

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.7>

УДК 537.874; 537.624

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ В УСЛОВИЯХ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ И КВАДРАТИЧНОЙ СВЯЗИ

А. П. Иванов¹, В. Г. Шавров², В. И. Щеглов²¹ Сыктывкарский государственный университет имени Питирима Сорокина,
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55² Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 31 июля 2020 г.

Аннотация. Рассмотрены возбуждаемые внешней периодической силой автомодуляционные и хаотические колебания в системе из двух связанных осцилляторов. Предполагается, что один осциллятор содержит кубическую нелинейность, а связь между осцилляторами является квадратичной. Приведены два примера задач, приводящих к такой модели. Первая – задача о возбуждении мощного гиперзвука в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Вторая – задача о возбуждении электромагнитных колебаний в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Для обеих задач приведены основные уравнения движения и показано, как обе полученные системы сводятся к одной и той же упрощенной системе уравнений для двух связанных осцилляторов. Результатом является система из двух укороченных уравнений колебательного типа, первое из которых соответствует магнитному осциллятору, а второе – упругому или электродинамическому. Показано, что первое уравнение такой системы содержит нелинейность третьей степени, а второе остается линейным. Связь между уравнениями в первом уравнении является квадратичной, а во втором – линейной. Рассмотрено поведение системы в широком интервале амплитуды возбуждения. Получены развертки колебаний по времени, параметрические портреты для переменной и ее производной, а также

спектральные характеристики возбуждаемых колебаний. На примере среднего уровня возбуждения рассмотрено типичное многообразие колебаний. Параметрический портрет для первого осциллятора имеет вид сильно размазанной «горизонтальной восьмерки», а для второго – совокупности нескольких колец, наложенных друг на друга с относительно небольшим сдвигом. Рассмотрен спектральный состав возбуждаемых колебаний. Показано, что для первого осциллятора спектр как смещения осциллятора, так и его производной, имеет вид нескольких (двух-трех) широких сильно изрезанных полос с явно выраженным максимумом на середине полосы. Для второго осциллятора спектр колебаний имеет хорошо упорядоченный вид вблизи основной частоты возбуждения. Выполнена классификация основных режимов колебаний, наблюдаемых в широком диапазоне амплитуд возбуждения. Выявлены следующие два режима: режим №1 – мультигармонический регуляризованный; режим №2 – мультигармонический квазихаотический. Показано, что по мере увеличения амплитуды возбуждения, начиная с регулярного, имеет место чередование регулярного и квазихаотического режимов. Выполнена модельная имитация формирования параметрического портрета. Показано, что образование «горизонтальной восьмерки» параметрического портрета обусловлено наличием в спектре колебаний нечетных гармоник высоких порядков. Выполнено аналитическое рассмотрение свободных колебаний, описываемых уравнением, содержащим вторую производную в сочетании с переменной в третьей степени, отражающей кубическую нелинейность. Показано, что частота свободных колебаний такой системы пропорциональна их амплитуде, задаваемой начальным смещением. Рассмотрены области формирования хаотического режима при различных уровнях возбуждения для трех основных случаев: первый – отсутствие связи между осцилляторами, второй – наличие линейной связи и третий – наличие квадратичной связи. Показано, что в отсутствие связи области хаотического и регулярного режимов чередуются в почти правильном порядке. Увеличение уровня возбуждения приводит к постепенному росту номеров возбуждаемых

гармоник. В случае линейной связи характер чередования областей того и другого режимов, в общем, сохраняется, однако наблюдается растяжение всей картины в сторону больших значений возбуждения. В случае квадратичной связи чередование областей различных режимов не наблюдается. Начиная с довольно низкого уровня возбуждения колебания приобретают хаотический характер и регуляризация далее не наступает. Выявлен критерий формирования хаотического режима. Показано, что главной причиной формирования хаоса является последовательная смена гармоник по мере увеличения возбуждения. Рассмотрена амплитуда колебаний при различном уровне возбуждения. Показано, что по мере увеличения уровня возбуждения амплитуда колебаний возрастает, причем рост амплитуды следует зависимости корневого типа. На примере уравнения для первого осциллятора в отсутствие связи показано, что причиной замедления роста амплитуды колебаний является кубическая нелинейность.

Ключевые слова: нелинейные колебания, связанные осцилляторы, кубическая нелинейность.

Abstract. The auto-modulation and chaotic vibrations in the system of two connected oscillators stimulated by external periodic force are investigated. It is supposed that one of oscillators has cubic nonlinearity and the connection between oscillators is quadratic. Two examples of tasks which lead to this model are described. The first is the task about excitation of power hypersound in ferrite plate having magnetoelastic properties. The second is the task about excitation of electromagnetic vibrations in ferrite disc placed in electro-dynamic resonator. For both tasks the main motion equations are described and it is shown that both systems came to the same simplified equations system for two connected oscillators. We found the system from two reduced equations vibration type. The first of these equations corresponds to magnetic oscillator and the second equation corresponds to elastic or electro-dynamic oscillator. It is shown that the first equation of this system contains the nonlinearity of third degree but the second remains linear. The connection between equations in the first equation is quadratic and in the second is linear. We investigated the behaviour

of system in broad interval of excitation amplitude. We found the developments of vibrations in time, parametric portraits for variable quantity and its derivative and also the spectral characteristics of excited vibrations. On an example of middle level of excitation we investigated the typical variety of vibrations. The parametrical portrait for first oscillator has the appearance of very spread “horizontal figure-of-eight” and for second oscillator has the appearance of combination from several rings which are applied one to another with small displacement. The spectral composition of excited vibrations is investigated. It is shown that for the first oscillator the spectrum of both displacement and its derivative has the form of several (two or three) wide, very indented stripes with a pronounced maximum in the middle of the stripe. For the second oscillator, the vibration spectrum has a well-ordered form near the main frequency of excitation. The classification of the main regimes of oscillations observed in a wide range of excitation amplitudes is performed. We found two main regimes: regime №1 – large-harmonic regular; regime №2 – large-harmonic quasi-chaotic. It is shown that as the amplitude of excitation increases, starting from the regular one, there is a rotation of the regular and chaotic regimes.

A model imitation of parametrical portrait formation is performed. It is shown that the formation of the “horizontal eight” of the parametric portrait is due to the presence of high-order odd harmonics in the oscillation spectrum. We carried out an analytical investigation of free oscillations, described by an equation containing the second derivative in combination with a variable in the third power, which describes cubic nonlinearity. It is shown that the frequency of free vibrations of this system is proportional to their amplitude specified by the initial displacement. The regions of the formation of a chaotic regime for various levels of excitation are considered for three main cases: the first is the absence of a connection between the oscillators, the second is the presence of a linear connection, and the third is the presence of a quadratic connection. It is shown that in the absence of connection, the regions of chaotic and regular regimes rotate in an almost correct order. An increase in the level of excitation leads to a gradual increase in the numbers of excited harmonics. In the case of a linear connection, the character of the rotation of the regions of both

regimes, in general, doesn't change, however, the whole picture is stretched towards higher values of excitation. In the case of a quadratic connection, the rotation is not observed. Starting from a rather low level of excitation, the oscillations become chaotic and regularization does not occur further. The criterion of chaotic regime forming is found. It is shown that the main reason of chaos formation is successive change of harmonics when the excitation level is increased. We investigated the amplitude of vibrations by different level of excitation. It is shown that as the level of excitation increases, the amplitude of the oscillations increases, and the increase in the amplitude follows the dependence of the root type. Using the equation for the first oscillator in the absence of coupling as an example, it is shown that the reason for the slowdown in the growth of the oscillation amplitude is cubic nonlinearity.

Key words: nonlinear vibrations, connected oscillators, cubic nonlinearity.

Введение

Исследование нелинейной динамики различных явлений и процессов занимает одно из ведущих место в современной физике [1-7]. Значительное многообразие проявляют в этом плане магнитные явления, типа ферромагнитного резонанса и распространяющихся в магнитных средах магнитостатических волн. Так, воздействие сильного однородного электромагнитного поля СВЧ диапазона приводит к параметрическому возбуждению крайне неоднородных обменных спиновых волн, проявляющих автомодуляционные и хаотические свойства [8, 9]. Спектр возбуждений колебательной системы типа ферритового диска, помещенного в электродинамический резонатор имеет ярко выраженный шумовой характер [10, 11]. Распространение пучка магнитостатических волн в ферритовой пленке внутри волноведущего канала, образованного периодически модулированным полем типа «вала», происходит полностью стохастическим образом [12].

Значительное разнообразие вносит взаимодействие магнитных колебаний с возбуждениями другого вида, в первую очередь с упругими [13]. Так, упругая накачка может вызвать такое же параметрическое возбуждение обменных

спиновых волн, что и электромагнитная [8, стр.108], а превышение порогового уровня электромагнитной накачки приводит к параметрическому возбуждению упругих резонансных колебаний на частотах на три порядка более низких, чем частота возбуждения [8, стр.240, 14]. Нелинейный ферромагнитный резонанс сопровождается комбинационным рассеянием спиновых волн на упругих, в том числе вынужденным – так называемым «спиновым эффектом Мандельштама-Бриллюэна» [8, стр.223, 15].

Значительное число нелинейных явлений в магнитных и магнитоупругих средах может быть интерпретировано на основе упрощенной модели двух связанных осцилляторов – магнитного и упругого. Прежде всего, такая модель была предложена для описания нелинейного возбуждения мощных гиперзвуковых колебаний в нормально намагниченной ферритовой пластине [16-20]. Значительное развитие первоначальной модели было выполнено в рамках квадратичного приближения, позволившего привязать ее параметры к характеристикам реальных материалов [21-24]. Были выявлены различные режимы возбуждения, в том числе имеющие автомодуляционный и хаотический характер. Для интерпретации полученных результатов была предложена модель динамического потенциала, позволившая связать характеристики наблюдаемых режимов с потенциальной энергией системы [25-30]. Однако, несмотря на значительные успехи модели потенциала, характер перехода между режимами, а также роль механизма степенной нелинейности и показателя степени связи в достаточной мере не были выявлены.

Настоящая работа посвящена рассмотрению именно таких механизмов и определению необходимых предпосылок для их реализации. Основное внимание будет уделено колебаниям регулярного и хаотического характера в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи.

1. Основные задачи

Основным предметом исследования в настоящей работе являются автоколебания, в первую очередь хаотического типа, которые могут иметь место в возбуждаемой внешней периодической силой системе из двух

связанных осцилляторов, один из которых является нелинейным. Рассмотрение проводится на основе системы из двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка, то есть колебательного типа, одно из которых содержит члены, характеризующие нелинейность.

Поэтому сначала приведем два примера задач, приводящих к такой системе. Первая и наиболее разработанная – задача о возбуждении мощного гиперзвука [16-30]. Вторая – задача о возбуждении широкого спектра электромагнитных колебаний шумового характера [10, 11].

2. Задача о возбуждении мощного гиперзвука

Геометрия задачи о возбуждении мощного гиперзвука, совпадающая с принятой в [16-30], показана на рис.1. В ее основе лежит плоскопараллельная пластина толщины d , обладающая магнитными, упругими и магнитоупругими свойствами.

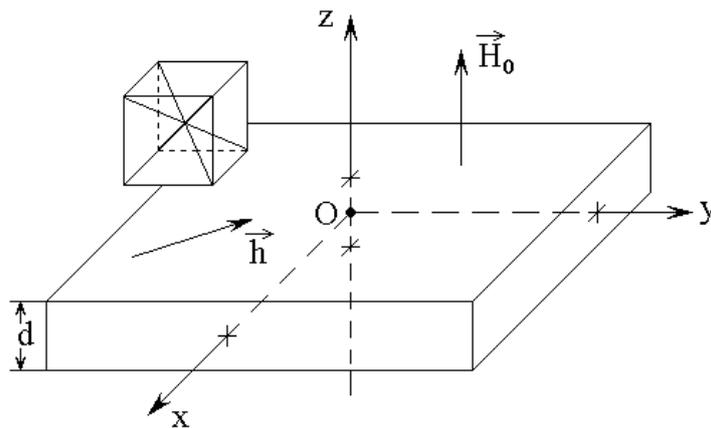


Рис.1. Геометрия задачи о возбуждении мощного гиперзвука. Слева – схема кристаллографической ячейки.

Внешнее постоянное магнитное поле \vec{H}_0 приложено перпендикулярно плоскости пластины, переменное магнитное поле \vec{h} действует в плоскости пластины. Задача решается в декартовой системе координат $Oxyz$, плоскость Oxy которой совпадает с плоскостью пластины, а оси Ox , Oy и Oz параллельны ребрам куба кристаллографической ячейки. Центр системы координат O находится в центре пластины, так что ее плоскости соответствуют координатам $z = \pm d/2$.

Основная система уравнений движения для нормированных компонент намагниченности $m_{x,y,z}$, впервые приведенная в [16] и неоднократно рассматривавшаяся в последующих работах, имеет вид:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \left[(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_{ey} - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_{ex} \right], \quad (1)$$

где уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой x, y, z .

Входящие в эти уравнения эффективные поля имеют вид:

$$H_{ex} = h_x + H_{ax}; \quad (2)$$

$$H_{ey} = h_y + H_{ay}; \quad (3)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z + H_{az}; \quad (4)$$

где:

$$H_{ax} = -\frac{B_2}{M_0} \left[m_y \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + m_z \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \right], \quad (5)$$

где \hat{A}_2 – константа магнитоупругого взаимодействия, обеспечивающего связь между магнитной и упругой системами. При этом поля H_{ay} и H_{az} получаются из (5) циклической перестановкой x, y, z .

Уравнения для компонент упругого смещения $u_{x,y}$ имеют вид:

$$\frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial t^2} = -2\beta \frac{\partial u_{x,y}}{\partial t} + \frac{c_{44}}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_{x,y}}{\partial z^2}; \quad (6)$$

граничные условия:

$$c_{44} \frac{\partial u_{x,y}}{\partial z} \Big|_{z=\pm d/2} = -B_2 m_{x,y} m_z. \quad (7)$$

В уравнении (1) α – параметр затухания Гильберта, в уравнении (6) β – параметр затухания упругих колебаний, c_{33} – модуль упругости, ρ – плотность магнитной пластины.

Можно видеть, что уравнение для упругого смещения (6) константы B_2 не содержит, однако связь между магнитной и упругой системами осуществляется за счет граничных условий (7).

3. Задача о возбуждении шумовых электромагнитных колебаний

Геометрия задачи о возбуждении электромагнитных шумовых колебаний [10, 11], показана на рис.2.

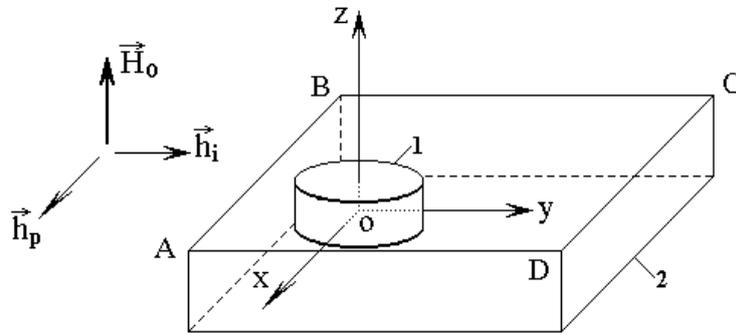


Рис.2. Геометрия задачи о возбуждении шумовых колебаний [11].
1 – ферритовый диск; 2 – резонатор.

Основой задачи является ферритовый диск 1, помещенный в прямоугольный электродинамический резонатор 2. Плоскость Oxy системы координат $Oxyz$ параллельна плоскости диска, ось Oz этой плоскости перпендикулярна. Начало системы координат O совпадает с геометрическим центром диска. Толщина диска – d , радиус – r . Диск намагничен постоянным полем \vec{H}_0 , перпендикулярным его плоскости, то есть вдоль оси Oz .

