x}_m - x)}} \right) dx + \\ &+ \frac{\tilde{a}}{\sqrt{-2\tilde{a}n'(x_m)}} \int_{x_1+\Delta x}^{\tilde{x}_m} \frac{dx}{\sqrt{\tilde{x}_m - x}} = \int_{x_1+\Delta x}^{\tilde{x}_m} F(\tilde{a}, \tilde{x}_m) dx + \frac{\sqrt{2\tilde{a}}}{\sqrt{-n'(x_m)}} \sqrt{\tilde{x}_m - x_1 - \Delta x}, \\ \tilde{I}_2 &= \int_{x_2+\lambda\Delta x}^{\tilde{x}_m} \frac{\tilde{a} dx}{\sqrt{n^2(x) - \tilde{a}^2}} = \int_{x_2+\lambda\Delta x}^{\tilde{x}_m} \left( \frac{\tilde{a}}{\sqrt{n^2(x) - \tilde{a}^2}} - \frac{\tilde{a}}{\sqrt{-2\tilde{a}n'(x_m)(\tilde{x}_m - x)}} \right) dx + \\ &+ \frac{\tilde{a}}{\sqrt{-2\tilde{a}n'(x_m)}} \int_{x_2+\lambda\Delta x}^{\tilde{x}_m} \frac{dx}{\sqrt{\tilde{x}_m - x}} = \int_{x_2+\lambda\Delta x}^{\tilde{x}_m} F(\tilde{a}, \tilde{x}_m) dx + \frac{\sqrt{2\tilde{a}}}{\sqrt{-n'(x_m)}} \sqrt{\tilde{x}_m - x_2 - \lambda\Delta x}, \\ F(\tilde{a}, x) &= \frac{\tilde{a}}{\sqrt{n^2(x) - \tilde{a}^2}} - \frac{\tilde{a}}{\sqrt{-2\tilde{a}n'(x_m)(\tilde{x}_m - x)}}. \end{aligned}$$

При этом подынтегральная функция  $F$  не имеет особенностей.

$$\tilde{a} = a + a'\Delta x, \quad n(\tilde{x}_m) = n(x_m) + n'(x_m)\gamma\Delta x. \quad \text{Откуда следует } \gamma = \frac{a'}{n'(x_m)}.$$

Продифференцируем интегралы  $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2$  по  $\Delta x$ .

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{I}_1}{d\Delta x} \right|_{\Delta x=0} &= a' \int_{x_1}^{x_m} F' dx - \frac{a}{\sqrt{n^2(x_1) - a^2}} + \frac{a' \sqrt{x_m - x_1}}{\sqrt{-2an'_m}} + \frac{\gamma \sqrt{a}}{\sqrt{-2n'_m} \sqrt{x_m - x_1}} \\ \left. \frac{d\tilde{I}_2}{d\Delta x} \right|_{\Delta x=0} &= a' \int_{x_2}^{x_m} F' dx - \frac{\lambda a}{\sqrt{n^2(x_2) - a^2}} + \frac{a' \sqrt{x_m - x_2}}{\sqrt{-2an'_m}} + \frac{\gamma \sqrt{a}}{\sqrt{-2n'_m} \sqrt{x_m - x_2}} \end{aligned}$$

$$\tilde{\rho} \cos \tilde{\alpha} = \rho \cos \alpha + f'(x_1)\Delta x, \quad \tilde{R} \cos \tilde{\theta} = R \cos \theta - \psi'(x_2)\Delta x_2 = R \cos \theta - \psi'(x_2)\lambda\Delta x.$$

Параметр  $\lambda$  может быть выражен через производную функции отображения  $\theta = \theta(\alpha)$  (или  $x_2 = x_2(\alpha)$  для бесконечного фокуса) с использованием соотношений:

$$\Delta x = \frac{\Delta \alpha}{\Omega}, \Delta x_2 = \frac{\Delta \theta}{\Omega_2} = \lambda \Delta x, \Omega = \frac{\cos \omega}{\rho \cos(\omega - \alpha)}, \Omega_2 = \frac{\cos \omega_2}{R \cos(\omega_2 - \theta)},$$

