

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.8.11>

УДК: 621.396.018.424

ОПТИМИЗАЦИЯ ДВОИЧНЫХ ГРУППОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ НЕЛИНЕЙНОГО КОДОВОГО УПЛОТНЕНИЯ

О. Ю. Бердышев

Федеральное государственное бюджетное учреждение «16 Центральный научно-исследовательский испытательный ордена Красной Звезды институт имени маршала войск связи А.И. Белова» Министерства обороны Российской Федерации, 141006, Московская обл., г Мытищи, ул. Комарова 5

Статья поступила в редакцию 19 августа 2021 г.

Аннотация. В статье рассмотрена задача оптимизации двоичных групповых последовательностей, полученных в результате нелинейного кодового уплотнения. Показано, что при оптимальном поэлементном приеме групповых последовательностей в полной системе ортогональных последовательностей Уолша критерий максимума минимального расстояния между групповыми последовательностями равносильен критерию максимума минимального корреляционного отклика на информационные ортогональные последовательности Уолша, которые содержат групповые последовательности. После нелинейного кодового уплотнения групповые последовательности часто содержат ошибки, которые затрудняют применение этого способа уплотнения. Для устранения таких ошибок предложен алгоритм оптимизации групповых последовательностей, который заключается в замене некоторых элементов групповых последовательностей на противоположные элементы. Дополнительно разработан алгоритм приема в целом групповой последовательности среди ближайших групповых последовательностей, который значительно повышает помехоустойчивость приема групповой последовательности относительно поэлементного приема в полной системе ортогональных последовательностей Уолша.

Ключевые слова: нелинейное кодовое уплотнение, групповая последовательность, ортогональные последовательности Уолша, спектральные коэффициенты, корреляционный отклик, поэлементный прием, алгоритм оптимизации.

Abstract. This paper presents the challenge of optimization of binary group sequences obtained from the nonlinear code multiplexing. It shows that at optimal element wise methodology for group sequences in a full system of orthogonal Walsh functions, a maximum criterion for the minimum distance of group sequences is equal to a maximum criterion for the minimum correlation response for the information orthogonal Walsh functions which contain group sequences. After a nonlinear code multiplexing group sequences are often contained errors, that makes using this method of multiplexing more difficult. To eliminate this source of errors the algorithm of optimization of group sequences was suggested. In this algorithm some elements of group sequences can be replaced with the opposite elements. Additionally, the algorithm of receiving of the entire group sequence among the nearest group sequences was developed. This algorithm provides considerable increasing of immunity while group sequence receiving unlike the other algorithm of element-to-element receiving in a full system of orthogonal Walsh functions.

Key words: nonlinear code multiplexing, group sequence, orthogonal Walsh functions, spectral coefficients, correlation response, element-to-element receiving, optimization algorithm.

Рассматривается задача формирования подмножества \hat{Z}^J двоичных групповых последовательностей $Z_l(t)$ длиной N , где $J < N$, с максимальным евклидовым расстоянием между ними [1-5] при поэлементном приеме, элементами которого являются последовательности из полной системы двоичных ортогональных последовательностей длиной N , например Уолша [6 - 9].

$$\hat{Z}^J = \{Z_l(t)\}_{l=1, \dots, J}, (1)$$

$$Z_l(t) = \sum_{i=0}^{N-1} z_{l,i} \tau(t - i\Delta), (2)$$

где $Z_{l,i} = \pm 1$ (3) – i -й элемент последовательности $Z_l(t)$, $\tau(t)$ – прямоугольный импульс (чип) длительности Δ .

Любая двоичная последовательность $Z_l(t)$ длиной N может быть разложена [1, 6] по полной системе ортогональных двоичных последовательностей Уолша длиной N :

$$Z_l(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \eta_{l,n} W_n(t), \quad (4)$$

где $W_n(t)$ – n -я ортогональная последовательность Уолша из полной системы ортогональных последовательностей Уолша $\{W_n(t)\}_{n=0, N-1}$, η_{nl} – n -й спектральный коэффициент разложения $Z_l(t)$ по полной системе двоичных последовательностей Уолша,

$$W_n(t) = \sum_{i=0}^{N-1} w_{n,i} \tau(t - i\Delta), \quad (5)$$

где $w_{n,i} = \pm 1$ (6), – i -й элемент последовательности $W_n(t)$.

Из (2, 4–6), а также используя ортогональность двоичных последовательностей Уолша, рассчитаем корреляционный отклик $Z_l(t)$ на n -ю ортогональную последовательность Уолша:

$$\sum_{i=0}^{N-1} z_{l,i} w_{n,i} \tau(t - i\Delta) = N\eta_{nl}. \quad (7)$$

Используя ортогональность двоичных последовательностей Уолша, рассчитаем энергию E двоичной последовательности длиной N :

$$\sum_{n=0}^{N-1} \eta_{l,n}^2 W_n^2(t) = N. \quad (8)$$

Представим спектральные коэффициенты разложения двоичной последовательности $Z_l(t)$ по полной ортогональной системе Уолша в виде:

$$\eta_{l,n} = B_{l,n} b_{l,n}, \quad (9)$$

где $B_{l,n} = \begin{cases} 1, & \text{при } \eta_{l,n} > 0, \\ -1, & \text{при } \eta_{l,n} < 0, \end{cases}$ (10) – знак спектрального коэффициента $\eta_{l,n}$,

$b_{l,n} = \eta_{l,n}/B_{l,n}$ (11) – амплитуда спектрального коэффициента $\eta_{l,n}$.

Из (9)–(11) следует, что $b_{l,n} \geq 0$. В дальнейшем будем считать $B_{l,n}$ – информационными сигналами, которые необходимо передать. Двоичные последовательности, передающие эти информационные сигналы назовем групповыми последовательностями (ГП).