На диск действует переменное поле \vec{h}_i , параллельное оси Oy . Это поле создается проволочным витком, плоскость которого параллельна Oxz (на рисунке виток не показан во избежание усложнения картины). Провод от витка выходит наружу резонатора и подключается к генератору СВЧ электрических колебаний.

Резонатор выполнен в геометрии прямоугольного параллелепипеда. Широкая стенка параллелепипеда ABCD параллельна плоскости диска, то есть координатной плоскости Oxy . Боковые стенки резонатора параллельны плоскостям Oxz и Oyz . Размеры резонатора обозначены далее следующим образом: вдоль оси Ox – a , вдоль Oy – b , вдоль Oz – c . Эти размеры таковы, чтобы они соответствовали возбуждению первой моды типа H_{101} ([31, стр.281-284, рис.9.5] или [32, стр.307, рис.8.6a]). В этом случае электрическое поле параллельно оси Oz и сосредоточено в центре резонатора, а силовые линии магнитного поля лежат в плоскости Oxy и охватывают силовые линии электрического поля, прижимаясь к боковым стенкам резонатора.

Диск располагается внутри резонатора около его боковой стенки АВ. В этом месте магнитное поле резонатора \vec{h}_p направлено вдоль оси Ox , то есть действует перпендикулярно внешнему относительно диска переменному полю \vec{h}_i . Задача решается в приближениях $d \ll r$, а также $r, d \ll a, b, c$. Возбуждение системы в целом происходит за счет магнитного поля \vec{h}_i , создаваемого проволочный витком, упомянутым выше. Прецессия намагниченности возбуждается суммарным полем витка \vec{h}_i и резонатора \vec{h}_p . Колебания в резонаторе возбуждаются магнитным полем, которое создает переменная намагниченность диска в месте его расположения. Граничные условия на боковых стенках резонатора остаются такими же, как в отсутствие феррита (равенство нулю производной от магнитного поля по координатам x , y [32, стр.224, форм.(7.11)]). Магнитные потери в феррите учитываются в форме Ландау-Лифшица-Гильберта с помощью постоянного параметра α [33-36]. Потери в резонаторе учитываются путем добавки в волновое уравнение для поля резонатора первой производной от поля по времени с постоянным коэффициентом β .

В приведенной постановке уравнения для компонент намагниченности имеют вид:

$$\frac{\partial m_x}{\partial t} = -\frac{\gamma}{1+\alpha^2} \cdot \left[(m_y + \alpha m_x m_z) \cdot H_{ez} - (m_z - \alpha m_y m_x) \cdot H_{ey} - \alpha \cdot (m_y^2 + m_z^2) \cdot H_{ex} \right], \quad (8)$$

а уравнения для m_y и m_z получаются циклической перестановкой x, y, z .

Входящие в эти уравнения эффективные поля имеют вид:

$$H_{ex} = H_{px} + H_{mx}; \quad (9)$$

$$H_{ey} = H_{iy} + H_{my}; \quad (10)$$

$$H_{ez} = H_0 - 4\pi M_0 m_z, \quad (11)$$

где:

$$H_{px} = h_p; \quad (12)$$

$$H_{iy} = h_i; \quad (13)$$

$$H_{mx,y} = \frac{2\pi^4 r^2 d}{abc} \cdot M_0 \cdot m_{x,y}. \quad (14)$$

Уравнение для поля резонатора H_{px} имеет вид:

$$\frac{\partial^2 H_{px}}{\partial t^2} + 2\beta c^2 \cdot \frac{\partial H_{px}}{\partial t} + \frac{\pi^2 c^2 (a^2 + b^2)}{a^2 b^2} \cdot H_{px} = -\frac{\partial^2 H_{mx}}{\partial t^2}, \quad (15)$$

где правая часть имеет вид:

$$\frac{\partial^2 H_{mx}}{\partial t^2} = -\frac{\gamma M_0 (H_0 - 4\pi M_0)}{(1 + \alpha^2)} \cdot \frac{2\pi^4 r^2 d}{abc} \cdot \left(\frac{\partial m_y}{\partial t} + \alpha \cdot \frac{\partial m_x}{\partial t} \right). \quad (16)$$

4. Обобщенная структура обеих задач

Из сравнения системы (1)-(7) для первой задачи с системой (8)-(16) для второй можно видеть, что магнитные колебания в обоих случаях описываются одними и теми же уравнениями (1) и (7).

Упругие колебания $u_{x,y}$ в первой задаче описываются волновым уравнением (6) с граничными условиями (7). Решение этого уравнения методом разделения переменных [37] с выделением координатной части, приводит к уравнению второго порядка по координате. Это уравнение имеет колебательный характер, а учет граничных условий на поверхности ферритовой пластины дает решение синусоидального типа. При этом связь между магнитными и упругими колебаниями осуществляется через граничные условия.

Колебания поля резонатора H_{px} во второй задаче описываются уравнением (15) с учетом (16), которое также имеет колебательный характер, так что имеет решение синусоидального типа. Граничные условия для этого поля на поверхности феррита не нужны, так как они уже учтены на боковых стенках резонатора. Связь между магнитными колебаниями и полем резонатора осуществляется через вторую производную от поля H_{mx} , определяемую выражением (16). Это выражение является как бы возбуждающей силой для поля резонатора H_{px} , определяемого основной частью уравнения (15).

Таким образом, можно видеть, что в обеих задачах имеются два связанных осциллятора – магнитный и упругий или магнитный и полевой. В обоих случаях нелинейность имеет место только для первого осциллятора – магнитного, тогда как второй, упругий или полевой, являются линейными. Характер связи в обоих случаях определяется поперечными компонентами намагниченности $m_{x,y}$, присутствующими в первой степени, то есть на этом уровне связь является линейной. Магнитная система в обоих случаях содержит три уравнения первого порядка, в общем случае к уравнению третьего порядка для одной из переменных не сводимого.

Подробное решение той и другой задач в их полном виде показывает, то обе они допускают решение автоколебательного и шумового типа (подробные ссылки даны во введении). Однако поставленные так задачи являются

достаточно сложными, требуют значительного объема машинной памяти и занимают большое машинное время.

В работах [21-24], показано, что введение для намагниченности квадратичного приближения позволяет свести полную задачу к системе двух уравнения второго порядка, имеющих весьма простую структуру. При этом требование машинных ресурсов уменьшается в два раза, а машинное время сокращается на два порядка.

Первое уравнение в такой системе, соответствующее колебаниям намагниченности, является нелинейным, а второе, соответствующее упругому смещению или полю резонатора, остается линейным. Связь между обоими уравнениями, кроме линейных членов, присутствующих в обоих уравнениях, осложняется наличием нелинейных слагаемых степенного характера в уравнении для первого (магнитного) осциллятора.

Большинство нелинейных явлений, наблюдаемых при решении первой задачи в полном ее виде, в упрощенной системе сохраняется с высокой степенью точности [21-24]. Существование автомодуляционных и хаотических колебаний в обоих случаях также сохраняется.

Таким образом, можно считать, что упрощенная система представляет собой обобщенную модель обеих рассматриваемых задач, выявляющую их свойства с достаточной степенью достоверности.

С другой стороны, исследование такой обобщенной системы является значительно более простым, чем любой из полных, а также позволяет сравнительно простыми средствами выявить физическую картину наблюдаемых явления и интерпретировать их на модельном уровне.

Поэтому дальнейшее рассмотрение в настоящей работе посвящено именно обобщенной системе, в первую очередь со стороны исследования автомодуляционных явления и процессов шумового характера.

5. Модель обобщенного потенциала

В работе [25] в качестве инструмента для анализа колебаний системы из двух связанных осцилляторов предложена модель обобщенного потенциала.

Отмечено, что эта модель позволяет выявить основные свойства автоколебаний магнитоупругой и магнито-электродинамической систем, такие как пороговый характер, роль параметров затухания и нелинейности осцилляторов и связи, переход к стохастическому режиму при большом уровне возбуждения. Приведем вкратце основные положения этой модели.

Будем полагать, что система уравнений движения для осцилляторов имеет вид [25]:

$$\frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_1} = A \cdot \cos(\omega t); \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \frac{\partial U_S}{\partial x_2} = 0, \quad (18)$$

где $U_S(x_1, x_2)$ – обобщенный потенциал системы в целом, а третьи слагаемые левой части представляют собой обобщенные силы (знак для удобства учтен заранее).

В простейшем варианте предполагается, что связь между осцилляторами осуществляется только за счет самих переменных x_1 и x_2 , а возможная связь за счет их производных, например, рассмотренная в [21], не учитывается. Такое предположение будем считать допустимым на основании того, что вызываемый производными возможный уход на бесконечность компенсируется слагаемыми потенциала четных степеней от самой переменной [25].

В рамках ограничения степенью входящих в потенциал переменных не выше четвертой, обобщенный потенциал принимает вид:

$$U_S = U_S^{(1)} + U_S^{(2)} + U_S^{(3)} + U_S^{(4)}, \quad (19)$$

где

$$U_S^{(1)} = \psi_1 x_1 + \psi_2 x_2; \quad (20)$$

$$U_S^{(2)} = \zeta_1 x_1^2 + \zeta_2 x_1 x_2 + \zeta_3 x_2^2; \quad (21)$$

$$U_S^{(3)} = \xi_1 x_1^3 + \xi_2 x_1^2 x_2 + \xi_3 x_1 x_2^2 + \xi_4 x_2^3; \quad (22)$$

$$U_S^{(4)} = \eta_1 x_1^4 + \eta_2 x_1^3 x_2 + \eta_3 x_1^2 x_2^2 + \eta_4 x_1 x_2^3 + \eta_5 x_2^4. \quad (23)$$

Из этих выражений обобщенные силы получаются путем дифференцирования по переменным $x_{1,2}$.

Первое выражение (20) дает статическую постоянную силу, которая на колебаниях никак не сказывается, так что $\psi_{1,2} = 0$, то есть заведомо можно положить $U_S^{(1)} = 0$.

Второе выражение (21) дает в уравнениях линейные слагаемые, пропорциональные $x_{1,2}$, то есть собственные частоты осцилляторов $\omega_{1,2}$ в линейном приближении, а также линейные связи между ними.

Третье выражение (22) через слагаемые с ξ_1 и ξ_4 дает параметры квадратичной нелинейности для обоих осцилляторов. Такая нелинейность, вследствие своей нечетности, при отрицательном значении переменной может вызвать уход системы на бесконечность. Другие два слагаемых с ξ_2 и ξ_3 обеспечивают нелинейную связь между осцилляторами низшего порядка, которая в силу своей нечетности также может привести к расходимости.

Четвертое выражение (23) через слагаемые с η_1 и η_5 дает параметры кубической нелинейности для каждого из осцилляторов. Потенциал в этом случае является четным, что уход на бесконечность полностью исключает. При достаточной величине констант η_1 и η_5 такая четность четвертого порядка может компенсировать нечетность более низких порядков, в частности, третьего, то есть предотвратить обеспечивающий низшими порядками уход на бесконечность. Остальные слагаемые выражения (23) дают различные виды нелинейной связи между осцилляторами, такие как $x_1^2 x_2$ и $x_1 x_2^2$. Кроме того, они дают кубические виды связи для первого уравнения вида x_2^3 и для второго

вида x_1^3 .

Дифференцируя выражения (19)-(23), получаем обобщенные силы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_S}{\partial x_1} = & 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 3\xi_1 x_1^2 + 2\xi_2 x_1 x_2 + \xi_3 x_2^2 + \\ & + 4\eta_1 x_1^3 + 3\eta_2 x_1^2 x_2 + 2\eta_3 x_1 x_2^2 + \eta_4 x_2^3; \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_S}{\partial x_2} = & \zeta_2 x_1 + 2\zeta_3 x_2 + \xi_2 x_1^2 + 2\xi_3 x_1 x_2 + 3\xi_4 x_2^2 + \\ & + \eta_2 x_1^3 + 2\eta_2 x_1^2 x_2 + 3\eta_4 x_1 x_2^2 + 4\eta_5 x_2^3. \end{aligned} \quad (25)$$

Соответственно уравнения (17) и (18) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial x_1}{\partial t} + 2\zeta_1 x_1 + \zeta_2 x_2 + 3\xi_1 x_1^2 + 2\xi_2 x_1 x_2 + \xi_3 x_2^2 + \\ + 4\eta_1 x_1^3 + 3\eta_2 x_1^2 x_2 + 2\eta_3 x_1 x_2^2 + \eta_4 x_2^3 = A \cdot \cos(\omega t); \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + \beta_2 \frac{\partial x_2}{\partial t} + \zeta_2 x_1 + 2\zeta_3 x_2 + \xi_2 x_1^2 + 2\xi_3 x_1 x_2 + 3\xi_4 x_2^2 + \\ + \eta_2 x_1^3 + 2\eta_2 x_1^2 x_2 + 3\eta_4 x_1 x_2^2 + 4\eta_5 x_2^3 = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

6. Некоторые частные случаи общей системы уравнений

Уравнения (26)-(27) содержат все возможные варианты степеней и произведений переменных до третьего порядка. Некоторые частные случаи таких систем приведены в работах [17-20] и [21-24]. Все эти работы относятся к задаче о связанных магнитном и упругом осцилляторах.

В первой группе работ [17-20] приближение выполнено путем анализа последовательных преобразований системы полных семи уравнений первого порядка для намагниченности и упругого смещения в систему из двух уравнений второго порядка, соответствующей рассматриваемой системе из двух осцилляторов. Анализ выполнен путем оценки пропорциональности и

сравнительного вклада отдельных слагаемых полных уравнений в укороченные. В результате получена система из двух уравнений следующего вида:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 + \gamma_1 \cdot x_2^2 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (28)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \omega_2^2 \cdot x_2 + \gamma_2 \cdot x_1 = 0. \quad (29)$$

Здесь $x_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\omega_{1,2}$ – координатные переменные, параметры затухания и собственные частоты осцилляторов, δ_1 – параметр нелинейности первого осциллятора, $\gamma_{1,2}$ – коэффициенты связи, A_0 и ω_0 – амплитуда и частота возбуждающей силы.

Замечание. В общем случае собственные частоты осцилляторов $\omega_{1,2}$ могут быть как действительными, так и мнимыми, что соответствует периодическим колебаниям или экспоненциальному изменению переменных $x_{1,2}$. При этом знак коэффициента при третьем слагаемом $\omega_{1,2}^2$ может быть положительным или отрицательным, что определяется условиями конкретной задачи. Все остальные параметры будем полагать действительными без каких-либо ограничений по знакам.

В системе (28)-(29) первое уравнение содержит нелинейное слагаемое третьей степени. Связь его со вторым осуществляется также нелинейным слагаемым второй степени. Второе же уравнение и связь его с первым являются чисто линейными.

Во второй группе работ [21-24] выполнено упрощение исходной системы с использованием для намагнитченности квадратичного приближения:

$$m_z = 1 - \frac{1}{2} (m_x^2 + m_o^2). \quad (30)$$

Получаемая при этом система имеет вид [26, форм. (46), (47)]:

$$\begin{aligned}
 & a_{11} \cdot \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} + a_{12} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + a_{13} \cdot x_1 + a_{14} \cdot x_2 + \\
 & \quad + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + d_{13}x_2^2 + \\
 & \quad + b_{11} \cdot x_1^3 + b_{12} \cdot x_1^2x_2 + b_{13} \cdot x_1x_2^2 + b_{14} \cdot x_2^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & a_{21} \cdot \frac{\partial^2 x_2}{\partial t^2} + a_{22} \cdot \frac{\partial x_2}{\partial t} + a_{23} \cdot x_2 + a_{24} \cdot x_1 + \\
 & \quad + d_{21}x_1^2 + d_{22}x_1x_2 + d_{23}x_2^2 + \\
 & \quad + b_{21} \cdot x_1^3 + b_{22} \cdot x_1^2x_2 + b_{23} \cdot x_1x_2^2 + b_{24} \cdot x_2^3 = 0, \quad (32)
 \end{aligned}$$

где коэффициенты a_{ik} , b_{ik} , d_{ik} определяются параметрами материала пластины. Здесь оба уравнения являются нелинейными до третьей степени и связь также является нелинейной до той же степени. Система как целое является симметричной, то есть замена индексов «1» на «2» и обратно структуры левых частей уравнений не меняет. Возбуждение остается несимметричным, что однако принципиальным не является, так что второе уравнение также может быть дополнено подобным слагаемым.