из которых получаем

$$\lambda = \frac{\Omega}{\Omega_2} \frac{d\theta}{d\alpha} \text{ - при фокусировке точка в точку,}$$

$$\lambda = \Omega \frac{dx_2}{d\alpha} \text{ - при фокусировке точка в бесконечность.}$$

Раскладывая выражение (2) в ряд по  $\Delta x$  и вычитая из него (1) приравняем 0 член при  $\Delta x$ :

$$f'(x_1) - \text{ctg} \xi_1 + a' \left( \int_{x_1}^{x_m} F' dx + \int_{x_2}^{x_m} F' dx \right) + a'(T_1 + T_2) - \lambda(-\text{ctg} \xi_2 + \psi'(x_2)) = 0, \quad (3)$$

где  $T_1 = \frac{\sqrt{x_m - x_1}}{\sqrt{-2an'_m}} + \frac{\sqrt{2a}}{2n'_m \sqrt{-n'_m(x_m - x_1)}}$ ,

$$T_2 = \frac{\sqrt{x_m - x_2}}{\sqrt{-2an'_m}} + \frac{\sqrt{2a}}{2n'_m \sqrt{-n'_m(x_m - x_2)}}$$

$$\text{ctg} \xi_1 = \frac{a}{\sqrt{n^2(x_1) - a^2}}, \text{ctg} \xi_2 = -\frac{a}{\sqrt{n^2(x_2) - a^2}}.$$

Из уравнения (3) можно выразить сумму интегралов:

$$I_3 = \int_{x_1}^{x_m} F' dx + \int_{x_2}^{x_m} F' dx =$$

$$= [-f'(x_1) + \text{ctg} \xi_1 + \lambda(-\text{ctg} \xi_2 + \psi'(x_2))] / a' - T_1 - T_2 = I_4 - T_1 - T_2, \quad (4)$$

$$I_4 = [-f'(x_1) + \text{ctg} \xi_1 + \lambda(-\text{ctg} \xi_2 + \psi'(x_2))] / a'$$

Производная параметра луча может быть найдена дифференцированием выражения  $a = n(x_1) \cos \xi_1$ :

$$a' = \left. \frac{da}{dx} \right|_{x=x_1} = n'(x_1) \cos \xi_1 - n(x_1) \sin \xi_1 \Omega \Theta,$$

$$\Theta = \frac{1}{G} \left[ 1 + B(1 - G) - \frac{\rho}{\cos \omega} \operatorname{tg} \omega \frac{n'(x_1)}{n(x_1)} \right],$$

где  $B = \frac{K_P \rho}{\cos \omega}$ ,  $G = \frac{\sqrt{n^2(x_1) - \sin^2 \omega}}{\cos \omega} = \frac{n_1(n_1 - \cos(\alpha - \xi_1))}{n_1 \cos(\alpha - \xi_1) - 1}$ ,  $n_1 = n(x_1)$ ,

$$K_P = \frac{f''(x_1)}{(1 + (f'(x_1))^2)^{3/2}} - \text{кривизна поверхности в точке } P.$$