ГП $Z_l(t)$ представим в виде:

$$Z_l(t) = \sum_{n=0}^{N-1} B_{l,n} b_{l,n} W_n(t), \quad (12)$$

Из (7) – (9) получим:

$$\sum_{n=0}^{N-1} b_{l,n}^2 = 1. \quad (13)$$

Квадрат евклидоваго расстояния между любыми двумя двоичными последовательностями $Z_l(t)$ и $Z_k(t)$ с учетом (8) и ортогональности последовательностей Уолша можем записать в виде:

$$D_{l,k}^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} (B_{l,n} b_{l,n} - B_{k,n} b_{k,n})^2. \quad (14)$$

В качестве показателя оптимальности подмножества \hat{Z}^J применяют квадрат максимума минимального расстояния [4, 5] между любыми двоичными последовательностями $Z_l(t)$ и $Z_k(t)$ из подмножества \hat{Z}^J

$$\min_{l \neq k} D_{l,k}^2 \Rightarrow \max. \quad (15)$$

Любая двоичная последовательность $Z_l(t)$ однозначно определяется множеством информационных сигналов B_l и множеством амплитуд спектральных коэффициентов b_l :

$$B_l = \{B_{l,n}\}_{n=0, N-1}, \quad (16)$$

$$b_l = \{b_{l,n}\}_{n=0, N-1}. \quad (17)$$

Информационное множество B_l может быть получено при корреляционном приеме ГП $Z_l(t)$ в базе последовательностей Уолша с жестким принятием решения по каждому информационному сигналу $B_{l,n}$, соответствующему n -й последовательности Уолша. Это поэлементный прием, элементами которого являются информационные сигналы $B_{l,n}$, передаваемые последовательностями Уолша $\{W_n(t)\}_{n=0, N-1}$.

Проведенное компьютерное моделирование показало, что при количестве информационных сигналов $J = N$ невозможно установить однозначное соответствие:

$$\{B_l\}_{l=1, \dots, 2^N} \Leftrightarrow \{Z_l(t)\}_{l=1, \dots, 2^N}. \quad (18)$$

Однако, при количестве информационных сигналов $J < N/3$ возможно построить подмножество двоичных последовательностей \hat{Z}^J , для которого устанавливается однозначное соответствие:

$$\{B_l\}_{l=1,\dots,2^J} \Leftrightarrow \{Z_l(t)\}_{l=1,\dots,2^J}. \quad (19)$$

Причем передавать информационные сигналы возможно как на отдельных последовательностях Уолша, так и на α последовательностях Уолша. При передаче j -го информационного сигнала $B_{l,j}$ на α последовательностях Уолша, входящих в j -е подмножество номеров последовательностей Уолша \bar{A}_j выполняется условие:

$$B_{l,n \in \bar{A}_j} = B_{l,j}. \quad (20)$$

Рассмотрим вариант ближайших между собой ГП $Z_l(t)$ и $Z_k(t)$, при которых подмножества номеров последовательностей Уолша $\{\bar{A}_j\}_{j=1,\dots,J}$ являются непересекающимися и минимальное различие между этими двумя ГП из подмножества \hat{Z}^J составляет α номеров последовательностей Уолша.

Запишем квадрат евклидова расстояния (14) для двух ближайших между собой ГП $Z_l(t)$ и $Z_k(t)$ в виде трех слагаемых:

$$D_{l,k}^2 = N(\sum_{n \in \bar{A}_j}^\alpha (b_{l,n} + b_{k,n})^2 + \sum_{n \in \bar{A}_m} (b_{l,n} - b_{k,n})^2 + \sum_{n \notin \bar{A}_m, \bar{A}_j} (\eta_{l,n} - \eta_{k,n})^2), \quad (21)$$

$$\text{при } m \neq j, b_{l,n} \geq 0, b_{k,n} \geq 0. \quad (22)$$

В первом слагаемом объединены α амплитуд спектральных коэффициентов $b_{l,n}$ и $b_{k,n}$, для которых информационные сигналы противоположны $B_{l,n \in \bar{A}_j} = -B_{k,n \in \bar{A}_j}$. Во втором слагаемом объединены амплитуды спектральных коэффициентов $b_{l,n}$ и $b_{k,n}$, для которых информационные сигналы равны $B_{l,n \notin \bar{A}_j} = B_{k,n \notin \bar{A}_j}$. В третьем слагаемом объединены спектральные коэффициенты $\eta_{l,n}$ и $\eta_{k,n}$ ортогональных последовательностей, которые не используются для передачи информационных сигналов, поэтому они могут иметь как одинаковые, так и противоположные знаки, а также равняться 0.

Обозначим:

$$N \sum_{n \in \bar{A}_j}^\alpha b_{l,n}^2 = E_{l,j}, \quad (23)$$

где $E_{l,j}$ – энергия, задействованная для передачи информационного сигнала $B_{l,j}$ в ГП $Z_l(t)$.

При поэлементном приеме ГП $Z_l(t)$ для отличия ее от ближайшей к ней ГП $Z_k(t)$ необходимо принять только информационный сигнал $B_{l,n \in \bar{A}_j}$, которыми они различаются. Аналогично, при поэлементном приеме ГП $Z_k(t)$ для отличия ее от ближайшей к ней ГП $Z_l(t)$ необходимо принять только отличающий их информационный сигнал $B_{k,n \in \bar{A}_j}$. Следовательно, для различения $Z_l(t)$ и $Z_k(t)$ при поэлементном приеме используется только первое слагаемое в (21). Поэтому в качестве критерия оптимальности при поэлементном приеме любой ГП $Z_l(t)$ для отличия ее от любых других ГП $Z_k(t)$ достаточно применить максимизацию первого слагаемого в (21), выбрав минимум из всех $j = 1, J$, при условии (22).

Выделим первое слагаемое в (21):

$$\mathcal{D}_{l,k,j}^2 = N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} (b_{l,n} + b_{k,n})^2, \quad (25)$$

$$\text{при } b_{l,n} \geq 0, b_{k,n} \geq 0. \quad (26)$$

Следовательно, критерий оптимальности системы групповых последовательностей для поэлементного приема при условии (26) примет вид:

$$\min_{l \neq k, j=1, J} \mathcal{D}_{l,k,j}^2 \Rightarrow \max. \quad (27)$$

Из (25) при условии (26) видно, что $\mathcal{D}_{l,k,j}^2$ является непрерывной дифференцируемой функцией [2, 3] относительно ее аргументов $b_{l,n}$ и $b_{k,n}$.