Можно видеть, что эта система с точностью до обозначений совпадает с приведенной выше системой (26)-(27). В то же время, система (28)-(29) является частным случаем как системы (29)-(32), так и приведенной выше системы (26)-(27).

Следует заметить, что в работе [26] относительно системы (31)-(32) приведены явные выражения через параметры материала только для коэффициентов a_{ik} , b_{ik} , а коэффициенты d_{ik} и b_{14} , b_{24} введены для полноты картины, исходя из соображений симметрии. Ограничение только коэффициентами a_{ik} , b_{ik} происходит из-за того, что в основе работы [26] лежит квадратичное приближение вида (30), при использовании которого слагаемые с коэффициентами d_{ik} и b_{14} , b_{24} равняются нулю. Однако можно

полагать, что использование приближений более высоких порядков, например четвертого

$$m_z = 1 - \frac{1}{2} (m_x^2 + m_o^2) - \frac{1}{8} (m_x^4 + m_o^4), \quad (33)$$

или учет потенциалов, имеющих порядок выше четвертого, приведет к появлению подобных слагаемых. К дополнительному разнообразию может привести, например, учет анизотропии магнитной пластины или вообще принципиально другие физические задачи, поэтому математическое рассмотрение полной системы (31)-(32) вполне заслуживает внимания.

В рамках настоящей работы ограничимся лишь рассмотрением наиболее простой системы (28)-(29), способной проявлять хаотическое поведение, а изучение системы (31)-(32) оставим в качестве предмета для отдельного исследования.

7. Разнообразие наблюдаемых видов колебаний

Система (28)-(29) исследовалась в работах [17-20]. При этом параметры системы задавались, в основном, исходя из реальных параметров изучаемой магнитоупругой системы. В этом случае частоты каждого из осцилляторов могли различаться, степень связи между ними также менялась.

Были выявлены несколько принципиально различающихся разновидностей колебаний. Так, были обнаружены автоколебания двух видов – синхронные, период которых равен периоду колебаний возбуждения, а также асинхронные, имеющие период, отличный от периода колебаний возбуждения, как правило, значительно превышающий последний. Было отмечено, что синхронные колебания наблюдаются тогда, когда оба осциллятора являются линейными, а нелинейной является только связь, тогда как асинхронные, наблюдается тогда, когда первый осциллятор является нелинейным, второй – линейным, а связь также нелинейна. Для асинхронных колебаний выявлены четыре различных режима, из которых три являются автоколебательными: навязанный, стохастический и регулярный. Отмечено, что стохастический режим имеет значительные элементы хаотичности (то есть вид колебаний в

каждом новом периоде отличается от колебаний в предыдущем периоде). Были выявлены пять характерных режимов синхронных колебаний: регулярный синусоидальный, регулярный с расщеплением, регулярный без расщепления, нерегулярный квазихаотический, нерегулярный расходящийся. Отмечен также асинхронный режим, имеющий место при значительном отличии параметров осцилляторов друг от друга. Этот режим характеризуется двухпериодичностью колебаний, малый период которых совпадает с периодичностью возбуждения, а большой – превышает период возбуждения в несколько раз. Для интерпретации режимов предложены две модели – обобщенного потенциала и генерации гармоник. Построены потенциальные поверхности, на основе которых интерпретированы области существования различных режимов. Был выполнен анализ автомодуляционных колебаний в рассматриваемой системе на основе потенциала четвертого порядка. Показано, что, благодаря наличию двух степеней свободы, потенциалы для каждого из уравнений должны отличаться друг от друга, давая собственный вклад в обобщенные силы. Отмечено подобие колебаний второго осциллятора колебаниям первого, что позволяет рассмотреть вынужденные колебания только одного осциллятора с квадратичной нелинейностью, потенциал для которого является кубическим. Выявлены четыре основных режима, сменяющие друг друга по мере увеличения амплитуды возбуждения, причем рассогласование фаз колебаний осциллятора относительно вынуждающей силы объяснено на основе модели фазовой задержки. Показано, что необходимым условием квазихаотического характера колебаний является режим, когда малые изменения координаты осциллятора приводят к большому изменению времени задержки. Для интерпретации увеличения времени задержки в этом случае предложена модель динамического фазового перехода.

Резюмируя результаты работ [17-20], можно сказать, что тот или иной выбор параметров системы (28)-(29) позволяет получить значительное разнообразие видов колебаний. Несмотря на многообразие предложенных моделей, подробно объяснена лишь часть наблюдаемых явлений. Так, полное

единство результатов работ [17-20] до конца не выявлено. Часть явлений объясняется на основе потенциала четвертого порядка, тогда как для других явлений требуется потенциал третьего порядка. Не ясным остается роль отдельных слагаемых системы (28)-(29) в формировании квазихаотических колебаний, а также степень хаотичности таких колебаний.

Согласно полученным данным, роль второго осциллятора состоит лишь в повторении колебаний первого, хотя там же сделана оговорка, что при достаточном уровне возбуждения подобие колебаний второго осциллятора колебаниям первого нарушается.

Можно полагать, что причиной такого разнообразия результатов, в сочетании с их видимой неполнотой, является отсутствие четкой схемы в выборе параметров осцилляторов и связи между ними. В самом деле, параметры, как правило, выбирались, исходя из данных реальных экспериментов, что и обусловило их частный характер. Значительным пробелом упомянутых работ является отсутствие серьезной попытки оценить спектральные свойства возбуждаемых колебаний.

В настоящей работе предпринята попытка более или менее систематического исследования влияния интенсивности возбуждения на хаотический характер наблюдаемых колебаний. В качестве параметров приняты максимально простые числовые значения, причем частоты обоих осцилляторов приняты равными друг другу и частоте возбуждения. Рассматривается роль каждого из параметров системы по отдельности.

8. Замечание о симметрии системы

Система (28)-(29) не является симметричной, то есть уравнения при замене индексов 1 на 2 и 2 на 1 друг в друга не переходят. Эта система является частным случаем симметричной системы вида:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \rho_1 \cdot x_1 + \delta_1 \cdot x_1^3 + \gamma_1 \cdot x_2^{\alpha_1} = A_1 \cdot \cos \omega t; \quad (34)$$

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \beta_2 \cdot \frac{d x_2}{dt} + \rho_2 \cdot x_2 + \delta_2 \cdot x_2^3 + \gamma_2 \cdot x_1^{\alpha_2} = 0. \quad (35)$$

В этой системе единственным несимметричным элементом является возбуждающая сила $A_1 \cdot \cos \omega t$. Для большей симметричности можно было бы ввести во второе уравнение подобное слагаемое, что в реальной физической ситуации, например, показанной на рис.1, означало бы возбуждение наряду с магнитной также и упругой подсистемы, однако в рамках настоящей работы этого делать не будем, а оставим рассмотрение такой ситуации в качестве отдельной задачи.

9. Параметры системы

Параметры системы выберем исходя из их максимальной простоты. Так, положим собственные частоты обоих осцилляторов равными друг другу и частоте возбуждения, параметры затухания для обоих осцилляторов также положим равными друг другу, а нелинейность будем учитывать только для первого осциллятора. Параметры связи обоих осцилляторов положим равными, однако показатель степени слагаемого связи для первого осциллятора положим равным 2, а для второго – 1. Такой выбор показателей обусловлен отмеченным в работе [17] наиболее удобным соотношением, необходимым для реализации хаотического характера колебаний.

Итак, для дальнейшего рассмотрения примем следующие параметры: $\rho_1 = 1$; $\rho_2 = 1$; $\omega = 1$; $\beta_1 = 0,05$; $\beta_2 = 0,05$; $\delta_1 = 1$; $\delta_2 = 0$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 1$; $\alpha_1 = 2$; $\alpha_2 = 1$. При этом амплитуду возбуждения A_1 будем менять в пределах от 0,01 до 10000.

10. Типичное многообразие колебаний

Рассмотрим сначала наиболее характерное многообразие колебаний на примере среднего уровня возбуждения, для чего обратимся к рис.3 и рис.4.

На рис.3 приведены развертки колебаний по времени (а,б) и их параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Начала разверток выбраны исходя из полного затухания релаксационных процессов

(биений), вызванных первичным включением возбуждения. Шаг по времени $\Delta t = 0,01$. Период частоты возбуждения $\tau = 6,28$, то есть на одном периоде укладывается 628 шагов. На одном периоде третьей гармоники укладывается 209 шагов, на одном периоде пятой – 125 шагов. Эти данные важны в связи с фрактальным характером хаотических колебаний, как это более подробно предполагается рассмотреть в отдельной работе.

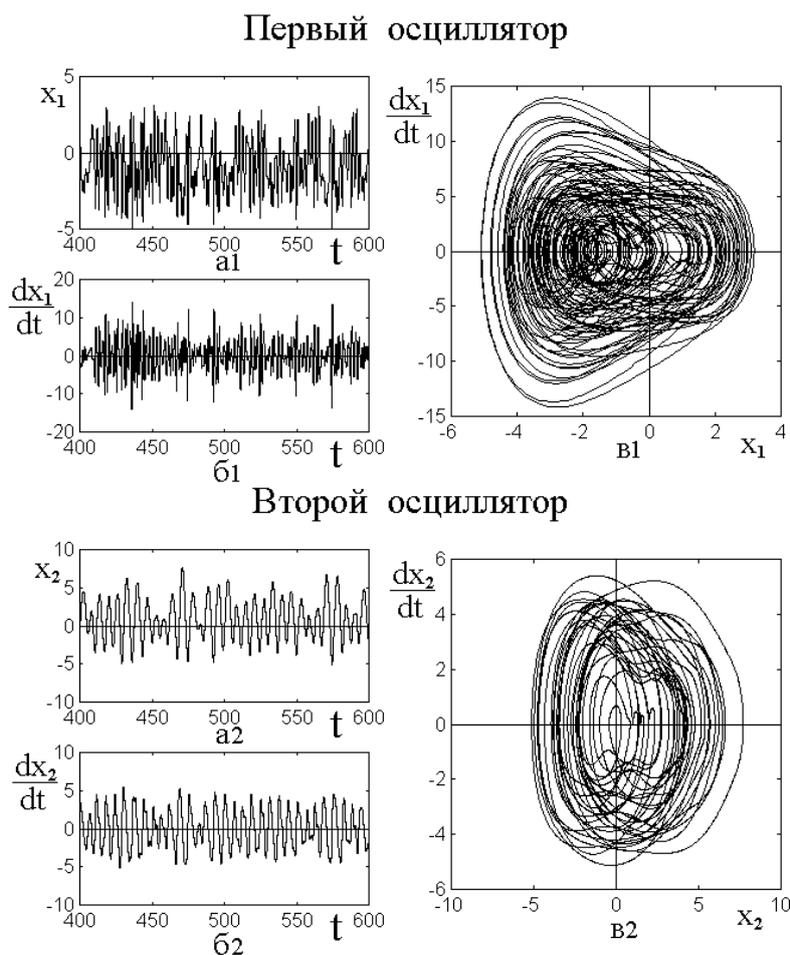


Рис.3. Развертки колебаний по времени (а,б) и их параметрические портреты (в) для первого и второго осцилляторов. Амплитуда возбуждения $A_1 = 6$.

Остальные параметры приведены в разделе 9.

Из рисунка можно видеть, что для первого осциллятора колебания как смещения (а1), так и производной (б1) имеют четко выраженный шумовой характер с преобладанием частот, значительно превышающих частоту возбуждения. В колебаниях смещения (а1) присутствует заметная постоянная составляющая, в результате чего центральная линия развертки смещена вниз

примерно на единицу. В колебаниях производной (б1) постоянная составляющая отсутствует. Параметрический портрет (в1) имеет вид сильно размазанной лежащей по горизонтали (вдоль оси смещений) двухкольцевой восьмерки, центры колец которой близки к $x_1 = 0$ и $x_1 = 2$. Такой сдвиг оси симметрии восьмерки соответствует постоянной составляющей, отмеченной на рис.3а1. Левое кольцо восьмерки по вертикали несколько расширено по сравнению с правым, что связано с единичными выбросами производной (б1), обусловленными резкими скачками смещения (а1) в отдельные моменты времени.

Для второго осциллятора колебания как смещения (а2), так и производной (б2) имеют значительно более упорядоченный характер, чем для первого. Основой колебаний является составляющая на частоте возбуждения, амплитуда которой меняется довольно случайным образом, однако эти изменения носят плавный характер и происходят, как правило, за несколько периодов основных колебаний. Источником возбуждения второго осциллятора являются колебания первого осциллятора через посредство связи, так что изменения амплитуды колебаний второго осциллятора вызваны хаотическим характером колебаний первого. Параметрический портрет (в2) имеет вид заметно размазанных нескольких колец, наложенных друг на друга с некоторым сдвигом по горизонтали (вдоль оси смещений). Такое формирование хотя и размазанных, но довольно четко выраженных колец обусловлено отмеченным выше достаточно медленным изменением амплитуды колебаний разверток по времени (а2, б2), так что траектория успевает несколько раз пробежать по одному и тому же кольцу, прежде чем новый рывок возбуждения (поступающего от первого осциллятора) передвинет ее на другое место.

Замечание. Следует заметить, что приведенное в работах [17-19] утверждение о тождественности колебаний второго осциллятора колебаниям первого, в рассматриваемой здесь ситуации, то есть при принятом здесь выборе параметров, нельзя считать достоверным. То есть колебания второго

осциллятора являются достаточно самостоятельными, их частота близка к частоте возбуждения и хаотический элемент в них хотя и присутствует, но выражен значительно слабее, чем в колебаниях первого осциллятора. Поэтому, для полноты картины следует рассматривать подробности колебаний обоих осцилляторов.

Обратимся теперь к рис.4, где представлены частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для обоих осцилляторов при тех же параметрах, что на рис.3.

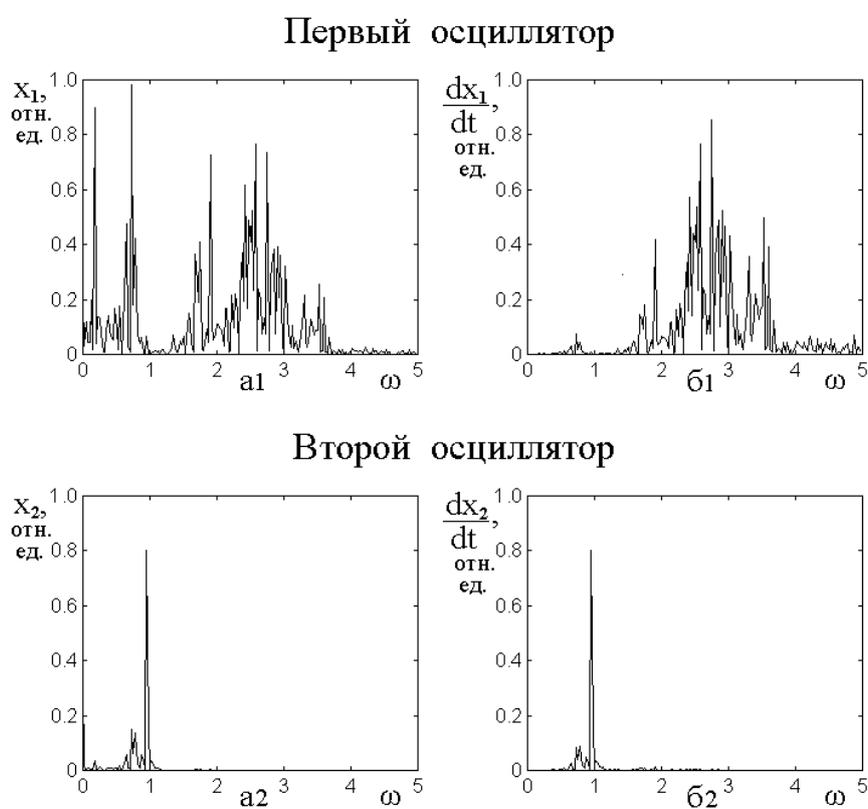


Рис.4. Частотные спектры колебаний (а) и их производных (б) для первого и второго осцилляторов. В спектре a1 постоянная составляющая убрана. Частота возбуждения по горизонтальной оси соответствует $\omega = 1$.