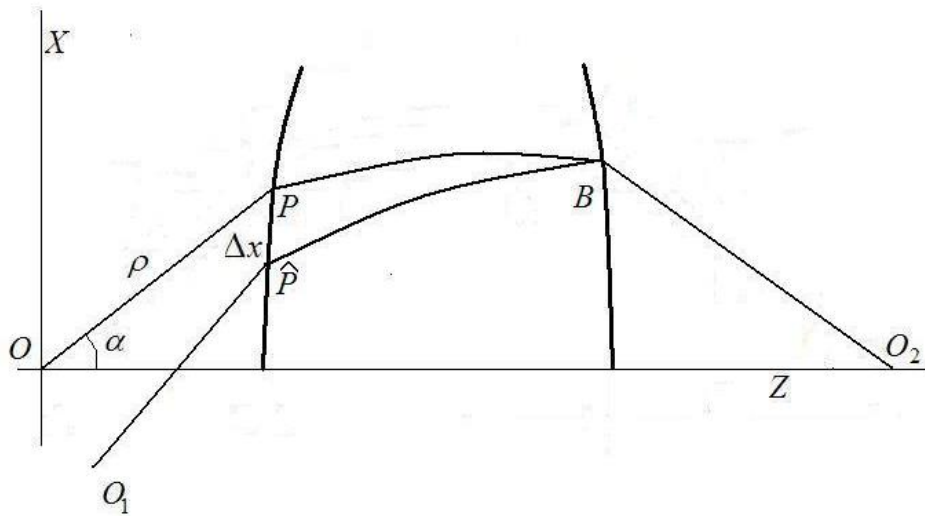


Рис.2 Геометрия луча при смещении источника

Рассмотрим луч, выходящий из точки  $B(x_2, z_2)$ , такой, что пересекает левую поверхность в точке  $\hat{P}$  с координатами  $x_1 + \Delta x$ ,  $z_1 + \Delta z$  где  $x_1, z_1$  – координаты точки  $P$  на невозмущенном луче (рис.2). Найдем лучевой параметр этого возмущенного луча. Пусть  $a$  – лучевой параметр невозмущенного луча,  $x_m$ -координата точки максимума невозмущенного луча, тогда для соответствующих параметров возмущенного луча можно записать:

$$\hat{a} = a + k \Delta x, \quad \hat{x}_m = x_m + \hat{\gamma} \Delta x, \quad n(\hat{x}_m) = n(x_m) + n'_m(\hat{x}_m - x_m),$$

откуда следует  $\hat{\gamma} = \frac{k}{n'_m}$ , где  $n'_m = n'(x_m)$ .

Уравнение возмущенного луча имеет вид:

$$z_{\hat{P}} = z_2 - \int_{x_2}^{\hat{x}_m} \frac{\hat{a} dx}{\sqrt{n^2(x) - \hat{a}^2}} - \int_{x_1 + \Delta x}^{\hat{x}_m} \frac{\hat{a} dx}{\sqrt{n^2(x) - \hat{a}^2}} = z_2 - \hat{I}_2 - \hat{I}_1. \quad (5)$$

Преобразуем интегралы в приведенном уравнении с выделением особенностей как это было сделано выше.

$$\hat{I}_1 = \int_{x_1 + \Delta x}^{\hat{x}_m} F(\hat{a}, x) dx + \frac{\sqrt{2\hat{a}}}{\sqrt{-n'_m}} \sqrt{\hat{x}_m - x_1 - \Delta x},$$

$$\hat{I}_2 = \int_{x_2}^{\hat{x}_m} F(\hat{a}, x) dx + \frac{\sqrt{2\hat{a}}}{\sqrt{-n'_m}} \sqrt{\hat{x}_m - x_2},$$

$$F(\hat{a}, x) = \frac{\hat{a}}{\sqrt{n^2(x) - \hat{a}^2}} - \frac{\hat{a}}{\sqrt{-2\hat{a}n'_m(\hat{x}_m - x)}}.$$

Найдем пересечение возмущенного луча с левой поверхностью в линейном приближении по  $\Delta x$ . Найдем производную суммы интегралов  $\hat{I}_{1,2}$  по  $\Delta x$ .

$$\frac{d\hat{I}_1}{d\Delta x} + \frac{d\hat{I}_2}{d\Delta x} = k \left( \int_{x_1}^{x_m} F' dx + \int_{x_2}^{x_m} F' dx \right) - \text{ctg} \xi_1 + k(T_1 + T_2).$$

Раскладывая уравнение (5) в ряд до 1 степени по  $\Delta x$ , получаем:

$$f'(x_1) = -kI_3 + \text{ctg} \xi_1 - k(T_1 + T_2), \text{ где } I_3, I_4 \text{ определяются выражением (4).}$$

Из последнего уравнения находим:

$$k = \frac{\text{ctg} \xi_1 - f'(x_1)}{I_3 + T_1 + T_2} = \frac{\text{ctg} \xi_1 - f'(x_1)}{I_4}. \quad (6)$$

Заметим, что знаменатель в (6) не зависит от  $T_1, T_2$ .

Предположим, что возмущенный луч, выходящий из точки  $B$  после преломления на левой поверхности проходит через смещенный источник  $O_1$ .