Вычислим условные экстремумы функции (25) при условии (26) для всех $l \neq k, j = 1, J$. Система функций Лагранжа [2, 3] для (25) с учетом (23), (24):

$$L_j = N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} (b_{l,n} + b_{k,n})^2 + \gamma_{l,j} (N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2 - E_{l,j}) + \gamma_{k,j} (N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{k,n}^2 - E_{k,j}), \quad (28)$$

где $n \in \bar{A}_j, j = 1, J, l \neq k, b_{l,n} \geq 0, b_{k,n} \geq 0$.

Приравниваем нулю производные (28) по $b_{l,n}, b_{k,n}, \gamma_{l,j}, \gamma_{k,j}$. Получим системы уравнений для всех $n \in \bar{A}_j, j = 1, J, l \neq k$:

$$\frac{\partial L_j}{\partial b_{l,n}} = 2(b_{l,n} + b_{k,n}) + 2\gamma_{l,j} b_{l,n} = 0, \quad (29)$$

$$\frac{\partial L_j}{\partial b_{k,n}} = 2(b_{l,n} + b_{k,n}) + 2\gamma_{k,j} b_{k,n} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{\partial L_j}{\partial \gamma_{l,j}} = \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2 - E_{l,j}/N = 0, \quad (31)$$

$$\frac{\partial L_j}{\partial \gamma_{k,j}} = \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{k,n}^2 - \frac{E_{k,j}}{N} = 0. \quad (32)$$

Из (29) получим: $b_{k,n} = -(\gamma_{l,j} + 1)b_{l,n}$. (33)

Из (30) получим: $b_{l,n} = -(\gamma_{k,j} + 1)b_{k,n}$. (34)

Подставим (33) в (32): $(\gamma_{l,j} + 1)^2 \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2 = E_{k,j}/N$, при $n \in \bar{A}_j$, (35)

Учитывая (23): $(\gamma_{l,j} + 1)^2 = E_{k,j}/E_{l,j}$, корни этого квадратного уравнения:

$$\gamma_{l,j} = \pm \sqrt{E_{k,j}/E_{l,j}} - 1. \quad (36)$$

Подставим (36) в (33): $b_{k,n} = \pm \sqrt{E_{k,j}/E_{l,j}} b_{l,n}$. (37)

Поскольку $b_{l,n} \geq 0$ и $b_{k,n} \geq 0$, то системы уравнений (29 – 32) будут иметь единственное ненулевое решение, которое дает максимум в (25):

$$b_{k,n} = +\sqrt{E_{k,j}/E_{l,j}} b_{l,n}, \quad (38)$$

где $n \in \bar{A}_j$, $l \neq k$, $j = 1, J$.

Входящее в (37), нулевое решение говорит о том, что n - я последовательность Уолша не используется в $Z_l(t)$ и $Z_k(t)$:

$$b_{k,n} = b_{l,n} = 0. \quad (39)$$

Подставим (38) в (25):

$$D_{l,k,j}^2 = N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2 (1 + \sqrt{E_{k,j}/E_{l,j}})^2, \quad (40)$$

где $b_{l,n} \geq 0$, $l \neq k$, $j = 1, J$.

Очевидно, оптимальным является пропорциональное выделение энергии ГП $Z_l(t)$ для каждого из информационных сигналов $\{B_{l,j}\}_{j=1,J}$ на передаче:

$$E_{l,j} \approx \frac{N}{J}. \quad (41)$$

Аналогично для ГП $Z_k(t)$:

$$E_{k,j} \approx \frac{N}{J}. \quad (42)$$

Из (40) при условии (41), (42) критерий оптимизации подмножества ГП \hat{Z}_j при поэлементном приеме (27) примет вид:

$$\min_{l,j} \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2 \Rightarrow \max, \quad (43)$$

где $b_{l,n} \geq 0$, $j = 1, J$.

Из (43) следует, что критерий оптимизации подмножества ГП \hat{Z}_J для поэлементного приема ГП равносильна текущей оптимизацией по критерию (43) каждой ГП $Z_l(t)$ независимо от других ГП, что существенно облегчает задачу оптимизации всего подмножества ГП \hat{Z}_J .

В случае $\alpha = 1$ критерий (43) преобразуется в линейный критерий оптимизации:

$$\min_{l,j=1,J} b_{l,j} \rightarrow \max. \quad (44)$$

Формирование групповых последовательностей происходит в 2 этапа: формирование начальных ГП, оптимизация начальных ГП по критерию оптимизации (43).

В [10 - 14] при $\alpha = 1$ начальные двоичные групповые последовательности $\dot{Z}_l(t)$ формируются ограничением суммарной групповой последовательности по уровням ± 1 . Этот способ известен как нелинейное кодовое уплотнение каналов [11, 12]. Запишем начальную двоичную групповую последовательность $\dot{Z}_l(t)$:

$$\dot{Z}_l(t) = \sum_{j=1}^J B_{l,j} \sum_{n \in \bar{A}_j}^\alpha b_{l,n} W_n(t). \quad (45)$$

В [10, 13, 14] показано, что начальная ГП (45) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_l(t) = & \rho_1 \sum_{n_1}^{n_J} B_{l,n_1} W_{n_1}(t) + \rho_3 \sum_{n_j \neq n_\gamma \neq n_\varepsilon}^3 B_{l,n_j} W_{n_j}(t) B_{l,n_\gamma} W_{n_\gamma}(t) B_{l,n_\varepsilon} W_{n_\varepsilon}(t) + \\ & + \dots + \rho_J B_{l,n_1} W_{n_1}(t) B_{l,n_2} W_{n_2}(t) \dots B_{l,n_J} W_{n_J}(t). \quad (46) \end{aligned}$$

Поскольку полная система последовательностей Уолша является абелевой группой относительно операции умножения [6, 7], то произведение последовательностей Уолша дает снова последовательность Уолша. Поэтому (46) фактически представляет собой разложение полученной начальной групповой последовательности $\dot{Z}_l(t)$ по полной системе последовательностей Уолша. Амплитуды спектральных коэффициентов ρ_ϑ [14]:

$$\rho_\vartheta = 2^{1-J} \left[(-j)^{\vartheta-1} \frac{(\vartheta-1)! \left(\frac{J-\vartheta}{2}\right)!}{\left(\frac{J-1}{2}\right)! \left(\frac{\vartheta-1}{2}\right)!} \left(\frac{J-\vartheta}{2}\right) \right], \quad (47)$$

где j – мнимая единица, ϑ – нечетное число.