Параметры – те же, что на рис.3.

Из рисунка можно видеть, что для первого осциллятора спектр колебаний как смещения (a1), так и производной (б1), имеет весьма богатый вид, что обусловлено шумовым характером тех и других колебаний. Для колебаний смещения можно выделить узкую линию на частоте около 0,95, что близко к

частоте возбуждения, а также довольно узкую совокупность нескольких линий вблизи частоты 2,0, то есть вблизи второй гармоники возбуждения. Особенно широкий набор имеет место в интервале частот от 2,0 до 4,0 с центром вблизи 3,0, что соответствует третьей гармонике возбуждения. Спектр колебаний для производной (б1) имеет еще более выраженный максимум на тройной частоте возбуждения. При этом линия на основной частоте (вблизи 0,9) весьма незначительна, а линия вблизи двойной частоты также примерно в два раза уступает линии на третьей гармонике.

Таким образом, можно считать, что для первого осциллятора преобладающими являются колебания на основной частоте и особенно на ее третьей гармонике.

Для второго осциллятора спектр колебаний смещения (а2) и производной (б2) имеет хорошо упорядоченный вид вблизи основной частоты возбуждения. Наблюдается одна узкая линия на самой этой частоте 1,0 и вблизи нее небольшой сателлит на частоте около 0,9. Частота этого сателлита приходится как раз на линию вблизи 0,9 первого осциллятора (а1). Совокупность сателлита и основной частоты для второго осциллятора порождает биения, проявляющиеся в достаточно медленном изменении амплитуды разверток по времени, представленных на рис.3а2 и рис.3б2.

Можно полагать, что столь бедный спектр второго осциллятора по сравнению со спектром первого обусловлен линейностью второго осциллятора, существенно отличающей его от сильно нелинейного первого осциллятора.

Таким образом, можно заключить, что главным инициатором формирования хаотического режима является первый осциллятор, а второй является ему в значительной степени подчиненным.

В связи с этим встают следующие вопросы:

Какова роль нелинейности первого осциллятора в формировании хаотического характера его колебаний?

В какой мере второй осциллятор влияет на формирование и хаотический характер колебаний первого осциллятора?

Какова роль квадратичности связи первого осциллятора со вторым?

Эти вопросы будут рассмотрены далее.

Замечание. В рассматриваемой ситуации собственные частоты обоих осцилляторов выбраны равными частоте возбуждения. Поэтому везде в тексте говорится о частоте именно возбуждения. В то же время, в работах [17-20], показано, что различие всех этих частот накладывает определенные особенности на характер возбуждаемых колебаний. Выяснение таких особенностей авторы предполагают в виде темы для отдельной работы.

11. Классификация основных режимов колебаний

Как показано, в предыдущих разделах, основные характеристики колебаний задает первое уравнение системы (28)-(29). Более подробное рассмотрение показывает, что при принятых параметрах (раздел 9) все разновидности возбуждаемых колебаний можно классифицировать на основе всего двух основных режимов, задаваемых первым уравнением системы (28)-(29). В свою очередь эти два режима задаются первым уравнением системы, тогда как роль второго является подчиненной, как бы «балластной», то есть возвращает первому уравнению то, что получает от него в предыдущих циклах колебаний. Поэтому сначала рассмотрим основные режимы колебаний, свойственные одному первому уравнению в отсутствие связи, то есть уравнению вида (28) при $\gamma_1 = 0$:

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} + \beta_1 \cdot \frac{d x_1}{dt} + \omega_1^2 \cdot x_1 + \delta_1 x_1^3 = A_0 \cdot \cos(\omega_0 t); \quad (36)$$

В качестве параметра вариации выберем амплитуду возбуждения A . Остальные параметры будем считать заданными в соответствии с разделом 9.

Замечание. Следует заметить, что приведенное уравнение является одним из вариантов известного уравнения Дуффинга [1, стр.90, 300], решение которого при определенном наборе параметров проявляет хаотическое поведение.

Обратимся к рис.5, где показаны развертки по времени переменной (а) и ее производной (б), а также параметрические портреты (в) и спектры возбуждаемых колебаний (г) при различных уровнях возбуждения A , приведенных слева для каждого из горизонтальных рядов рисунков.

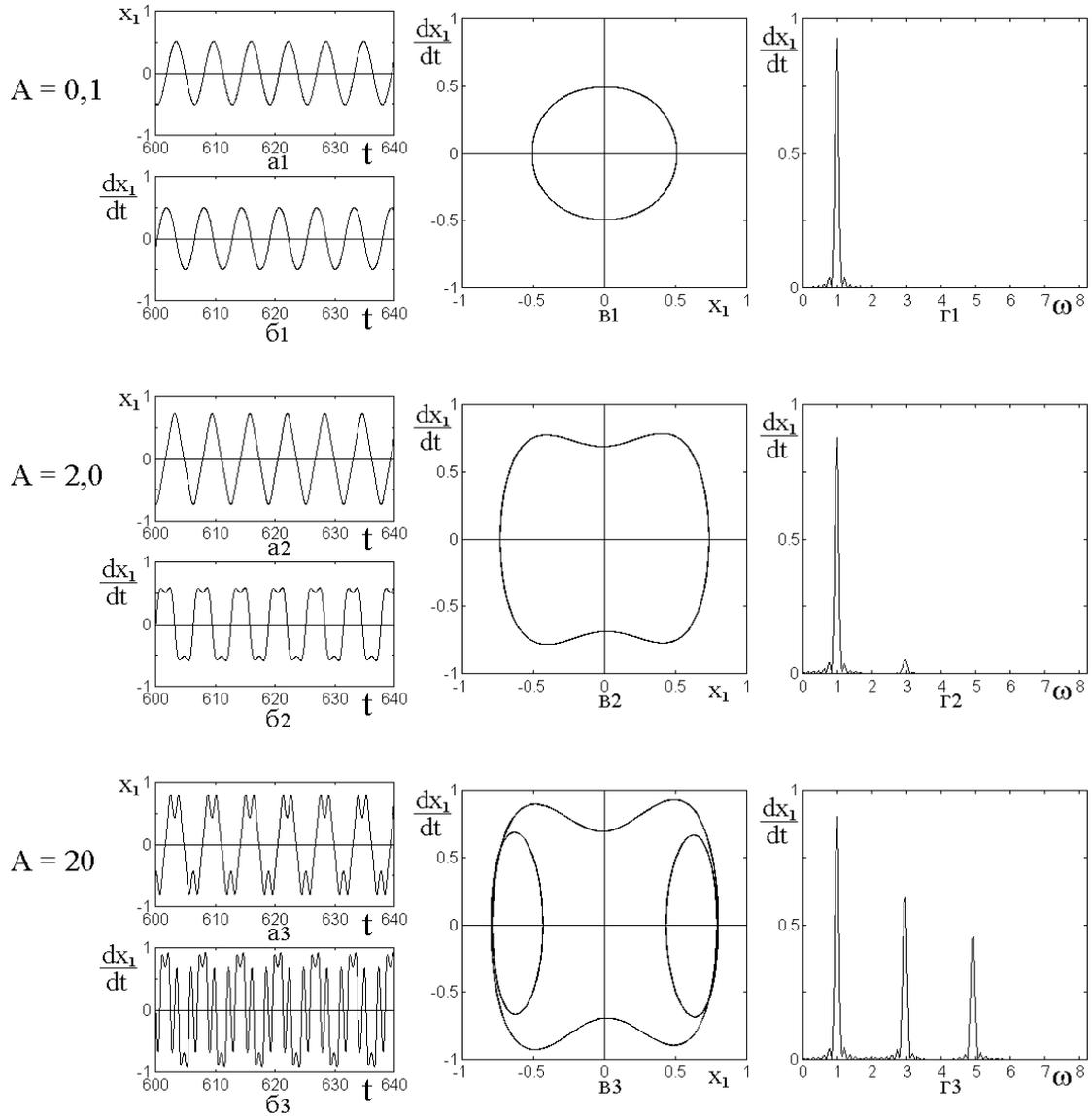


Рис.5. Развертки по времени переменной (а) и ее производной (б), а также параметрические портреты (в) и спектры возбуждаемых колебаний (г) при различных уровнях возбуждения A , приведенных слева для каждого из горизонтальных рядов рисунков. Кривые соответствуют решению уравнения (36). Остальные параметры – те же, что в разделе 9.

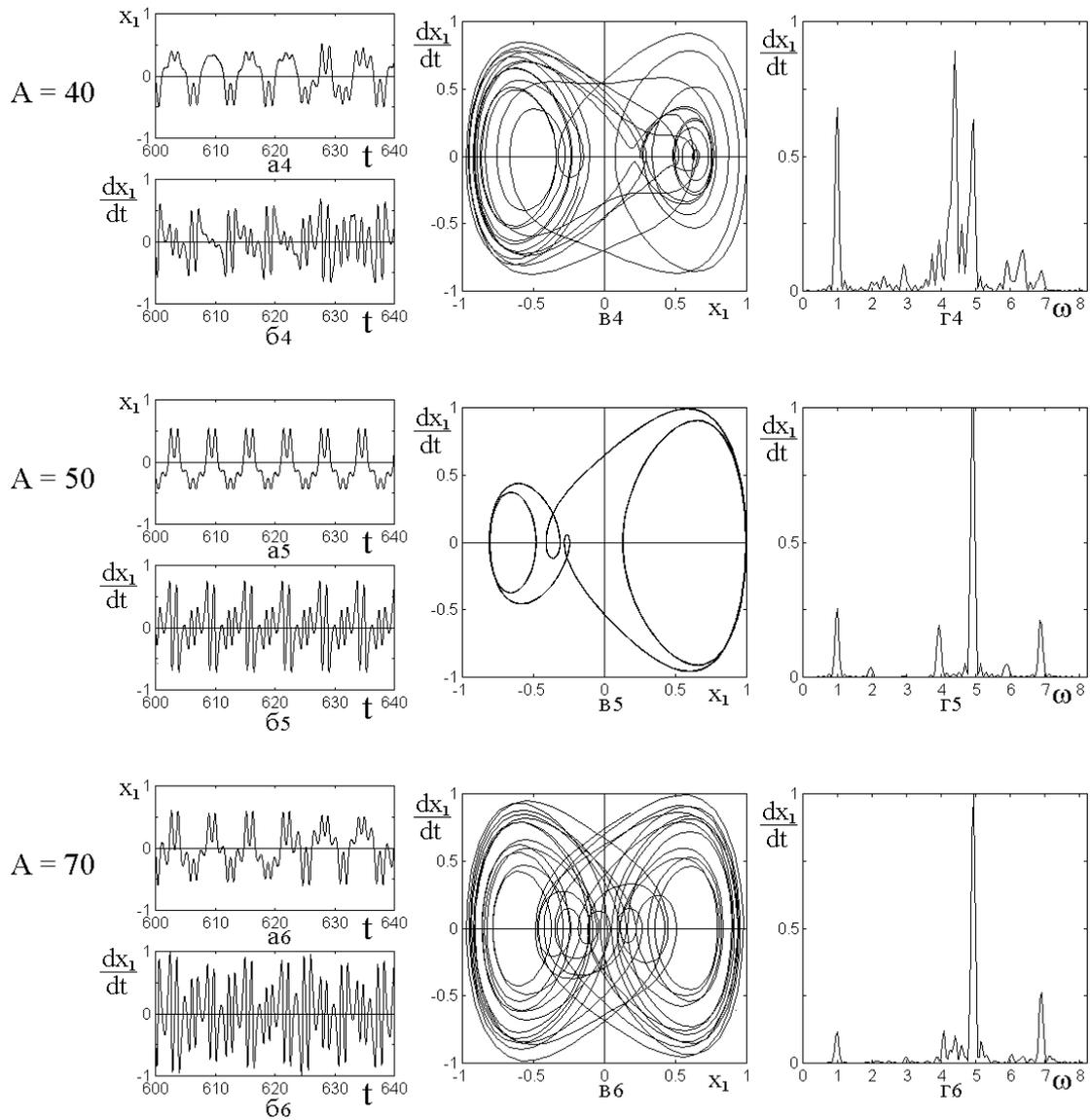


Рис.5 (продолжение). Развертки по времени переменной (а) и ее производной (б), а также параметрические портреты (в) и спектры возбуждаемых колебаний (г) при различных уровнях возбуждения A , приведенных слева для каждого из горизонтальных рядов рисунков. Кривые соответствуют решению уравнения (36). Остальные параметры – те же, что в разделе 9.

Все развертки, портреты и спектры нормированы с целью приведения к близким величинам, удобным для рассмотрения.

Из рисунка видно, что развертки по времени во всех случаях имеют сильно выраженный период частоты возбуждения, что проявляется и в спектрах, где всегда присутствует заметная составляющая на основной частоте (при $\omega = 1$). По мере увеличения возбуждения возрастает изрезанность разверток, то есть обогащение их более высокочастотными составляющими, что соответствует возбуждению гармоник за счет нелинейности системы.

Важной общей особенностью всех портретов, начиная с $A = 2$, является их форма, соответствующая двум эллипсовидным фигурам, расположенным по обе стороны от вертикальной оси, с горизонтальной перетяжкой, соединяющей боковые эллипсы в единое целое. Такой вид портретов можно условно назвать «горизонтальной» или «лежачей восьмеркой». Из рисунка в целом виден всеобщий характер такой восьмерки.

Параметрические портреты колебаний (в1), (в2), (в3), (в5) имеют четко очерченные узкие линии, образованные повторяющимися траекториями, тогда как параметрические портреты колебаний (в4) и (в6) сильно размыты, так что последующие траектории не повторяются.

На приведенных рисунках развертка по времени выбрана в интервале от 600 до 640 единиц, что примерно соответствует шести периодам возбуждения. Столь небольшое время развертки выбрано для того, чтобы можно было подробно различить структуру колебаний с достаточным разрешением по времени. При увеличении интервала времени развертки до нескольких тысяч единиц и более параметрические портреты (в1), (в2), (в3) и (в5) остаются четко очерченными без заметных изменений, тогда как портреты (в4) и (в6) полностью замазываются вплоть до сплошного черного тона. То есть эти две группы портретов отличаются принципиальным образом, что позволяет говорить о различии режимов колебаний.

Портреты (в1) и (в2) имеют четкую структуру – все траектории повторяют друг друга. Различие между этими двумя портретами состоит в том, что портрет (в1) – геометрически правильная окружность, тогда как портрет (в2) – как бы растянутый по горизонтали эллипс, имеющий «горловидную» перетяжку по меньшей (вертикальной) оси.

Спектральный состав всех режимов колебаний имеет мультигармонический характер, то есть колебания имеют множество гармоник. Исключением являются только колебания 1, где благодаря низкому уровню возбуждения колебания происходят на единственной частоте, так что более высокие гармоники отсутствуют. Спектры колебаний (г2), (г3), (г5) имеют

четко выраженную гармоническую структуру. Составляющие спектров, не кратные частоте возбуждения, отсутствуют. Спектры колебаний (г4) и (г6) кроме частот, кратных возбуждению, содержат промежуточные составляющие, амплитуда которых сравнима или даже больше основных. Так спектр колебаний (г4), кроме гармоник 4, 5, 6, 7, содержит сильный выброс между 4 и 5 гармониками, а также заметный выброс между 6 и 7 гармониками. В обоих случаях амплитуда выброса превышает амплитуды соседствующих гармоник. Спектр колебаний (г6) кроме гармоник 4, 5 и 7 содержит дополнительные выбросы между 4 и 5 гармониками, а также между 6 и 7. В этих случаях амплитуды выбросов не так велики, как в спектре (г4), однако тоже весьма заметны.