Тогда эйконал всего луча можно записать в виде

$$L(O_1, B) = |O_1 \hat{P}| + \hat{J}_1 + \hat{J}_2 + \hat{a}(z_2 - z_1 - \Delta z), \quad (7)$$

$$\text{где } \hat{J}_1 = \int_{x_1 + \Delta x}^{\hat{x}_m} \sqrt{n^2(x) - \hat{a}^2} dx, \quad \hat{J}_2 = \int_{x_2}^{\hat{x}_m} \sqrt{n^2(x) - \hat{a}^2} dx.$$

Разложим эйконал (7) в ряд до 2 степени по  $\Delta x$

$$\frac{d\hat{J}_1}{d\Delta x} = -k\hat{J}_{11} - \sqrt{n^2(x_1 + \Delta x) - \hat{a}^2}, \quad \hat{J}_{11} = \int_{x_1 + \Delta x}^{\hat{x}_m} \frac{\hat{a} dx}{\sqrt{n^2(x) - \hat{a}^2}},$$

$$\frac{d\hat{J}_2}{d\Delta x} = -k\hat{J}_{21}, \quad \hat{J}_{21} = \int_{x_2}^{\hat{x}_m} \frac{\hat{a} dx}{\sqrt{n^2(x) - \hat{a}^2}}.$$

$$\frac{d}{d\Delta x} (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) \Big|_{\Delta x=0} = -k \left( \int_{x_1}^{x_m} \frac{a dx}{\sqrt{n^2(x) - a^2}} + \int_{x_2}^{x_m} \frac{a dx}{\sqrt{n^2(x) - a^2}} \right) - \sqrt{n^2(x_1) - a^2} =$$

$$= -k(z_2 - z_1) - \sqrt{n^2(x_1) - a^2}, \quad (8)$$

$$\frac{d^2}{d\Delta x^2} (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) \Big|_{\Delta x=0} = -k^2 \left( \int_{x_1}^{x_m} F' dx + \int_{x_2}^{x_m} F' dx \right) - k^2(T_1 + T_2) + \frac{2ka - n'(x_1)n(x_1)}{\sqrt{n^2(x_1) - a^2}} =$$

$$= -k^2 I_3 - k^2(T_1 + T_2) + \frac{2ka - n'(x_1)n(x_1)}{\sqrt{n^2(x_1) - a^2}} = -k^2 I_4 + \frac{2ka - n'(x_1)n(x_1)}{\sqrt{n^2(x_1) - a^2}}, \quad (9)$$

где  $T_1, T_2, I_4$  приведены выше. Заметим снова, что окончательное выражение в (9) не зависит от  $T_1, T_2$ .

Эйконал (7) можно представить виде:

$$L(O_1, B) = \left| O_1 \hat{P} \right| + J_1 + J_2 + a(z_2 - z_1) - (\sqrt{n^2(x_1) - a^2} + af'(x_1))\Delta x +$$

$$+ \left( \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\Delta x^2} (\hat{J}_1 + \hat{J}_2) \Big|_{\Delta x=0} - kf'(x_1) - \frac{a}{2} f''(x_1) \right) \Delta x^2 + \dots \quad (10)$$

Ограничиваясь членами 2-го порядка малости, можно записать

$$\left| O_1 \hat{P} \right| = \rho + \sin \alpha \cos \varphi \delta_x + \cos \alpha \delta_z + A_2(\delta_x, \delta_z) + Q_1 \Delta x + Q_2 \Delta x^2 + \dots \quad (11)$$

$$A_2(\delta_x, \delta_z) = \frac{\cos^2 \alpha}{2\rho} \delta_x^2 + \frac{\sin^2 \alpha}{2\rho} \delta_z^2 - \frac{\sin 2\alpha}{2\rho} \cos \varphi \delta_x \delta_z,$$

$$Q_1 = \frac{\sin \omega}{\cos(\omega - \alpha)} + \frac{\cos \omega \cos \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} \delta_x \cos \varphi - \frac{\cos \omega \sin \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} \delta_z,$$

$$Q_2 = \frac{\cos \alpha}{2} f''(x_1) + \frac{\cos^2 \alpha}{2\rho \cos^2(\omega - \alpha)}.$$