Все последовательности Уолша, передающие информационные сигналы B_{l,n_j} , входят в первое слагаемое ГП $\dot{Z}_l(t)$ (46) с амплитудами спектральных коэффициентов ρ_1 :

$$\rho_1 = 2^{1-J} \binom{J-1}{\frac{J-1}{2}}. \quad (48)$$

При больших J амплитуды спектральных коэффициентов (48) вычисляются по приближенной формуле [14]:

$$\rho_1 \approx \sqrt{\frac{2}{\pi J}}. \quad (49)$$

Расчеты начальных двоичных ГП при $\alpha = 1$ по формулам (46, 47) показали, что слагаемые с ρ_ϑ , при $\vartheta > 1$, часто вновь дают последовательности Уолша, на которых передаются информационные сигналы. Это вызывает нелинейные искажения вплоть до появления ошибок при передаче некоторых информационных сигналов. Поэтому на этапе оптимизации ГП необходимо проводить оптимизацию начальных групповых последовательностей.

Кроме того, компьютерное моделирование показало, что если для передачи каждого вектора информации используется несколько последовательностей Уолша, то часто случается, что в начальных ГП условие $b_{l,n} \geq 0$ не всегда выполняется и некоторые $b_{l,n} < 0$. В этом случае условия для критерия оптимизации (43) не выполняются, и поэтому рассмотрим этот случай отдельно.

Корреляционный отклик (7) ГП на n -ю ортогональную последовательность Уолша:

$$\sum_{i=0}^{N-1} z_{l,i} w_{n,i} = NB_{l,n} b_{l,n}. \quad (50)$$

Учитывая, что при $\alpha > 1$ и $n \in \bar{A}_j$ информационные сигналы $B_{l,n \in \bar{A}_j} = B_{l,j}$, нормированный к длине N суммарный корреляционный отклик ГП $Z_l(t)$ на сумму ортогональных последовательностей Уолша с α номерами $n \in \bar{A}_j$ будет равен:

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} z_{l,i} w_{n,i} = B_{l,j} \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}. \quad (51)$$

Из (51) следует, что для достоверной передачи каждого из информационных сигналов $B_{l,j}$ необходимо, чтобы в передающем устройстве при формировании $Z_l(t)$ для всех $j = 1, J$ выполнялось условие:

$$\sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n} > 0. \quad (52)$$

На Рис. 1 представлен вариант принятия решения в приемнике для случая $\alpha = 2$, т. е. когда в передающем устройстве для передачи информационного сигнала $B_{l,j} = -1$ используется сумма двух ортогональных последовательностей Уолша:

$$A_j(t) = W_n(t) + W_\varepsilon(t). \quad (53)$$

Ортогональные последовательности Уолша на Рис. 1 представлены: $W_n(t)$ на оси абсцисс и $W_\varepsilon(t)$ на оси ординат. Нормированные к длине N корреляционные отклики ГП $Z_l(t)$ на последовательности Уолша $W_n(t)$ и $W_\varepsilon(t)$, равны $B_{l,j}b_{l,n}$ и $B_{l,j}b_{l,\varepsilon}$. Разделим плоскость прямой (54) на две области решений: $B_{l,j} = 1$ и $B_{l,j} = -1$:

$$W_n(t) + W_\varepsilon(t) = 0. \quad (54)$$

Из рис.1 следует, что в корреляционном приемнике должно быть принято решение $B_{l,j} = -1$. Разделив нормированные корреляционные отклики $B_{l,j}b_{l,n}$ и $B_{l,j}b_{l,\varepsilon}$ на передаваемый информационный коэффициент $B_{l,j} = -1$, получим точку с координатами $(b_{l,n}, b_{l,\varepsilon})$, причем $b_{l,n} < 0$, $b_{l,\varepsilon} > 0$. Рассмотрим отклонение $\beta_{l,j}$ точки $(b_{l,n}, b_{l,\varepsilon})$ от границы принятия решений (54). При вычислении отклонения используется формула для расчета расстояния [2, 3] от прямой (54) до точки $(b_{l,n}, b_{l,\varepsilon})$, но знак отклонения определяется суммой амплитуд спектральных коэффициентов $b_{l,n}, b_{l,\varepsilon}$:

$$\beta_{l,j} = \frac{1}{\sqrt{2}}(b_{l,n} + b_{l,\varepsilon}). \quad (55)$$

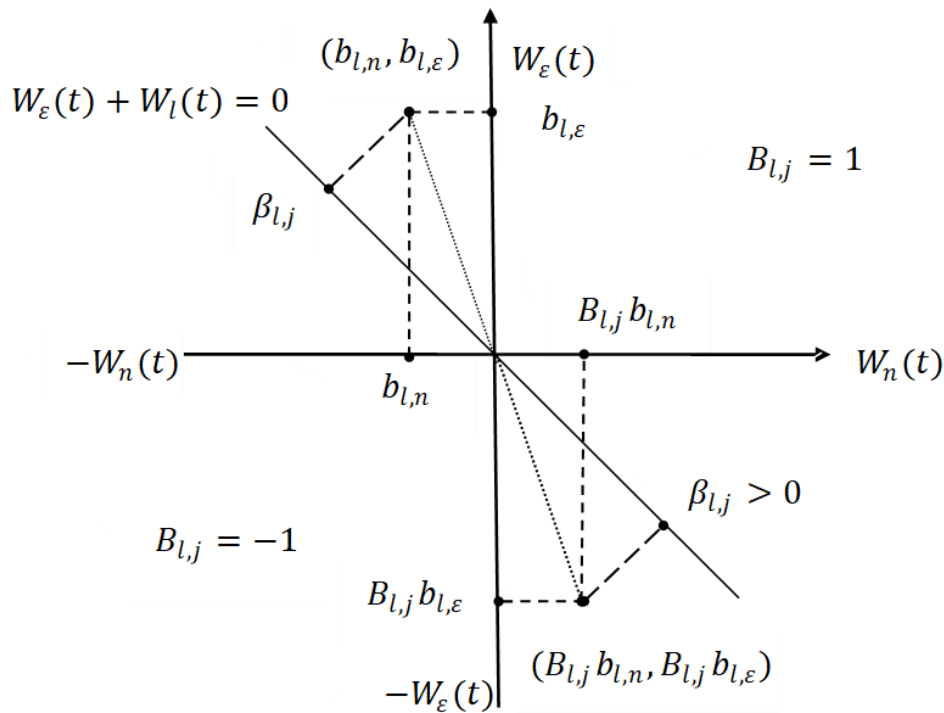


Рис. 1. Вариант принятия решения в приемнике по сумме нормированных корреляционных откликов при поэлементном приеме в пространстве ортогональных последовательностей Уолша.