Таким образом, все виды колебаний можно разбить на два больших класса, имеющих следующие режимы.

Режим №1: мультигармонический регуляризованный. В этом режиме параметрический портрет имеет четко очерченные повторяющиеся траектории, спектр колебаний содержит только гармоники, кратные частоте возбуждения.

Режим №2: мультигармонический квазихаотический. В этом режиме параметрический портрет сильно размазан, траектории не повторяются, спектр колебаний, кроме гармоник, кратных частоте возбуждения, содержит множество промежуточных частот, амплитуда которых может превышать соседствующие кратные гармоники.

По мере увеличения амплитуды возбуждения, сначала возбуждается регулярный режим №1, после чего, при достаточном уровне возбуждения он сменяется квазихаотическим режимом №2, который при дальнейшем увеличении возбуждения снова регуляризуется, переходя в режим №1, увеличение возбуждения в котором снова приводит к квазихаотическому режиму №2 и так далее. То есть по мере увеличения возбуждения, начиная с регулярного, имеет место чередование регулярного и квазихаотического режимов. Отметим, что какой-либо пороговый характер смены и чередования

режимов отсутствует: все режимы по мере увеличения уровня возбуждения переходят друг в друга довольно плавным образом.

12. Модельная имитация формирования параметрического портрета

На примере модельной имитации покажем, что формирование «горизонтальной восьмерки» параметрического портрета обусловлено наличием в спектре колебаний нечетных гармоник высоких порядков. Обратимся к рис.6, где в качестве примера показано сложение колебаний из трех частотных составляющих: основной частоты, третьей и пятой ее гармоник. В качестве имитационной функции выбрана следующая:

$$x(t) = a \sin(t) + b \sin(3t) + c \sin(5t). \quad (37)$$

Производная от этой функции равна:

$$dx/dt = a \cos(t) + 3b \cos(3t) + 5c \cos(5t). \quad (38)$$

В этих функциях переменную t будем рассматривать как имитацию времени, а саму функцию и ее производную – как имитацию смещения осциллятора и его производной по времени.

На рисунке в горизонтальных рядах представлены развертки по времени смещения (1) и производной (2), а также образованный этими функциями параметрический портрет (3). Каждый горизонтальный ряд образован соответствующим набором параметров, значения которых представлены в подписи к рисунку.

Из рисунка можно видеть, что в отсутствие гармоник (1) колебания смещения (а1) и производной (б1) имеют чистый синусоидальный характер, а параметрический портрет (в1) имеет форму правильной окружности. При включении третьей гармоники (2) колебания смещения (а2) приобретают вид пилы с симметричными зубцами, а производная (б2) на каждом максимуме обретает провал. Параметрический портрет (в2) уже имеет элементы горизонтальной восьмерки – два эллипса, центры которых расположены симметрично относительно нуля смещения, сросшиеся вместе в области касания. Включение пятой гармоники (3) еще больше спрямляет зубья пилы колебаний смещения (а3), а для производной (б3) делает провал более

зазубренным. На параметрическом портрете (в3) пятая гармоника раздвигает эллипсы дальше друг от друга и формирует между ними перетяжку, огибающая которой также имеет характер, близкий к эллиптическому, однако размер получающейся горловины значительно меньше размера главных эллипсов.

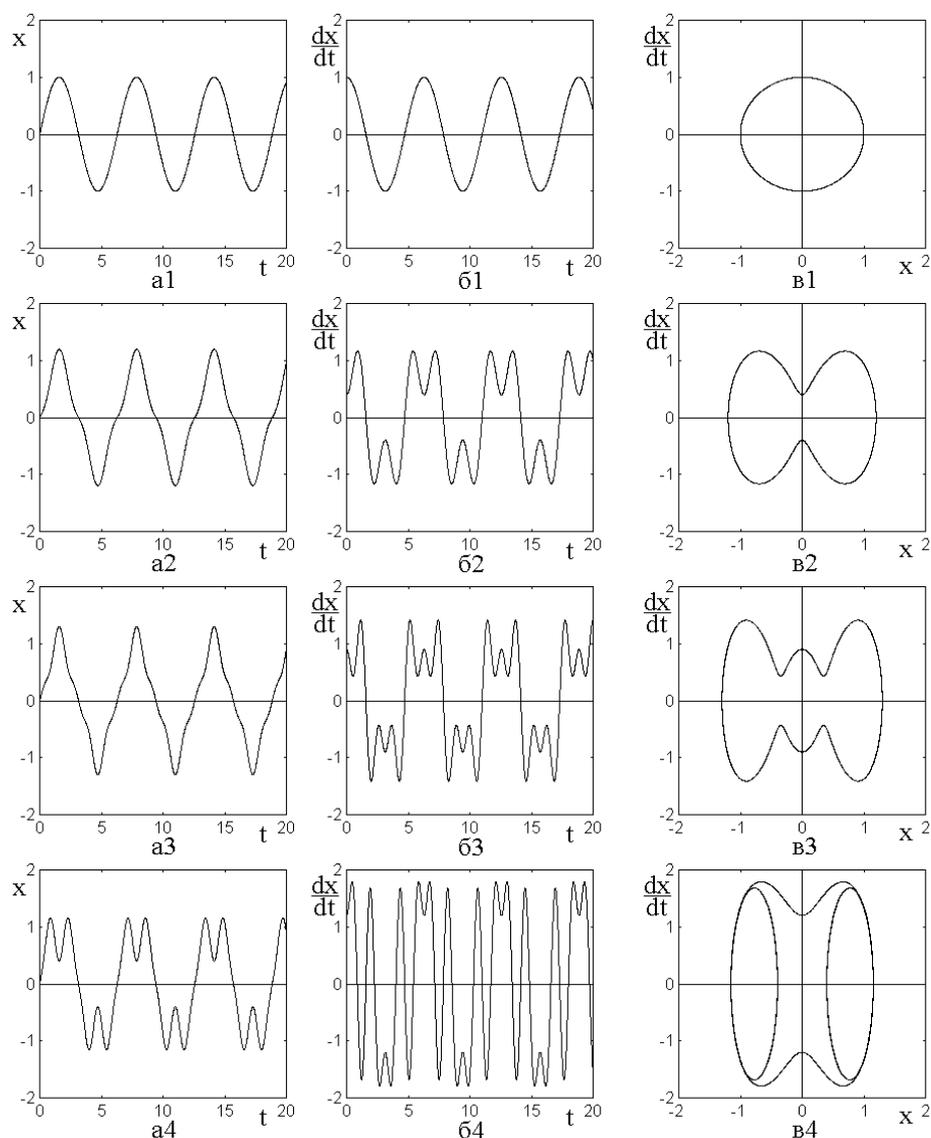


Рис.6. Схема формирования параметрического портрета при различном наборе параметров. 1 – $a = 1, b = 0, c = 0$; 2 – $a = 1, b = -0,2, c = 0$; 3 – $a = 1, b = -0,2, c = 0,1$; 4 – $a = 1, b = 0,4, c = -0,2$.
 а – функция $x(t)$; б – производная dx/dt ;
 в – модель параметрического портрета $x(dx/dt)$.

В качестве дополнительного примера на рисунке представлены данные при частном наборе параметров, дающем параметрический портрет в виде

раздельных эллипсов, соединенных вогнутой перемычкой (в4). При этом колебания смещения (а4) и производной (б4) обогащаются дополнительными перепадами и приобретают довольно сложный характер.

Таким образом, можно видеть, что изменение соотношений между амплитудами частотных составляющих a , b и c в выражениях (37) и (38) позволяет получить значительное разнообразие как разверток по времени, так и параметрических портретов, весьма похожих на таковые, соответствующие колебаниям системы при различных уровнях возбуждения (рис.5). Во всех этих случаях параметрический портрет имеет вид «горизонтальной восьмерки», то есть можно считать, что такой его вид является как бы «базовым», обусловленным именно наличием в спектре колебаний нечетных гармоник достаточно высоких порядков.

13. Уравнение с кубической нелинейностью

В предыдущем разделе показано, что формирование горизонтальной восьмерки обусловлено нелинейностью третьей степени. Выполним приближенное аналитическое рассмотрение роли кубической нелинейности в формировании амплитуды колебаний.

Сначала обратимся к уравнению

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + b^2 x^3 = 0, \quad (39)$$

содержащем кубическую нелинейность в чистом виде без влияния каких-либо других факторов, в том числе в отсутствие возбуждения, то есть свободное движение, реализуемое на основе задания начальных параметров.

Аналитическое решение уравнения (39) можно выполнить через представление второй производной через квадрат первой:

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 \right] = 2 \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 x}{dt^2}. \quad (40)$$

В результате такого представления переменные разделяются, так что получаемое решение имеет вид:

$$x = \frac{i\sqrt{2}}{b} \cdot \frac{1}{t}, \quad (41)$$

где мнимость пропадает при знаке минус в уравнении. Других решений стандартная аналитика не дает.

В то же время, в (39) второе слагаемое – есть производная от потенциала четвертой степени. Если бы потенциал был второй степени, то это было бы простое уравнение колебаний, разрешимое через экспоненту. Здесь представление решения в виде экспоненты не проходит, так как остается экспонента в квадрате. В то же время, из четности потенциала следует, что должно быть колебательное решение.

Поиск решения в виде:

$$x = A \cdot \cos(\omega t), \quad (42)$$

где A – начальное смещение, приводит к уравнению:

$$\left(-\omega^2 + \frac{3A^2b^2}{4} \right) \cos(\omega t) + \frac{A^2b^2}{4} \cos(3\omega t) = 0. \quad (43)$$

Экспонента дает примерно то же самое.

Это – уравнение для частоты, стандартного способа решения не имеющее. Его коэффициенты зависят от времени, то есть частота также должна получаться зависящей от времени. Простое решение имеется при $t = 0$. При этом получаем решение в начальной точке:

$$\omega = bA. \quad (44)$$

Из этой формулы видно, что частота собственных колебаний прямо пропорциональна их амплитуде.

Численное решение уравнения (39) методом Рунге-Кутта дает колебания, очень близкие к синусоидальным, причем их частота зависит от параметра b и от начального смещения A в полном соответствии с полученной формулой (44). Однако проверка показывает, что выражение (42) с подставленным в него значением частоты (44) в общем случае исходному уравнению (39) не

удовлетворяет, поэтому далее следует пытаться найти более приемлемое решение.

В качестве наводящего соображения в настоящей работе была выполнена численная проверка роли показателя степени второго слагаемого в уравнении (39). Было установлено, что при нечетном показателе решение является колебательным, а при четном – расходящимся. Это находится в соответствии с четностью и нечетностью потенциала. Увеличение нечетного показателя степени (проверено до 17) приводит к спрямлению периодов синусоиды, то есть синусоида превращается в пилу с симметричными зубцами. Согласно классике [38, стр.473], разложение в ряд Фурье функции типа симметричной пилы имеет вид:

$$x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right\}, \quad (45)$$

где l – половина периода пилы.

Исходя из такой аналогии, будем искать решение уравнения (39) в виде:

$$x = A \left\{ \cos(\omega t) + \frac{1}{9} \cos(3\omega t) \right\}. \quad (46)$$

Подставляем в исходное уравнение, учитываем малость слагаемых с большими знаменателями (степень девяти), а также оставляем только аргументы (ωt) и $(3\omega t)$. В результате получаем уравнение:

$$\begin{aligned} -12\omega^2 [\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)] + \\ + b^2 A^2 [5\cos(\omega t) + 10\cos(3\omega t)] = 0, \end{aligned} \quad (47)$$

которое при $t = 0$ дает:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2}} b A, \quad (48)$$

то есть опять-таки частота прямо пропорциональна амплитуде колебаний, хотя коэффициент и несколько отличается от такового в формуле (44).

Положим теперь, что второе слагаемое в выражении (46) содержит неопределенный множитель B , который подберем, исходя из соответствия численному решению. То есть предполагаем решение в виде:

$$x = A \left\{ \cos(\omega t) + \frac{B}{9} \cos(3\omega t) \right\}. \quad (49)$$

Подстановка (49) в (39) приводит к уравнению:

$$\begin{aligned} & \left[-12\omega^2 + A^2 b^2 (9 + b) \right] \cos(\omega t) + \\ & + \left[-12B\omega^2 + A^2 b^2 (3 + 2B) \right] \cos(3\omega t) = 0. \end{aligned} \quad (50)$$

Если в этом выражении положить $B = 0$ и $t = 0$, после чего найти частоту, то получается выражение (44).

Аналитическое решение этого уравнения относительно частоты вряд ли возможно, однако, учитывая, что оно должно выполняться при любых значениях времени, можно найти частное решение, положив оба коэффициента при косинусах равными нулю.

При этом для частоты получаем два выражения:

$$\omega = b A \sqrt{\frac{9 + b}{12}}; \quad (51)$$

$$\omega = b A \sqrt{\frac{3 + 2B}{12B}}. \quad (52)$$

Приравнявая эти выражения, можно найти B :

$$B = \frac{3}{7 + b}. \quad (53)$$

При $b = 1$ получаем $B = 0,375$. Численная оценка величины B , исходя из условия минимизации выражения (50), дает B в интервале от 0,17 до 0,41, что как раз включает в себя полученное значение.

Главным результатом проделанного аналитического рассмотрения можно считать тот факт, что во всех случаях (44), (48), (51), (52) – частота

всегда прямо пропорциональна амплитуде собственных колебаний.

Таким образом, с определенной достоверностью можно считать, что нелинейность третьей степени в первом приближении обеспечивает линейную возрастающую зависимость частоты собственных колебаний от их амплитуды.

14. Области формирования хаотического режима при различных уровнях возбуждения

В ходе проведенного рассмотрения (раздел 11) показано, что возникновение хаотического режима по мере увеличения амплитуды возбуждения не является окончательным. То есть при дальнейшем увеличении возбуждения хаотический режим может снова смениться регулярным, которые далее снова сменяется хаотическим и так далее. Особенно ясно это видно из рис.5, где возникший при $A = 40$ хаотический режим уже при $A = 50$ снова регуляризуется, а при $A = 70$ вновь обращается в хаотический. Таким образом, представляет интерес рассмотреть чередование режимов более подробно.

Обратимся к рис.7, где показаны области существования хаотического и регуляризованного режимов для первого осциллятора при различных уровнях возбуждения. Сверху приведены номера преобладающих гармоник. Три схемы соответствуют трем различным видам слагаемых связи в уравнении (12В): первый вид (а) – отсутствие связи, второй (б) – связь линейная, то есть пропорциональна x_2^1 , третий – связь квадратичная, пропорциональная x_2^2 .

Из рисунка видно, что в отсутствие связи (а) области хаотического и регулярного режимов чередуются в довольно правильном порядке, видимая тенденция к сгущению или разрежению областей не заметна. Увеличение уровня возбуждения приводит к постепенному росту номеров возбуждаемых гармоник.

В случае линейной связи (б) характер чередования областей того и другого режимов, в общем, сохраняется, однако наблюдается растяжение всей картины в сторону больших значений возбуждения. В отличие от первого случая, где второй осциллятор не участвует, здесь влияние второго осциллятора

состоит в отмеченном растяжении расположения областей в сторону увеличения возбуждения. То есть здесь происходит как бы «нагрузка» первого осциллятора вторым, за счет чего те же режимы его колебаний требуют более высокого уровня возбуждения. Таким образом, здесь второй осциллятор играет как бы «балластную» роль, то есть отсасывает на себя часть энергии возбуждения, в определенной степени затрудняя возбуждение первого осциллятора.