Подставляя (11) в (10), можно получить

$$L(O_1, B) = \rho + J + \sin \alpha \cos \varphi \delta_X + \cos \alpha \delta_Z + A_2(\delta_X, \delta_Z) + \tilde{Q}_1 \Delta x + \tilde{Q}_2 \Delta x^2 + \dots (12)$$

$$J = J_1 + J_2 + a(z_2 - z_1),$$

$$\tilde{Q}_1 = \frac{\cos \omega \cos \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} \delta_X \cos \varphi - \frac{\cos \omega \sin \alpha}{\rho \cos(\omega - \alpha)} \delta_Z,$$

$$\tilde{Q}_2 = -\frac{k^2}{2} I_4 + \frac{2ka - n'(x_1)n(x_1)}{2\sqrt{n^2(x_1) - a^2}} - kf'(x_1) - \frac{a}{2} f''(x_1) + Q_2,$$

$$\varphi = 0 \text{ при } X_B > 0, \varphi = \pi \text{ при } X_B < 0,$$

$J$  – эйконал невозмущенного луча между точками  $P$  и  $B$  и находится из условия равенства фаз:

$$J = \rho_0 + n_0 d_0 + R_0 - \rho - R - \text{при фокусировке точка в точку},$$

$$J = n_0 d_0 - d_0 - \rho + z_2 - \text{при фокусировке точка в бесконечность}.$$

Используя принцип Ферма можно определить смещение  $\Delta x$ , соответствующее реальному лучу. На реальной траектории оптический путь (12) достигает минимума. Отсюда следует уравнение:

$$\frac{dL}{d\Delta x} = \tilde{Q}_1 + 2\tilde{Q}_2 \Delta x = 0, \text{откуда получаем } \Delta x = -\frac{\tilde{Q}_1}{2\tilde{Q}_2}. \text{ Подставляя полученное } \Delta x \text{ в}$$

(12), имеем

$$L(O_1, B) = \rho + J + \sin \alpha \cos \varphi \delta_X + \cos \alpha \delta_Z + A_2(\delta_X, \delta_Z) - \frac{\tilde{Q}_1^2}{4\tilde{Q}_2}. \quad (13)$$

Полученное выражение для возмущенного эйконала (13) зависит только от первых производных левой и правой поверхностей, кривизны левой поверхности, углов входа и выхода невозмущенного луча, производной функции отображения, значения коэффициента преломления в точке входа и выхода невозмущенного луча, производной коэффициента преломления в точке входа невозмущенного луча. При этом не имеет значения монотонный луч или немонотонный, т.к. члены  $T_1, T_2$ , которые существуют для немонотонных лучей в формулу (13) не входят.



### Анализ точности выведенной формулы

На рис.3 приведены кривые, показывающие разность эйконолов на выходной поверхности линзы, преобразующей цилиндрический фронт в цилиндрический вычисленного точным геометрическим методом и с помощью формулы (12). Кривая 1 соответствует координатам смещенного источника  $\delta_x=-0.1$ ,  $\delta_z=-0.01$ , а кривая 2 – координатам  $\delta_x=-0.2$ ,  $\delta_z=-0.02$ . Закон изменения диэлектрической проницаемости линзы  $n^2(x) = n_0^2 - c_2x^2$ ,  $\rho_0=1$ ,  $R_0=1$ ,  $d_0=1$ ,  $n_0=1.6$ ,  $c_2=2.9$ .