Таким образом, отклонение $\beta_{l,j}$ является взвешенной суммой соответствующих амплитуд спектральных коэффициентов в приемнике на ГП $Z_l(t)$. Причем, отклонение $\beta_{l,j}$ может быть как положительным, так и отрицательным.

Из Рис. 1 следует, что если в передающем устройстве обеспечено необходимое условие достоверной передачи $B_{l,j}$, то отклонение $\beta_{l,j} > 0$ фактически является расстоянием от нормированного суммарного корреляционного отклика (51) до границы принятия решения (55) в приемнике. Соответственно, увеличение расстояния $\beta_{l,j}$ ведет к росту помехоустойчивости при приеме $B_{l,j}$.

Если $(b_{l,n} + b_{l,\varepsilon}) \leq 0$ и, соответственно отклонение $\beta_{l,j} \leq 0$, то в этом случае в передающем устройстве формируется ГП $Z_l(t)$, которая передает ошибочный информационный сигнал $-B_{l,j}$ или 0 вместо $B_{l,j}$.

Обобщим принятие решения при $\alpha > 2$. Для передачи информационного сигнала $B_{l,j}$ используется сумма из α последовательностей Уолша:

$$A_j(t) = \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} W_n(t). \quad (57)$$

Аналогично $\alpha = 2$ можно показать, что в этом случае область принятия решения в пространстве размерностью $\alpha \geq 3$ делится на две области решений $B_{l,j} = 1$ и $B_{l,j} = -1$ гиперплоскостью:

$$\sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} W_n(t) = 0. \quad (58)$$

При вычислении отклонения от гиперплоскости (58) до точки $(b_{l,n}, \dots, b_{l,\varepsilon})$ в пространстве размерностью $\alpha \geq 3$ используется формула для расчета расстояния [2,3] от гиперплоскости до точки, но при этом знак отклонения определяется суммой α амплитуд спектральных коэффициентов:

$$\beta_{l,j} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n \in j}^{\alpha} b_{l,n}. \quad (59)$$

Аналогично варианту $\alpha = 2$, если $\beta_{l,j} < 0$, то с помощью ГП $Z_l(t)$ передающим устройством по каналу будет передан ошибочный информационный сигнал $-B_{l,j}$ вместо $B_{l,j}$. Если $\beta_{l,j} = 0$, то вероятность передачи ошибочного информационного сигнала становится равной 0,5.

Следовательно, при поэлементном приеме вместо квадратичного критерия оптимальности ГП (43) сначала необходимо применять линейный критерий оптимальности ГП:

$$\min_j \beta_{l,j} \Rightarrow \max. \quad (60)$$

Линейный критерий оптимальности ГП (60) позволяет оптимизировать начальные ГП в передающем устройстве и не допускать формирования ошибочных информационных сигналов в передающем устройстве. Переход к квадратичному критерию оптимальности ГП (43) производится только в случаях, если в (59) для любых j все $b_{l,n} \geq 0$ для всех $n \in j$.

Проведенное компьютерное моделирование показывает, что при $\alpha > 1$ оптимальным является применение подмножеств из α номеров последовательностей Уолша, сумма по модулю 2 которых равна 0. При этом нулевая последовательность Уолша $W_0(t)$ не используется.

Ниже приведены для примера подмножества из 3-х номеров последовательностей Уолша:

$$N = 64, J = 21, \alpha = 3: (29,47,50), (31,46,49), (28,44,48), (6,43,45), (13,39,42), (15,38,41), (4,17,21), (40,8,32), (61,25,36), (59,24,35), (56,26,34), (54,10,60), (33,18,51), (27,37,62), (23,9,30), (3,16,19), (7,11,12), (2,20,22), (14,55,57), (5,58,63), (1,52,53). \quad (61)$$

Рассмотрим этап оптимизации начальной ГП $\dot{Z}_l(t)$ по критерию (60). Поскольку все групповые последовательности являются двоичными, то оптимизация заключается в замене некоторых элементов начальной ГП на противоположные элементы. Поэтому критерий оптимальности ГП (60) запишем в виде:

$$\min_j(\beta_{l,j}) \xrightarrow{\sum_{i=0}^{N-1} \psi_{l,i} \dot{z}_{li} \tau(t-i\Delta)} \max, \quad (62)$$

где $\beta_{l,j}$ – отклонение взвешенной суммы корреляционных откликов на выходе, соответствующих α корреляторов приемника на ГП от ближайшей границы принятия решения, $\dot{z}_{l,i}$ – i -й элемент начальной ГП $\dot{Z}_l(t)$, $\psi_{l,i} = \pm 1$, (63) – функция оптимизации элемента \dot{z}_{li} начальной ГП $\dot{Z}_l(t)$.

Это задача целочисленной нелинейной оптимизации, решение которой в общем виде неизвестно. С помощью компьютерного моделирования было опробовано несколько алгоритмов оптимизации начальной ГП $\dot{Z}_l(t)$. В качестве основного выбран алгоритм пошаговой оптимизации элементов начальной ГП [15], который полностью устранял ошибки в передаваемых ГП.

Проведено компьютерное моделирование процесса пошаговой оптимизации начальной ГП $\dot{Z}_l(t)$ в передающем устройстве и последующим поэлементным приемом оптимизированной ГП $Z_l(t)$ при различных значениях

α , длины последовательности N и количества передаваемых информационных сигналов J , которое показало:

- оптимальным является вариант при $\alpha = 1$,
- полученный максимум – оптимальная ГП $Z_l(t)$, иногда оказывается локальным максимумом, что связано с нелинейностью задачи целочисленной оптимизации,
- для достижения максимума в (62) желательно проводить параллельные вычисления по предложенному алгоритму для нескольких различающихся между собой параметров оптимизации ГП, а затем выбирать максимум из полученных решений,
- корреляционные отклики на входящие в ГП информационные последовательности Уолша распределены по нормальному закону, причем минимальные корреляционные отклики имеют очень низкую вероятность и мало-информативны для оценки эффективности метода, поэтому был применен расчет усредненного через вероятность ошибки минимального корреляционного отклика \bar{b} .