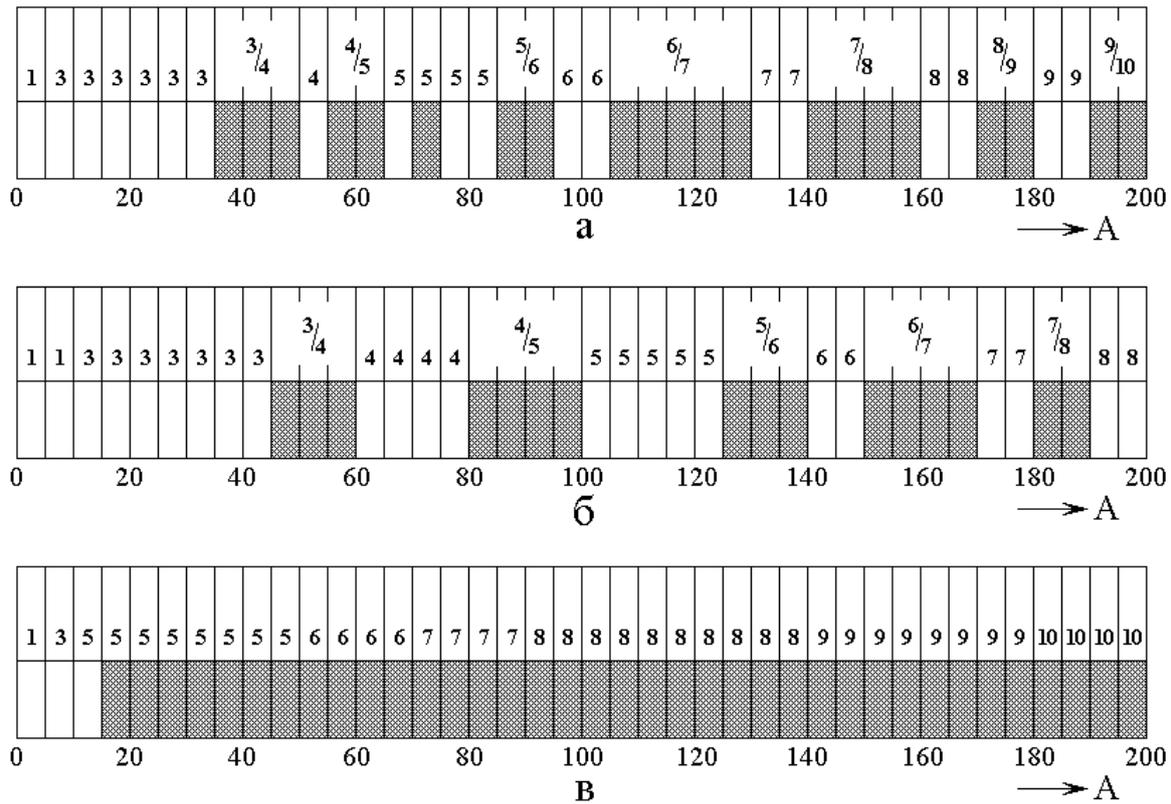


Рис.7. Схемы областей существования хаотического и регуляризованного режимов колебаний первого осциллятора при различной амплитуде возбуждения. Отдельные схемы соответствуют различным показателям степени связи в уравнении (28): а – связь отсутствует; б – связь пропорциональна x^1 ; в – связь пропорциональна x^2 . Заштрихованные области – режим хаотический; чистые области – режим регулярный. В верхних рядах приведены соответствующие уровню возбуждения номера гармоник преобладающих максимумов спектров. Дробные значения соответствуют сравнимой величине максимумов на обеих соседствующих гармониках.

В случае квадратичной связи (в) чередование областей различных режимов уже не наблюдается. Начиная с довольно низкого уровня возбуждения

($A = 15$), колебания приобретают хаотический характер и регуляризация далее не происходит. Как и в двух предыдущих случаях увеличение уровня возбуждения приводит к росту номеров возбуждаемых гармоник. Здесь, однако, спектры колебаний становятся довольно широкими, так что относительное выделение амплитуд тех и других гармоник происходит слабее, поэтому дробные значения не отмечены. В отличие от предыдущего случая здесь второй осциллятор уже не является «балластом» и участвует в формировании режимов более активно, как бы повышая уровень нелинейности колебаний в целом. В самом деле, если для первого осциллятора нелинейность задается членом вида x^3 , то здесь к ней добавляется нелинейность еще вида x^2 , получаемая за счет того, что второй осциллятор как бы возвращает первому то, что от него получает. А если он получает возбуждение порядка x^3 , то за счет квадратичности связи степень нелинейности возрастает до x^5 , что и создает более удобные условия для формирования хаоса, проявляющиеся в расширении области хаотического режима на всю горизонтальную ось рис. 7в.

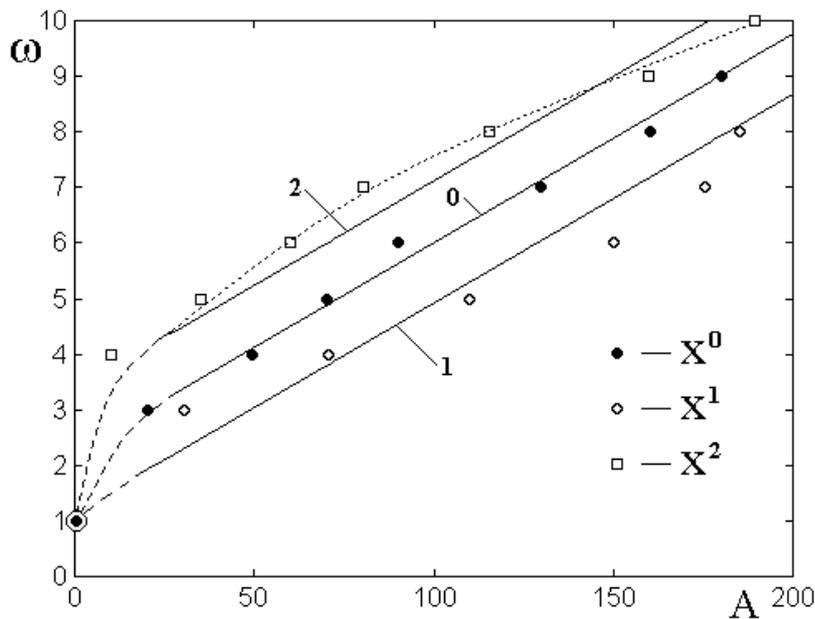


Рис.8. Зависимости частоты максимума спектра от амплитуды возбуждения при различных степенных показателях связи.

Прямая 1 соответствует $\omega_1 = 0,37 \cdot A + 12$, прямая 0 соответствует $\omega_0 = 0,37 \cdot A + 23$, прямая 2 соответствует $\omega_2 = 0,37 \cdot A + 34$.

Все параметры – те же что в разделе 9.

Рассмотрим теперь, что происходит с номерами возбуждаемых гармоник при увеличении уровня возбуждения. Согласно показанному в разделе 13, частота, то есть номер гармоники в масштабе частоты возбуждения, должна быть прямо пропорциональна амплитуде возбуждения. Обратимся к рис.8, где такие зависимости построены по материалам рис.7. Приняты те же три случая: отсутствие связи (0), связь, пропорциональная x^1 (1) и связь, пропорциональная x^2 (2). Можно видеть, что во всех трех случаях наблюдаемые точки довольно близко аппроксимируются прямыми с одним и тем же угловым коэффициентом 0,37, но сдвинутыми вверх и вниз на величины порядка $\Delta A = 11$.

Таким образом, из рисунка видно, что вывод, принятый в разделе 13, о линейном характере этих зависимостей, в основном, подтверждается. Следует отметить однако две существенные особенности. Во-первых, все три зависимости при малых значениях A сходятся к одной точке (отмеченной кружком с сердцевинкой). Соответствующие участки кривых отмечены пунктиром. Видно, что все они лежат ниже линейных зависимостей. Во-вторых, зависимость для x^2 (точки в виде открытых квадратов) не вполне ложится на прямую 2, а имеет определенный выгиб вверх, отмеченный точечной кривой. То есть и здесь зависимость заметно отклоняется от линейной.

Для выяснения дополнительных особенностей спектральных свойств наблюдаемых колебаний представляет интерес их рассмотрение в более широком интервале уровней возбуждения, что и будет сделано далее.

15. Критерий формирования квазихаотического режима

Приведем некоторые соображения, касающиеся формирования хаоса в рассматриваемой системе (28)-(29).

Первое уравнение, без учета связи, имеет вид (36):

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \beta \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \rho \cdot x + \delta \cdot x^3 = A \cdot \cos(\omega t), \quad (54)$$

где предполагается $\rho > 0$, а также $\delta > 0$.

Потенциал является суммой двух слагаемых – второй и четвертой степени:

$$U = \frac{\rho}{2}x^2 + \frac{\delta}{4}x^4, \quad (55)$$

то есть парабола второй степени вложена в параболу четвертой степени, причем ветви обеих парабол стремятся к плюс бесконечности. Качественно можно считать, что потенциал имеет вид одной ямы четвертого порядка, имеющей всего один минимум, симметричный относительно нулевого значений координаты. Таким образом, вследствие единственности и симметричности потенциальной ямы, изменение характера потенциала не может обеспечить механизм возникновения хаоса, то есть следует искать другие причины.

Обратимся к рассмотрению характерных признаков изменения структуры колебаний по мере увеличения амплитуды возбуждения. В общем случае, как можно видеть из рис.5, при малой (например $A = 20$), а также при большой ($A = 50$) амплитуде возбуждения колебания являются регулярными, параметрический портрет представляет собой горизонтальную восьмерку, очерченную узкими линиями. Все траектории на портрете идут по одним и тем же линиям, какой-либо размазки нет. Между этими двумя областями регулярности по среднему уровню возбуждения ($A = 40$) имеется область, где колебания нерегулярные, близкие к хаотическим, параметрический портрет – также горизонтальная восьмерка, однако сильно замазанная множеством траекторий, друг друга не повторяющих.

Можно полагать, что критерий хаоса – изменение количества гармоник по мере увеличения возбуждения. При очень малом возбуждении гармоник нет, колебания строго регулярные, параметрический портрет – четкий эллипс. При достаточно малом возбуждении колебания остаются регулярными, но появляется составляющая на тройной частоте возбуждения. При среднем возбуждении добавляется пятая гармоника. При этом, как с третьей, так и с пятой гармониками колебания являются регулярными. Переход от трех гармоник к пяти происходит в узком интервале по уровню возбуждения и

сопровождается хаосом. Дополнительное рассмотрение показывает, что при дальнейшем увеличении уровня возбуждения добавляется седьмая гармоника, причем колебания с семью гармониками опять являются регулярными, но переход от пятой к седьмой сопровождается хаосом, хотя выраженным несколько слабее, чем переход от третьей гармоники к пятой.

Таким образом, определенная полоса по уровню возбуждения, в которой формируется хаос, связана с добавлением еще одной очередной гармоники к уже имеющимся. То есть хаотизация колебаний происходит тогда, когда, амплитуда последующей гармоники начинает преобладать над уровнем предыдущей.

16. Особенности колебаний в широком интервале уровня возбуждения

Завершая рассмотрение типичного примера хаотических колебаний, отметим, что для реализации подобного режима требуется достаточный уровень возбуждения (то есть значения A_1). При слабом возбуждении колебания обоих осцилляторов близки к синусоидальным, параметрический портрет имеет четкую (без размазывания) форму круга или слабо вытянутого по горизонтали эллипса, а спектры смещения и производной содержат только одну узкую линию, частота которой совпадает с частотой возбуждения. При увеличении уровня возбуждения сначала появляется вторая гармоника, причем колебания в целом остаются достаточно регулярными. Хаотический режим возникает только при появлении других более высокочастотных гармоник, в первую очередь третьей и далее. По мере увеличения уровня возбуждения переход от регулярного режима к хаотическому происходит достаточно плавно без резкого порога, то есть сначала появляются небольшие искажения регулярности, которые постепенно растут, приводя к полной хаотизации всего процесса колебаний.

При принятых здесь параметрах регулярный режим начинает искажаться с уровня возбуждения A_1 около 0,2, а при уровне $A_1 = 0,8$ колебания становятся достаточно хаотичными. При дальнейшем увеличении уровня

возбуждения вплоть до $A_I = 1000$ характер колебаний остается близким к описанному выше. Главной особенностью спектра здесь является появление все более высокочастотных гармоник, которые группируются в широкий подъем, подобный представленному на рис.4а1 и рис.4б1. При увеличении A_I выше 1000 вплоть до 10000 этот подъем сужается, в спектре остаются только две основные составляющие – частота возбуждения и сравнительно неширокий подъем, образованный несколькими наиболее высокочастотными гармониками. При этом развертка колебаний имеет вид синусоиды с частотой возбуждения, на которую наложены крайне частые колебания высокочастотных гармоник. Колебания второго осциллятора постепенно упорядочиваются и биения затухают. Так при A_I порядка 1000 амплитуда биений составляет около 20% от максимального значения амплитуды, а при A_I порядка 5000 и более биения сглаживаются до единиц процентов. При A_I порядка 10000 биения уже отсутствуют, колебания становятся полностью регулярными с частотой, равной частоте возбуждения. Параметрический портрет теряет размазку и представляет собой единственное четко выраженное кольцо с узкой образующей. Однако такое упорядочение колебаний относится только ко второму осциллятору, тогда как колебания первого во всем рассмотренном интервале содержат значительные элементы хаотичности. Более подробному исследованию этого режима авторы предполагают посвятить отдельную работу.

17. Спектральные характеристики при изменении уровня возбуждения

Рассмотрим теперь спектральные характеристики колебаний системы при изменении уровня возбуждения несколько более подробно.

Из рис.4 видно, что главная составляющая спектров смещения и производной для первого осциллятора представляет собой широкий подъем с сильно изрезанными склонами. Особенно ярко такая структура спектра проявляется для производной (рис.4б1), где составляющая на частоте возбуждения (заметная для смещения на рис.4а1) почти отсутствует. По мере увеличения уровня возбуждения развертка смещения приобретает все

возрастающую постоянную составляющую, отмеченную при рассмотрении рис.3а1. Так, при уровне возбуждения $A_1 = 10$ постоянная составляющая равна 1, при $A_1 = 100$ близка к 3, а при $A_1 = 1000$ достигает 10. Эта составляющая затрудняет построение спектра в едином масштабе для всех частот, так как ее величина превышает амплитуды переменных составляющих спектра более чем на порядок. Введение же логарифмического масштаба, хотя и приводит к сравнительному выравниванию составляющих спектра на всех частотах, но обогащает картину множеством пилообразных выбросов, что в значительной мере нарушает ее наглядность. В то же время, как отмечено при рассмотрении рис.3б1, для производной постоянная составляющая отсутствует, а структура главного подъема спектра остается подобной таковой для смещения (что особенно хорошо видно из сравнения рис.4а1 с рис.4б1). Поэтому можно полагать, что для исследования свойств главного подъема спектра достаточно рассмотреть спектральные свойства не смещения, а именно производной.

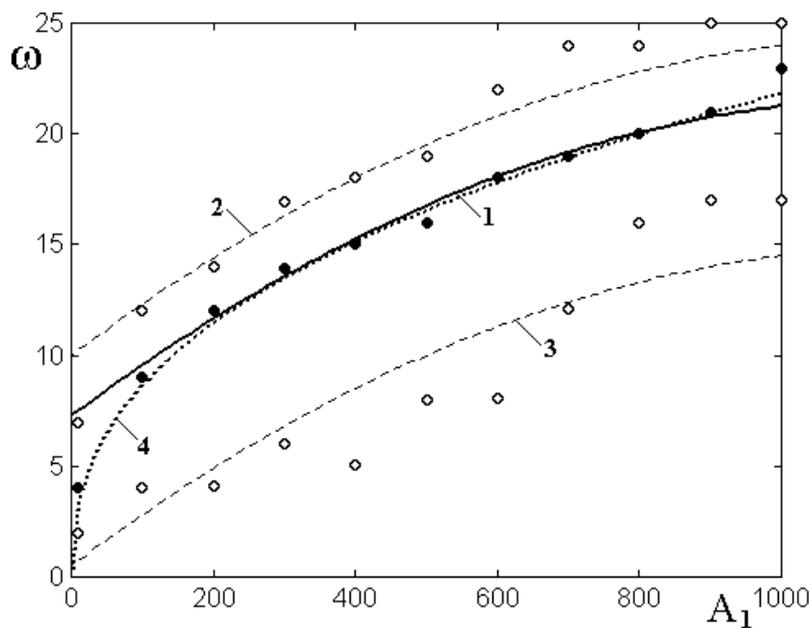


Рис.9. Зависимости частот главного подъема спектра производной для первого осциллятора от амплитуды возбуждения.