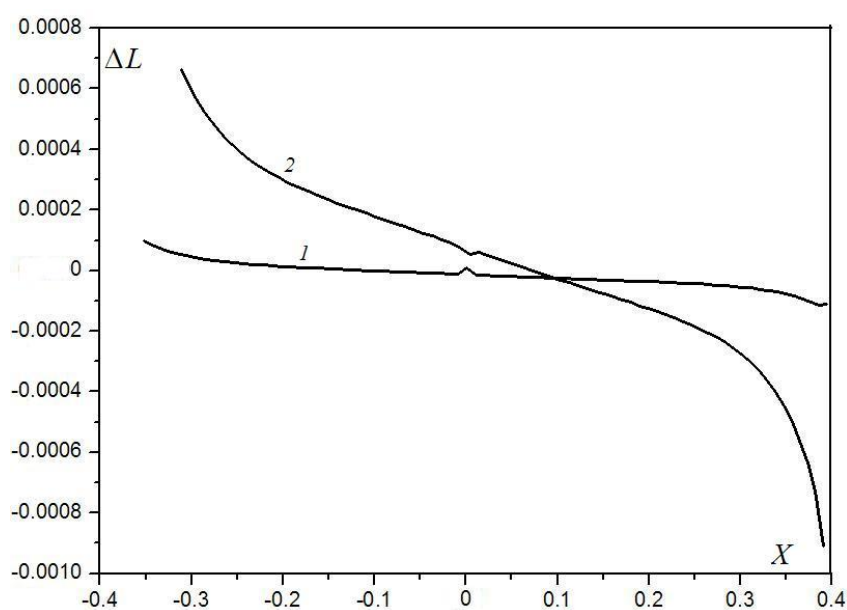


Рис.3 Ошибки вычисления эйконала в линзе

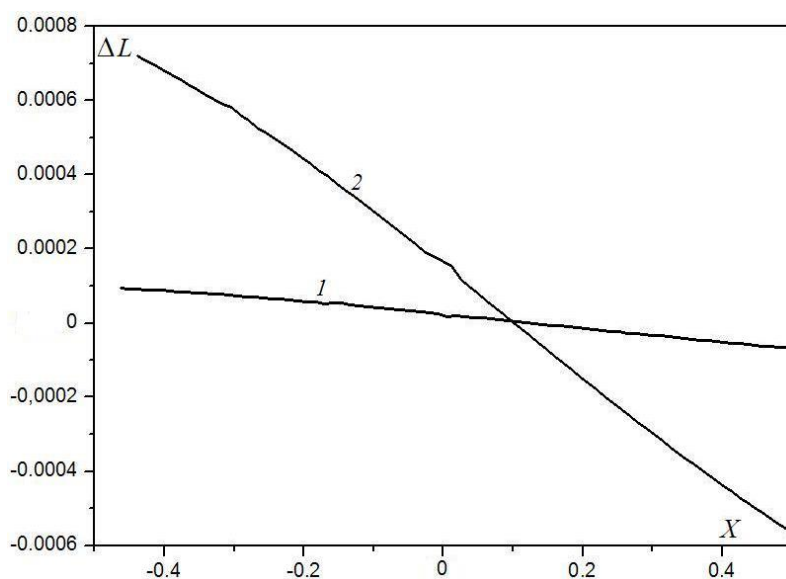


Рис.4 Ошибки вычисления эйконала в линзовой антенне

На рис.4 приведены аналогичные кривые для линзы с параметрами:  $\rho_0=1$ ,  $d_0=0.5$ ,  $n_0=1.6$ ,  $c_2=1$ , с плоской левой поверхностью, преобразующей цилиндрический фронт в плоский. Величины  $\rho_0$ ,  $d_0$  и  $R_0$  нормированы на величину апертуры. Из рисунков видно, что ошибка формулы (12) пропорциональна  $\delta_x^3$  и содержит линейную составляющую, которая не влияет на величину aberrаций.

В заключение автор выражает благодарность В.А.Калошину за постановку задачи, обсуждения и полезные замечания.

### Литература

1. Erich W. Marchand, Aberrations of Wood and GRIN rod lenses // Applied Optics, Vol.25, No.19, 1 October 1986.
2. А.С.Венецкий, В.А.Калошин, О распределении эйконала на поверхности линзы // ДАН, 2015, Т.463, №5, С.533-537.
3. А.С.Венецкий, В.А.Калошин, Об aberrациях эйконала в планарных линзовых антеннах // РЭ, 2017, Т.62, №6, С.533-540.

#### Для цитирования:

А. С. Венецкий. О распределении эйконала на поверхности градиентной цилиндрической линзы. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2018. № 8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug18/7/text.pdf>  
DOI 10.30898/1684-1719.2018.8.7