Дополнительно разработаны различные алгоритмы для пошаговой оптимизации, которые позволяют исключить до $(0,8 \div 0,9) * N$ элементов $\dot{z}_{l,i}$ начальной ГП из процесса оптимизации, что существенно снижает объем вычислений.

Результаты компьютерного моделирования процесса пошаговой оптимизации ГП, обеспечивающей полное устранение ошибок в передаваемых ГП, с последующим поэлементным приемом ГП для $\alpha = 1$ при различных значениях длины последовательности N и количества передаваемых информационных сигналов J представлены на рис. 2.

При этом рассчитывалась величина энергетического выигрыша [16] H относительно передачи двоичных сигналов длиной N/J :

$$H = (\bar{b}/K_J)^2, (64)$$

где \bar{b} – усредненный через вероятность ошибки минимальный корреляционный отклик, $K_J = N/J$ – величина корреляционного отклика при передаче двоичного сигнала длиной N/J .

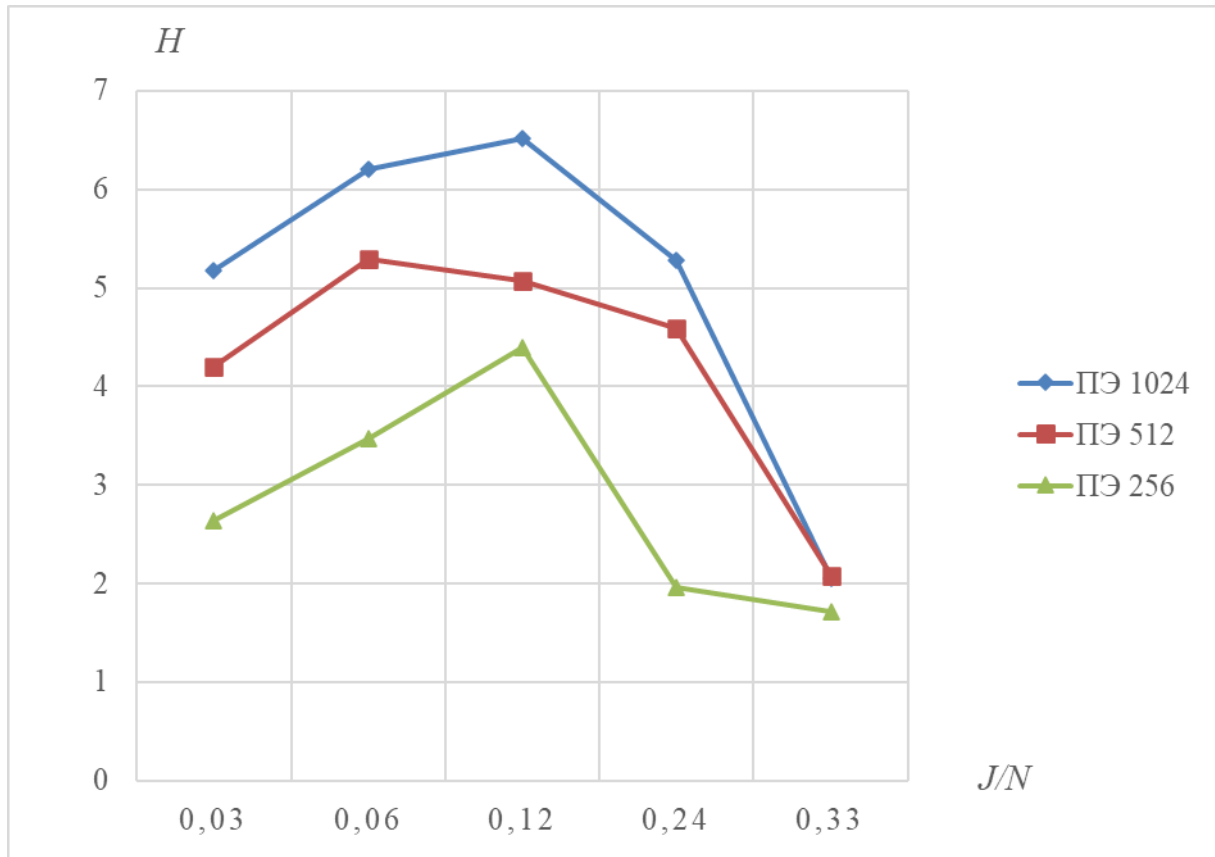


Рис. 2. Зависимость энергетического выигрыша H (дБ) при поэлементном приеме от относительной скорости передачи информационных сигналов $\frac{J}{N}$, верхний график получен при $N = 1024$ (ПЭ 1024), средний график при $N = 512$ (ПЭ 512), нижний график при $N = 256$ (ПЭ 256).

Анализ результатов компьютерного моделирования процесса оптимизации начальной ГП с последующим поэлементным приемом на рис. 2 показал:

- для полного устранения ошибок на передаче максимально возможная относительная скорость передачи информационных сигналов J/N приблизительно составляет 0,33,

- энергетический выигрыш при поэлементном приеме растет с увеличением длины групповой последовательности N ,

- с уменьшением относительной скорости передачи информационных сигналов J/N энергетический выигрыш при поэлементном приеме растет, достигая максимальных значений при относительной скорости передачи информационных сигналов $J/N = 0,06 - 0,12$.

При поэлементном приеме информационного сигнала $B_{l,n}$ различие ближайших ГП $Z_l(t)$ и $Z_k(t)$ производится только по первому слагаемому в (21). При этом не используются оставшиеся спектральные коэффициенты. Очевидно, что их использование позволит использовать все евклидово расстояние между ближайшими ГП и повысить помехоустойчивость приема. Поэтому был разработан алгоритм приема ГП, близкий к оптимальному приему в целом.