1 – аппроксимация частоты максимума главного подъема спектра, построенная по формуле (56); 2 – аппроксимация частоты верхнего края главного подъема на уровне 0,1 от максимума, построенная по формуле (57); 3 – аппроксимация частоты нижнего края главного подъема на уровне 0,1 от максимума, построенная по формуле (58); 4 – аппроксимация частоты максимума главного подъема спектра, построенная по формуле (59).

В соответствии со сказанным, рассмотрим, как меняется спектр производной при изменении амплитуды возбуждения в широких пределах. Обратимся к рис.9, где представлены зависимости частоты максимума (сплошные точки) и краев (открытые точки) главного подъема спектра производной колебаний первого осциллятора от амплитуды возбуждения.

На рисунке точки получены из спектров колебаний производной, а линии построены по следующим аппроксимирующим формулам:

для кривой 1 (сплошная линия):

$$y = -10^{-5} (x - 1200)^2 + 21,7; \quad (56)$$

для кривой 2 (пунктир):

$$y = -10^{-5} (x - 1200)^2 + 24,4; \quad (57)$$

для кривой 3 (пунктир):

$$y = -10^{-5} (x - 1200)^2 + 14,9. \quad (58)$$

Линии 2 и 3 соответствуют сдвигу линии 1 вверх и вниз соответственно на 2,7 и -6,8.

Недостатком такой аппроксимации является сильное превышение кривой 1 над сплошными точками в области изменения A_I от нуля до 100. Поэтому для сплошных точек можно предложить более близкую аппроксимацию (кривая 4 – точечная линия):

$$y = 1,38 x^{0,4}. \quad (59)$$

Заметный разброс точек, особенно для кривой 3, обусловлен сильной изрезанностью спектра, наглядно видимой на рис.4б1. Тем не менее, возрастающий характер зависимостей с постепенным уменьшением скорости нарастания прослеживается вполне четко. Масштаб по вертикали соответствует абсолютным значениям частоты, то есть частота возбуждения соответствует $\omega = 1$, а частота максимума (сплошная кривая) например при $A_I = 200$ соответствует $\omega = 11$, то есть одиннадцатой гармонике, частота при $A_I = 400$ соответствует $\omega = 14$, то есть четырнадцатой гармонике и так далее.

Важным обстоятельством является тот факт, что увеличение уровня возбуждения приводит не к простому расширению спектра с одновременным увеличением амплитуд как высоких, так и низких гармоник, а к выделению сравнительно узкой полосы (между пунктирными линиями), практически не расширяющейся далее, центр которой (сплошная линия) по мере увеличения уровня возбуждения, сдвигается по частоте вверх.

Отличие от полученных ранее зависимостей, приведенных на рис.8, состоит в заметном их отклонении от линейности, что связано со значительно более широким диапазоном изменения уровня возбуждения. Приведенные на рис.8 зависимости здесь отражают лишь небольшой начальный участок кривых, что однако не умаляет их значения, учитывая их аналитический вывод.

Как отмечено в разделе 13, можно полагать, что более точное аналитическое рассмотрение может быть выполнено на основе представления решения виде

$$x = a_1 \sin(\omega t) + a_3 \sin(3\omega t) + a_5 \sin(5\omega t) + \dots \quad (60)$$

Однако такой путь, даже при ограничении только первыми двумя слагаемыми, приводит к крайне громоздким вычислениям, поэтому авторы оставляют его рассмотрение в качестве отдельной задачи.

18. Амплитуда колебаний при различных уровнях возбуждения

В предыдущих разделах рассмотрены частотные свойства колебаний осцилляторов. Отметим теперь амплитудные свойства колебаний, не обращая внимания на их конкретный характер и диапазон частот.

Обратимся к рис.10 и рис.11, где показаны зависимости амплитуды и производной колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения. Точки – результаты отсчетов по разверткам по времени, подобным приведенным на рис.3. Уровни амплитуд и производных в случае шумового режима отсчитывались по максимуму отклонений (выбросов в ту или иную сторону) в интервале времени от 600 до 1000 единиц. В случае смещения нуля за счет постоянной составляющей (что наблюдалось для $x_{1,2}$), бралась

половина максимального размаха колебаний от плюса до минуса.

На рис.10 приведены зависимости амплитуды колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения A_1 . Сплошные линии построены по аппроксимирующим формулам:

$$y_1 = 0,50 \cdot x^{0,5}; \tag{61}$$

$$y_2 = 1,77 \cdot x^{0,5}. \tag{62}$$

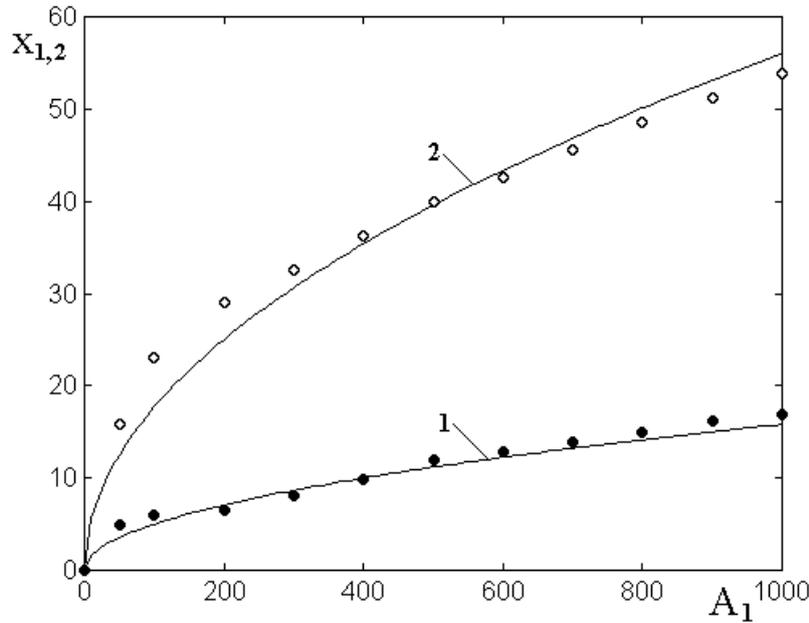


Рис.10. Зависимости амплитуды колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения. Кривая 1 построена по формуле (61), кривая 2 – по формуле (62). Параметры приведены в разделе 9.

Из рисунка видно, что обе зависимости являются нарастающими, однако такое нарастание по мере увеличения возбуждения постепенно замедляется. В соответствии с аппроксимирующими формулами, нарастание можно представить в виде корневой зависимости.

На рис.11 приведены зависимости амплитуд производных колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения A_1 . Сплошные линии построены по аппроксимирующим формулам:

$$y_1 = 3,70 \cdot x^{0,5}; \tag{63}$$

$$y_2 = 1,70 \cdot x^{0,5}. \tag{64}$$

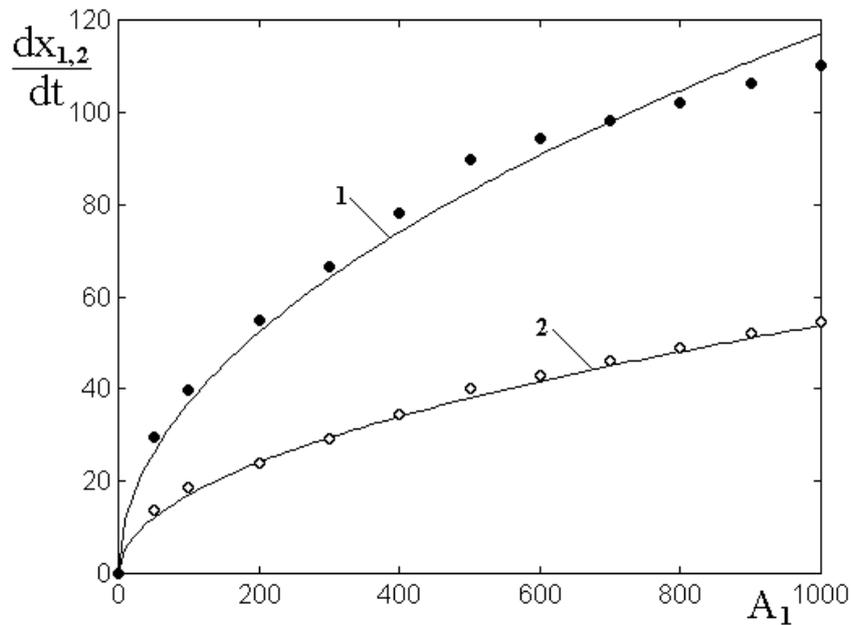


Рис.11. Зависимости амплитуды производных колебаний первого (1) и второго (2) осцилляторов от уровня возбуждения. Кривая 1 построена по формуле (63), кривая 2 – по формуле (64). Параметры приведены в разделе 9.

Из рисунка видно, что и в этом случае обе зависимости являются нарастающими, причем по мере увеличения возбуждения рост их постепенно замедляется. В соответствии с аппроксимирующими формулами, нарастание можно представить в виде корневой зависимости. То есть обе зависимости подобны таковым на рис.10.

19. Иллюстрация влияния кубической нелинейности

Рассмотрим теперь характер наблюдаемых зависимостей более подробно. Прежде всего отметим, что корневой рост резко отличается от прямолинейного нарастания, свойственного системе в отсутствие нелинейности. Покажем, что причиной замедления роста амплитуды первого осциллятора является свойственная ему кубическая нелинейность. Колебания же второго осциллятора возбуждаются за счет колебаний первого, поэтому рост их амплитуды имеет тот же характер, что и для первого.

Для явной демонстрации влияния кубической нелинейности на зависимость амплитуды от уровня возбуждения, обратимся к вспомогательному рис.5. При построении кривых на этом рисунке использованы два вспомогательных уравнения:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \cdot \frac{dx}{dt} + \rho \cdot x = A \cdot \cos \omega t; \quad (65)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \beta \cdot \frac{dx}{dt} + \rho \cdot x + \delta \cdot x^3 = A \cdot \cos \omega t. \quad (66)$$

Оба эти уравнения можно рассматривать как «урезанные» варианты первого уравнения системы (28)-(29), причем в обоих случаях связь со вторым осциллятором отсутствует, то есть колебания первого осциллятора остаются в чистом виде. Первое уравнение является традиционным уравнением вынужденных колебаний, второе отличается от первого наличием слагаемого, пропорционального x^3 , то есть содержит кубическую нелинейность, аналогичную присутствующей в первом уравнении системы (28)-(29).

Первое уравнение решается аналитически методом вариации постоянных [39, 40]. В результате получаются биения между собственными и вынужденными колебаниями, которые по прошествии времени релаксации затухают, в результате чего амплитуда колебаний выходит на стационарное значение. Второе уравнение при произвольном наборе параметров аналитически разрешить не удастся. Аналитический вариант решения одного из частных случаев приведен в [1, стр.303, форм.(12)], однако такое решение хаотических свойств не проявляет. В сложившейся ситуации, для единства рассмотрения оба уравнения будем решать далее только численно методом Рунге-Кутты и проследим за амплитудой колебаний, установившихся после окончания процесса релаксации. В случае хаотических режимов будем регистрировать амплитуду максимальных выбросов, подобно тому, как это было сделано при рассмотрении рис.10.

Обратимся к рис.12, где показаны зависимости амплитуды колебаний от уровня возбуждения для линейного и нелинейного осцилляторов.

Из рисунка можно видеть, что в линейном случае (а) как сама функция x , так и ее производная dx/dt зависят от амплитуды возбуждения A линейно с одним и тем же угловым коэффициентом, равным 20. В нелинейном случае (б)

обе зависимости имеют четко выраженный характер нарастания с постепенным замедлением, с высокой точностью аппроксимации описываемым корневыми зависимостями:

кривая 1:

$$y_1 = 0,50 \cdot x^{0,5}; \quad (67)$$

кривая 2:

$$y_2 = 2,70 \cdot x^{0,5}. \quad (68)$$

Взаимное расположение кривых для функции и производной с точностью до постоянного коэффициента порядка 2 (здесь кривые раздвинуты несколько больше) также совпадает со взаимным расположением кривых 1 на рис.10 и рис.11.

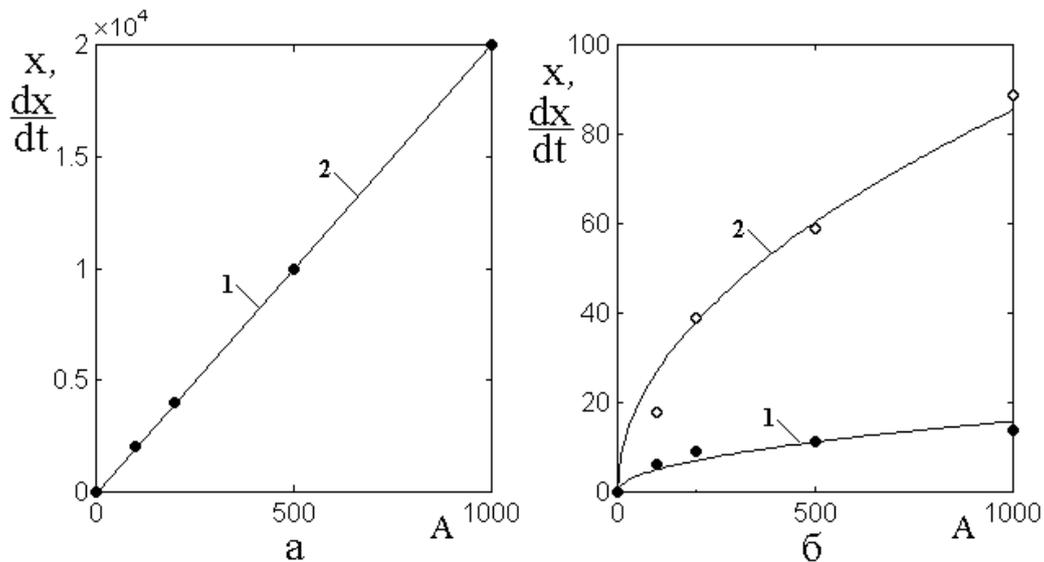


Рис.12. Зависимости амплитуды колебаний от уровня возбуждения для линейного и нелинейного осцилляторов: а – осциллятор линейный, уравнение (65); б – осциллятор нелинейный, уравнение (66). 1 – функция x ; 2 – производная dx/dt . Параметры заданы в разделе 9 (кроме случая (а), где $\delta = 0$).

Таким образом, можно считать, что именно кубическая нелинейность является причиной замедления роста зависимостей функции и ее производной от амплитуды возбуждения. Причиной такого замедления, по-видимому, можно считать то обстоятельство, что переменная, возведенная в третью степень, требует для своей раскачки больше энергии, чем та же переменная в первой

степени, то есть, образно говоря, кубическая нелинейность «отсасывает» на себя часть энергии возбуждения, в результате чего рост амплитуды замедляется. Заметим, что такое утверждение является лишь качественным и на энергетическом уровне требует более подробного рассмотрения, чему авторы предполагают посвятить отдельную работу.

20. Относительное расположение зависимостей для обоих осцилляторов

Обратим теперь внимание на наблюдаемое на рис.10 и рис.11 взаимное расположение отдельных зависимостей для того и другого осцилляторов. На рис.10 кривая 1 для первого осциллятора лежит ниже кривой 2 для второго. С первого взгляда это не вполне очевидно, так как первичным сигналом возбуждается именно первый осциллятор, а на второй возбуждение передается уже от первого, то есть с определенным ослаблением. Однако, как показано выше, замедление роста амплитуды колебаний первого осциллятора вызвано их подавлением за счет его кубической нелинейности. Для второго осциллятора такая нелинейность отсутствует, а все остальные параметры совпадают, поэтому амплитуда его колебаний превышает амплитуду колебаний первого.

На рис.11 приведены не сами функции, а их производные, которые характеризуют изрезанность разверток по времени для $x_{1,2}$. При этом кривая 1 лежит выше кривой 2, так что изрезанность развертки колебаний первого осциллятора выше, чем второго. Можно полагать, что высокая изрезанность развертки первого осциллятора обусловлена его нелинейным характером, тогда как второй осциллятор остается линейным, за счет чего изрезанность его развертки падает. В самом деле, нелинейность первого осциллятора вызывает появление множества гармоник, сложение которых и обеспечивает сильную изрезанность развертки, тогда как линейный характер второго осциллятора обеспечивает определенную «фильтрацию» поступающих на него с первого осциллятора колебаний, в результате чего гармоники подавляются и изрезанность колебаний обеспечивается только частотой возбуждения. Типичный характер изрезанности весьма наглядно иллюстрируется

приведенным выше рис.3, а соответствующие спектры – рис.4, что и объясняет взаимное расположение кривых 1 и 2 на рис.11.

Заключение

Рассмотрены возбуждаемые внешней периодической силой автомодуляционные и хаотические колебания в системе из двух связанных осцилляторов, один из которых содержит кубическую нелинейность, а связь между осцилляторами является квадратичной. Рассмотрение проведено на основе системы из двух связанных дифференциальных уравнений второго порядка колебательного типа, одно из которых содержит члены, характеризующие нелинейность.

Приведены два примера задач, приводящих к такой системе уравнений. Первая – задача о возбуждении мощного гиперзвука в ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. Вторая – задача о возбуждении широкого спектра электромагнитных колебаний шумового характера в ферритовом диске, помещенном в электродинамический резонатор. Для обеих задач приведены основные уравнения и показано, как обе полученные системы сводятся к одной и той же рассматриваемой здесь упрощенной системе уравнений для двух связанных осцилляторов. Отмечено, что большинство нелинейных явлений, наблюдаемых при решении обеих задач в их полном виде, в упрощенной системе сохраняются с высокой степенью точности. Для обоих случаев особо отмечен факт существования и сохранения свойств автомодуляционных и хаотических колебаний, причем рассмотрение упрощенной системы позволяет значительно упростить решение задачи, а также приводит к высокой экономии машинного времени и ресурсов.

В качестве инструмента для анализа колебаний отмечена модель обобщенного потенциала, позволяющая выявить основные свойства автоколебаний магнитоупругой и магнито-электродинамической систем, такие как пороговый характер, роль параметров затухания и нелинейности осцилляторов и связи, переход к стохастическому режиму при большом уровне возбуждения. Отмечены основные положения модели и приведена схема

получения уравнений движения в общем случае двух нелинейных связанных осцилляторов.

На основе оценки сравнительного вклада отдельных слагаемых полных уравнений для обеих задач, получена система из двух укороченных уравнений колебательного типа, первое из которых соответствует магнитному осциллятору, а второе – упругому или электродинамическому. Показано, что первое уравнение такой системы содержит нелинейность третьей степени, а второе остается линейным. Связь между уравнениями в первом уравнении является квадратичной, а во втором – линейной.

Кратко перечислены основные виды и режимы колебаний в такой системе, наблюдавшиеся в предшествующих работах. Отмечено их крайне высокое разнообразие в сочетании с отсутствием систематического выявления основных свойств и механизмов. С целью упорядочения и наблюдения явлений в чистом виде приняты наиболее простые параметры задачи, а именно: равенство собственных частот обоих осцилляторов и равенство этим частотам частоты возбуждения. Параметры нелинейности и связи выбраны такого же порядка, что и упомянутые частоты.

Рассмотрено поведение системы в широком интервале амплитуды возбуждения. Получены развертки колебаний по времени, параметрические портреты для переменной и ее производной, а также спектральные характеристики возбуждаемых колебаний. На примере среднего уровня возбуждения рассмотрено типичное многообразие колебаний. Показано, что в хаотическом режиме развертки по времени для первого осциллятора имеют сильно выраженный шумовой характер, тогда как в колебаниях второго осциллятора основная частота колебаний совпадает с частотой возбуждения, а шумовая составляющая является значительно более слабой. Параметрический портрет для первого осциллятора имеет вид сильно размазанной «горизонтальной восьмерки», а для второго – совокупности нескольких колец, наложенных друг на друга с относительно небольшим сдвигом.

Рассмотрен спектральный состав возбуждаемых колебаний. Показано, что для первого осциллятора спектр как смещения осциллятора, так и его производной, имеет вид нескольких (двух-трех) широких сильно изрезанных полос с явно выраженным максимумом на середине полосы, причем преобладающими являются колебания на основной частоте и особенно на ее третьей гармонике. Для второго осциллятора спектр колебаний смещения и производной имеет хорошо упорядоченный вид вблизи основной частоты возбуждения. Наблюдается одна узкая линия на самой этой частоте, сопровождаемая небольшим сателлитом, расположенным по частоте несколько ниже основной линии. Отмечено, что бедность спектра второго осциллятора по сравнению со спектром первого обусловлена линейностью второго осциллятора, существенно отличающей его от сильно нелинейного первого осциллятора.

На основе анализа параметрических портретов и спектров колебаний выполнена классификация их основных режимов, наблюдаемых в широком диапазоне амплитуд возбуждения. Показано, что все разновидности возбуждаемых колебаний можно классифицировать на основе всего двух основных режимов, задаваемых первым осциллятором. При этом роль второго является подчиненной, как бы «балластной», то есть возвращает первому осциллятору то, что получает от него в предыдущих циклах колебаний. Выявлены следующие два режима: Режим №1: мультигармонический регуляризованный. Параметрический портрет имеет четко очерченные повторяющиеся траектории, спектр колебаний содержит только гармоники, кратные частоте возбуждения. Режим №2: мультигармонический квазихаотический. Параметрический портрет сильно размазан, траектории не повторяются, спектр колебаний, кроме гармоник, кратных частоте возбуждения, содержит множество промежуточных частот. Показано, что по мере увеличения амплитуды возбуждения, начиная с регулярного, имеет место чередование регулярного и квазихаотического режимов.

Выполнена модельная имитация формирования параметрического портрета. Показано, что образование «горизонтальной восьмерки» параметрического портрета обусловлено наличием в спектре колебаний нечетных гармоник высоких порядков, начиная с третьего и далее.

Выполнено аналитическое рассмотрение свободных колебаний, описываемых уравнением, содержащим вторую производную в сочетании с переменной в третьей степени, отражающей кубическую нелинейность. Показано, что частота свободных колебаний такой системы пропорциональна их амплитуде, задаваемой начальным смещением. Отмечено, что наличие в структуре уравнения для первого осциллятора полной системы члена с третьей степенью, по мере увеличения возбуждения также должно вызывать увеличение частоты собственных колебаний, то есть выделение гармоник со все возрастающими номерами.

Рассмотрены области формирования хаотического режима при различных уровнях возбуждения для трех основных случаев: первый – отсутствие связи между осцилляторами, второй – наличие линейной связи и третий – наличие квадратичной связи. Показано, что в отсутствие связи области хаотического и регулярного режимов чередуются в почти правильном порядке, тенденция к сгущению или разрежению областей не заметна. Увеличение уровня возбуждения приводит к постепенному росту номеров возбуждаемых гармоник. В случае линейной связи характер чередования областей того и другого режимов, в общем, сохраняется, однако наблюдается растяжение всей картины в сторону больших значений возбуждения. То есть здесь второй осциллятор играет как бы «балластную» роль, так что отсасывает на себя часть энергии возбуждения, в определенной степени затрудняя возбуждение первого осциллятора. В случае квадратичной связи чередование областей различных режимов не наблюдается. Начиная с довольно низкого уровня возбуждения колебания приобретают хаотический характер и регуляризация далее не происходит. Второй осциллятор не является «балластом», а активно участвует в формировании режимов, повышая уровень нелинейности колебаний в целом.

Рассмотрены зависимости номеров возбуждаемых гармоник при увеличении уровня возбуждения. При небольшом и среднем уровне возбуждения отмечен близкий к линейному рост номера гармоник, что соответствует выполненному ранее аналитическому рассмотрению. Однако при высоком уровне возбуждения рост номера гармоник замедляется, приближаясь к степенной зависимости с показателем около 0,4. Выявлен критерий формирования хаотического режима. Показано, что главной причиной формирования хаоса является последовательная смена гармоник по мере увеличения возбуждения. То есть, пока преобладающей является какая-то одна гармоника, хаотическая составляющая колебаний выражена слабо, однако в тот момент, когда на смену ей приходит другая следующая по номеру гармоника, хаотическая составляющая резко возрастает, а после установления колебаний на новой гармонике хаотическая составляющая снова падает.

Рассмотрена амплитуда колебаний при различном уровне возбуждения. Отмечена тождественность зависимостей, определяемых по максимуму амплитуды, как в регулярном, так и в хаотическом режимах. Показано, что по мере увеличения уровня возбуждения амплитуда колебаний возрастает, однако в отличие от линейного случая, где такой рост является линейным прямо пропорциональным уровню возбуждения, здесь рост амплитуды следует зависимости корневого типа. На примере уравнения для первого осциллятора в отсутствие связи показано, что причиной замедления роста амплитуды его колебаний является кубическая нелинейность. То есть кубическая составляющая требует для своей раскачки больше энергии, чем линейная, вследствие чего рост амплитуды замедляется. Колебания второго осциллятора возбуждаются за счет колебаний первого, причем второй осциллятор является линейным, поэтому рост амплитуды его колебаний имеет тот же корневой характер, что и для первого.

Работа выполнена в рамках государственного задания.

Литература

1. Карлов Н.В., Кириченко Н.А. Колебания, волны, структуры. М.: Физматлит. 2003.
2. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З. Введение в нелинейную физику. М.: Наука. 1988.
3. Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.:Наука-Физматлит. 2000.
4. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит. 2001.
5. Дмитриев А.С., Панас А.И. Динамический хаос: новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
6. Дмитриев А.С., Ефремова Е.В., Максимов Н.А., Панас А.И. Генерация хаоса. М.: Техносфера. 2012.
7. Станкевич Н.В., Попова Е.С., Кузнецов А.П., Селезнев Е.П. Широкополосные хаотические колебания в слабосвязанном ансамбле автоколебательных осцилляторов. // Письма в ЖТФ. 2019. Т.45. №24. С.17.
8. Моносов Я.А. Нелинейный ферромагнитный резонанс. М.: Наука. 1971.
9. Львов В.С. Нелинейные спиновые волны. М.: Наука. 1987.
10. Вейсс М. Сверхвысокочастотные и низкочастотные колебания, вызванные нестабильностью резонанса в ферритах. // В кн.: Ферриты в нелинейных сверхвысокочастотных устройствах. Сборник статей по ред. А.Г.Гуревича. М.: ИЛ. 1961. С.281.
11. Щеглов В.И., Шавров В.Г., Зубков В.И., Власов В.С., Котов Л.Н. Автомодуляционный режим нелинейных вынужденных колебаний намагниченности феррита в резонаторе. // Сборник трудов XII Международной конференции «Магнетизм, дальнее и ближнее спин-спиновое взаимодействие». Москва-Фирсановка: Издание МЭИ. 2009. С.100.
12. Щеглов В.И. Стохастическая неустойчивость траекторий поверхностных магнитостатических волн в поле типа «вала» с пространственной модуляцией. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2014. №10. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/oct14/1/text.pdf>.

13. Ле-Кроу Р., Комсток Р. Магнитоупругие взаимодействия в ферромагнитных диэлектриках. // В кн.: У. Мэзон (ред.): Физическая акустика. Т.3Б. Динамика решетки. М.: Мир. 1968. С.156.
14. Моносов Я.А., Сурин В.В., Щеглов В.И. Возбуждение резонансных упругих колебаний при нелинейном ферромагнитном резонансе. // Письма в ЖЭТФ. 1968. Т.7. №9. С.315.
15. Зубков В.И., Моносов Я.А., Щеглов В.И. Спиновый эффект Мандельштама-Бриллюэна. // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т.13. №5. С.229.
16. Власов В.С., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нелинейное возбуждение гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. // РЭ. 2009. Т.54. №7. С.863.
17. Власов В.С., Иванов А.П., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в системе двух связанных осцилляторов, один из которых является гиромагнитным. // Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2012. С.248.
18. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ линейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2013. №11. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/nov13/3/text.pdf>.
19. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Автоколебания в нормально намагниченной ферритовой пластине, обладающей магнитоупругими свойствами. // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: НИУ МЭИ. 2013. С.188.
20. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа работы магнитострикционного преобразователя. // Сборник трудов XXI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: «НИУ МЭИ». 2013. С.199.

21. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ нелинейного возбуждения гиперзвуковых колебаний магнитострикционного преобразователя на основе модели связанных осцилляторов в квадратичном приближении. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2014. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan14/11/text.pdf>.
22. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ колебаний в ферритовой пластине с магнитоупругими свойствами на основе модели квадратичного приближения. // Материалы XXIII Всероссийской конференции «Электромагнитное поле и материалы». Москва: ИНФРА-М. 2015. С.202.
23. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 1. Основные уравнения. // РЭ. 2015. Т.60. №1. С.79.
24. Власов В.С., Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение модели связанных осцилляторов для анализа нелинейного возбуждения гиперзвука в ферритовой пластине при ферромагнитном резонансе. Часть 2. Некоторые нелинейные явления. // РЭ. 2015. Т.60. №3. С.297.
25. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных колебаний в магнитоупругой среде на основе модели связанных магнитного и упругого осцилляторов. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №5. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/may15/4/text.pdf>.
26. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Анализ автомодуляционных явлений в системе связанных магнитного и упругого осцилляторов на основе модели потенциала. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2015. №6. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jun15/9/text.pdf>.
27. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 1. Динамический потенциал. Электронный «Журнал

радиоэлектроники». 2017. №7. Режим доступа:
<http://jre.cplire.ru/jre/jul17/6/text.pdf>.

28. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 2. Линейная связь. // Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/5/text.pdf>.
29. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Нестационарное запаздывание возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. Часть 3. Нелинейная связь. Электронный «Журнал радиоэлектроники». 2017. №8. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/aug17/6/text.pdf>.
30. Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Динамический потенциал как модель нестационарного запаздывания возбуждения магнитоупругих колебаний в режиме умножения частоты. // Сборник трудов XXVI Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы (фундаментальные физические исследования». М.: ИНФРА-М. 2018. С.243-253.
31. Красюк Н.П., Дымович Н.Д. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Высшая школа. 1974.
32. Никольский В.В, Никольская Т.И. Электродинамика и распространение радиоволн. М.: Наука. 1989.
33. Гуревич А.Г. Ферриты на сверхвысоких частотах. М.: Гос.Изд.физ.-мат.лит. 1960.
34. Гуревич А.Г. Магнитный резонанс в ферритах и антиферромагнетиках. М.: Наука. 1973.
35. Гуревич А.Г., Мелков Г.А. Магнитные колебания и волны. М.: Физматлит. 1994.
36. Gilbert T.L. A phenomenological theory of damping in ferromagnetic materials. // IEEE Trans. on Magn., 2004, v.40, №6, p.3443-3449.
37. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972.

38. Будак Б.М., Фомин С.В. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука. 1965.
39. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.,Л.: ОГИЗ. Гос. изд. техн.-теор. лит. 1945.
40. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. М.: Наука. 1965.

Для цитирования:

Иванов А.П., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Вынужденные колебания в системе из двух связанных осцилляторов в условиях кубической нелинейности и квадратичной связи. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2020. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.8.7>