Пусть $\alpha = 1$, тогда информационными являются только J последовательностей Уолша, которые выделены в первое слагаемое:

$$Z_l(t) = \sum_{j=1}^J B_{l,j} b_{l,j} W_j(t) + \sum_{n \neq j}^{N-J} \eta_{l,n} W_n(t). \quad (65)$$

На приеме на вход декодера после демодуляции поступает последовательность $S(t)$, равная сумме групповой последовательности $Z_l(t)$ и аддитивной помехи $\dot{n}(t)$:

$$S(t) = qZ_l(t) + \dot{n}(t), \quad (66)$$

где $q > 0$ – коэффициент ослабления ГП в канале.

Разложим помеху по полной системе ортонормированных последовательностей Уолша:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \acute{\eta}_{s,n} W_n(t), \quad (68)$$

где $\acute{\eta}_{s,n} = q\eta_{l,n} + \xi_n$ (69), $\acute{\eta}_{s,n}$ – n -й спектральный коэффициент разложения последовательности $S(t)$ в базисе полной системы последовательностей Уолша.

Алгоритм близкий к оптимальному приему ГП в целом для $\alpha = 1$ состоит из следующих операций:

1. Принятая последовательность $S(t)$ записывается в память приемного устройства. Производится поэлементный прием последовательности $S(t)$ с вычислением множества $\{\acute{\eta}_{s,j}\}_{j=1,J}$ и принятием предварительного решения о приеме множества

информационных сигналов $\{B_{s,j}\}_{j=1,J}$, которое под воздействием аддитивной помехи $\dot{n}(t)$ может отличаться от переданного множества информационных сигналов $\{B_{l,j}\}_{j=1,J}$.

- По полученному множеству принятых информационных сигналов $\{\dot{B}_{s,j}\}_{j=1,J}$ приемное устройство формирует ГП $Z_s(t)$ по алгоритму, аналогичному алгоритму передающего устройства:

$$Z_s(t) = \sum_{j=1}^J B_{s,j} b_{s,j} W_j(t) + \sum_{n \neq j}^{N-J} \tilde{\eta}_{s,n} W_n(t), \quad (70)$$

где $b_{s,j}$ – амплитуда j -го спектрального коэффициента разложения $Z_s(t)$,

$\tilde{\eta}_{s,n}$ – n -й спектральный коэффициент разложения $Z_s(t)$.

- Рассчитываются J квадратов расстояний от последовательности $S(t)$ до сформированной ГП $Z_s(t)$ по последовательностям $\{W_j(t)\}_{j=1,J}$, передающих соответствующие информационные сигналы $B_{s,j}$:

$$D_{s,j}^2 = N(\dot{\eta}_{s,j} - B_{s,j} b_{s,j})^2. \quad (71)$$

- Для $J_1 < J$ наибольших значений квадратов евклидовых расстояний $D_{s,j}^2$, по алгоритму оптимизации ГП передающего устройства приемное устройство формирует подмножество из J_1 ближайших к $Z_s(t)$ групповых последовательностей $\{Z_k(t)\}_{k=1,J_1}$, которые отличаются от $Z_s(t)$ отдельными информационными сигналами:

$$B_{k,j} = -B_{s,j}.$$

- С помощью $(J_1 + 1)$ корреляторов производятся корреляционные свертки записанной в памяти приемного устройства принятой последовательности $S(t)$ с ГП $Z_s(t)$ и сформированными J_1 групповыми последовательностями $\{Z_k(t)\}_{k=1,J_1}$. Окончательное решение о принятой ГП в приемном устройстве производится по критерию максимального корреляционного отклика из этих $(J_1 + 1)$ корреляционных сверток.

Поскольку описанный выше алгоритм приема в целом производится только среди ближайших $(J_1 + 1)$ ГП к принятой последовательности $Z_s(t)$, то описанный алгоритм приема в целом не является оптимальным приемом. Однако этот алгоритм является довольно близким к оптимальному приему, поскольку не сформированные предложенным алгоритмом остальные ГП отличаются гораздо большими значениями расстояний до $Z_s(t)$, и, следовательно, до $S(t)$. Соответственно, оптимальный прием в целом производится среди ближайших ГП к принятой последовательности $S(t)$.

Для оценки эффективности приема в целом среди ближайших ГП проведено компьютерное моделирование формирования оптимальных групповых последовательностей $Z_l(t)$ по алгоритму (62), а также формирование по тому же алгоритму ближайших к ГП $Z_l(t)$ оптимальных ГП $Z_k(t)$, где $k = 1, J$. Ближайшие ГП $Z_k(t)$ при их формировании отличаются от $Z_l(t)$ одним информационным сигналом $B_{k,j} = -B_{l,j}$, где $j \in \{1, J\}$.

Затем рассчитывались квадраты евклидовых расстояний от ГП $Z_l(t)$ до ближайших к ней ГП $Z_k(t)$:

$$D_{l,k}^2 = \sum_{i=1}^N (z_{l,i} - z_{k,i})^2, k = 1, J. (72)$$

Компьютерное моделирование процесса оптимизации ГП показало, что квадраты расстояний от ГП $Z_l(t)$ до ближайших к ней ГП $Z_k(t)$ распределены по нормальному закону, причем минимальный квадрат расстояния от ГП $Z_l(t)$ до ближайшей к ней ГП $Z_k(t)$, имеет очень низкую вероятность и малоинформативен для оценки эффективности метода. Поэтому был разработан алгоритм расчета, усредненного через вероятность ошибки минимального квадрата расстояния D^2 от ГП $Z_l(t)$ до ближайших к ней ГП, который в полной мере учитывает распределение корреляционных откликов по нормальному закону распределения с вероятностью их появления.

Сравнение D^2 проводилось с соответствующим квадратом евклидового расстояния D_2^2 для двоичных информационных сигналов длиной N/J :

$$D_2^2 = \frac{4N}{J}. (73)$$

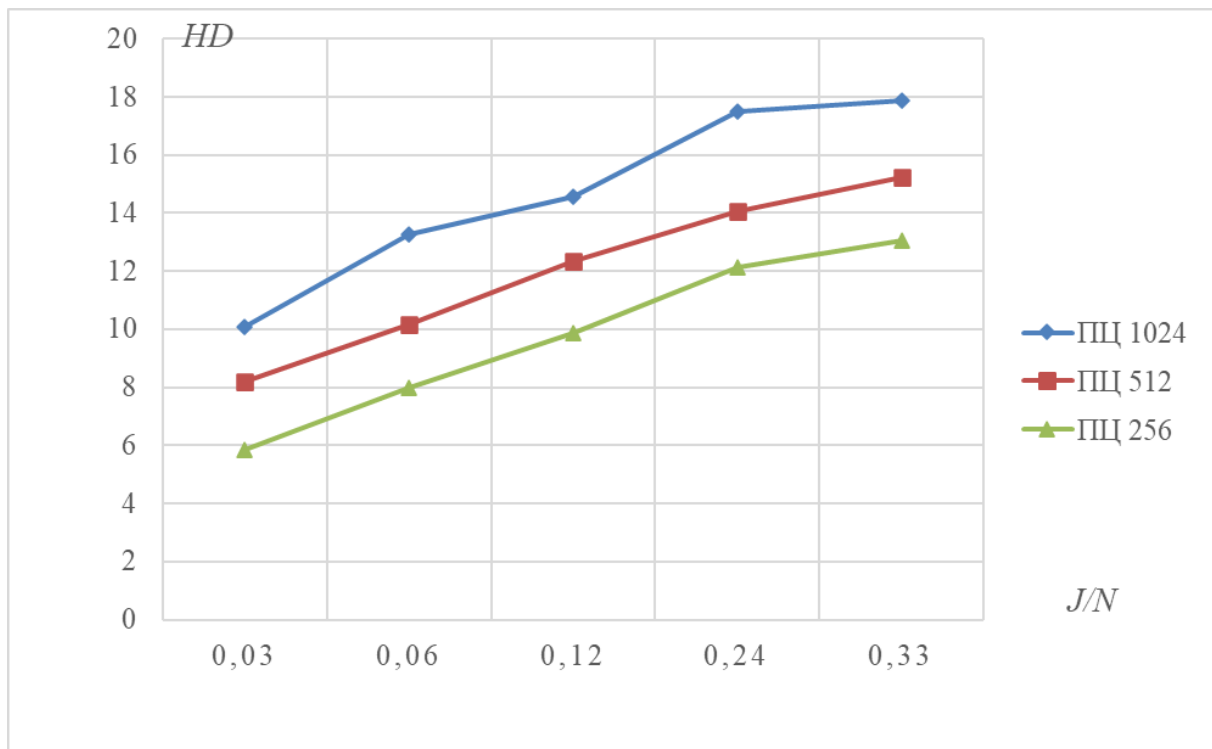


Рис. 3. Зависимость энергетического выигрыша HD (дБ) при приеме в целом (ПЦ) от относительной скорости передачи информационных сигналов J/N .

Энергетический выигрыш [16] от применения двоичных групповых последовательностей:

$$HD = \mathcal{D}^2 / D_2^2. (74)$$

Результаты имитационного моделирования процессов приема в целом (ПЦ) ГП при $\alpha = 1$ для различных N приведены на рис. 3.

Анализ результатов компьютерного моделирования приема ГП в целом показывает:

- энергетический выигрыш приема в целом существенно растет с увеличением N ,
- с ростом относительной скорости передачи J/N увеличивается энергетический выигрыш приема ГП в целом, достигая максимума при $J/N \approx 0,33$,

- энергетический выигрыш приема в целом ГП гораздо больше выигрыша при поэлементном приеме ГП (рис. 2), достигая максимума при $J/N \approx 0,33$, так при $N = 1024$, этот выигрыш достигает 16 дБ.

Представленные результаты оптимизации двоичных групповых последовательностей показывают, что предложенный алгоритм оптимизации, который заключается в замене некоторых элементов групповых последовательностей на противоположные элементы по критерию максимума минимального корреляционного отклика, не только полностью устраняет ошибки нелинейного кодового уплотнения, но и повышает помехоустойчивость поэлементного приема групповой последовательности в полной системе ортогональных последовательностей Уолша. Разработанный алгоритм приема в целом групповой последовательности среди ближайших групповых последовательностей, дополнительно существенно повышает помехоустойчивость приема групповой последовательности относительно поэлементного приема групповой последовательности.

Литература

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, Наука. 1989. 624 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. *Справочник по математике*. Москва, Наука. 1981. 720 с.
3. Корн Г.К., Корн Т.К. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука. 1984. 832 с.
4. Возенкрафт Дж., Джекобс И. *Теоретические основы техники связи*. Москва, Мир. 1969. 640 с.
5. Вишневецкий В.М., Портной С.Л., Шахнович И.В. *Энциклопедия WiMAX. Путь к 4G*. Москва, Техносфера. 2009. 472 с.
6. Трахтман А.М. *Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов*. Москва, Советское радио. 1972. 352 с.

7. Трахтман А.М., Трахтман В.А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах*. Москва, Советское радио. 1975. 208 с.
8. Мак-Вильямс Ф., Слоэн Н. *Теория кодов, исправляющих ошибки*. Москва, Связь. 1979. 744 с.
9. Хармут Х.Ф. *Передача информации ортогональными функциями*. Москва, Связь. 1975. 272 с.
10. Titsvort R.G. Optimal ranging codes. *IEEE Trans.* 1964. Vol.SET-10. No.1.
11. Варакин Л.Е. *Теория систем сигналов*. Москва, Сов. радио. 1978. 304 с.
12. Варакин Л.Е. *Системы связи с шумоподобными сигналами*. Москва, Радио и связь. 1985. 384 с.
13. Тепляков И.М., Роцин Б.В., Фомин А.И., Вейцель В.А. *Радиосистемы передачи информации*. Москва, Радиоисвязь. 1982. 264 с.
14. Лосев В.В., Бродская Е.Б., Коржик В.И. *Поиск и декодирование сложных дискретных сигналов*. Москва, Радио и связь. 1988. 224 с.
15. Патент РФ №2020107088. *Устройство формирования двоичной групповой последовательности*. Дата выдачи патента 17.02.2020.
16. Ипатов В. *Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов*. Москва, Техносфера. 2007. 488 с.

Для цитирования:

Бердышев О.Ю. Оптимизация двоичных групповых последовательностей, полученных в результате нелинейного кодового уплотнения. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.8.11>

Бердышев Олег Юрьевич
berd555@yandex.ru