

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.8.5>

УДК: 537.874; 537.624

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНУЮ СТРУКТУРУ. ЧАСТЬ 1. МАТРИЧНЫЙ АЛГОРИТМ

И.В. Антоненц¹, В.Г. Шавров², В.И. Щеглов²

¹Сыктывкарский государственный университет им. П. Сорокина,
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

²Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 18 июля 2022 г.

Аннотация. Предложен матричный алгоритм расчета отражения и прохождения одномерной волны через многослойную структуру. Рассмотрен случай одновременного падения на структуру двух волн во встречных направлениях. Структура представлена в виде последовательно следующих друг за другом однородных слоев с различающимися параметрами. В основу метода положена аналогия между распространением волны в многослойной волноведущей структуре и в цепочке, состоящей из последовательно соединенных четырехполюсников распространения и связи. Результаты, полученные на модели четырехполюсников, обобщены на случай распространения одномерных волн в многослойной структуре. Получена результирующая матрица, образованная последовательным произведением матриц распространения и связи для структуры в целом. На основе схемы получения элементов последующей матрицы из элементов предыдущей предложен алгоритм, позволяющий рекуррентным путем получить результирующую матрицу для любого произвольного числа сред. На основе предложенного алгоритма рассчитываются амплитуды выходящих из структуры волн через амплитуды

входящих, а также коэффициенты отражения и прохождения по энергии для структуры в целом. Для удобства машинного программирования представлена блок-схема реализующей алгоритм программы, включающая в себя подпрограмму, рассчитывающую элементы последующей матрицы из элементов предыдущей. Приведены рекуррентные формулы, позволяющие обобщить предложенный алгоритм на распространение электромагнитных волн. Приведены рекомендации, позволяющие обобщить предложенный алгоритм на волны, не имеющие гармонического характера.

Ключевые слова: распространение волн, многослойная структура, коэффициенты отражения и прохождения.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, частично поддержана грантом РФФИ: № 20-55-53019 ГФЕН_а, грантами РНФ: № 21-72-20048 и № 21-47-00019 и грантом Правительства Республики Коми и РФФИ № 20-42-110004, р_а.

Автор для переписки: Щеглов Владимир Игнатьевич, vshcheg@cplire.ru

Введение

Вопросы распространения волн различной природы в слоистых средах и структурах представляют значительный интерес для фундаментальных исследований и практических применений [1-10]. Важную роль играют различные методы расчета характеристик распространения волн в таких средах, в первую очередь коэффициентов отражения и прохождения [2, 4, 6-8]. Многообразие геометрических, механических, электродинамических, оптических и других свойств многослойных сред требует для теоретического рассмотрения применения различных приемов, часто приводящих к громоздким вычислениям. Особой сложностью отличаются задачи для неоднородных сред с плавно меняющимися по пространству параметрами.

Традиционным приемом рассмотрения таких задач является приближенное представление среды в виде ступенчатой структуры, состоящей

из однородных участков, разделенных границами. Идеологически наиболее простым здесь является прямой метод, состоящий в решении волнового уравнения для каждого участка в отдельности с последующим сшиванием отдельных решений на границах [2, 11]. Применимость этого метода ограничивается числом слоев не более четырех-пяти, так как далее вычислительные трудности резко нарастают из-за сложности вычислений детерминантов высоких порядков [12].

Для большего числа слоев применяются методы последовательных вычислений, позволяющие рассчитывать параметры не по всей структуре сразу, а постепенно, переходя от одного слоя к другому. Среди наиболее употребительных методов здесь следует упомянуть метод импеданса [3, 7] и метод матрицы [2, 13, 14], допускающие последовательную реализацию. Однако, в большинстве практических случаев расчеты не идут дальше двух-трех слоев, а далее ограничиваются лишь общими рекомендациями.

Среди универсальных методов последовательного характера следует отметить метод исключения, применимый в том числе для структур со случайными неоднородностями [15], [16, стр.78-91], а также метод пошагового алгоритма, удобный для расчета периодических структур [17-19], [20, стр.14-58, 94-111]. Однако метод исключения обладает заметной идеологической сложностью, а метод алгоритма предназначен в первую очередь для получения аналитических выражений.

В первой части настоящей работы предлагается развитие матричного метода, обладающего сравнительно простой идеологией в сочетании с возможностью простой алгоритмизации, удобной для численных расчетов. В следующей части работы метод применяется для решения задачи о распространении волны через наклонный барьер ступенчатого характера с нарастающими параметрами.

1. Общая постановка задачи

Будем рассматривать волноведущую структуру, содержащую N плоскопараллельных слоев, разделенных $N - 1$ границами. Ось координат вдоль структуры, перпендикулярную слоям и их границам, обозначим через Ox .

Общая геометрия задачи представлена на рис. 1.

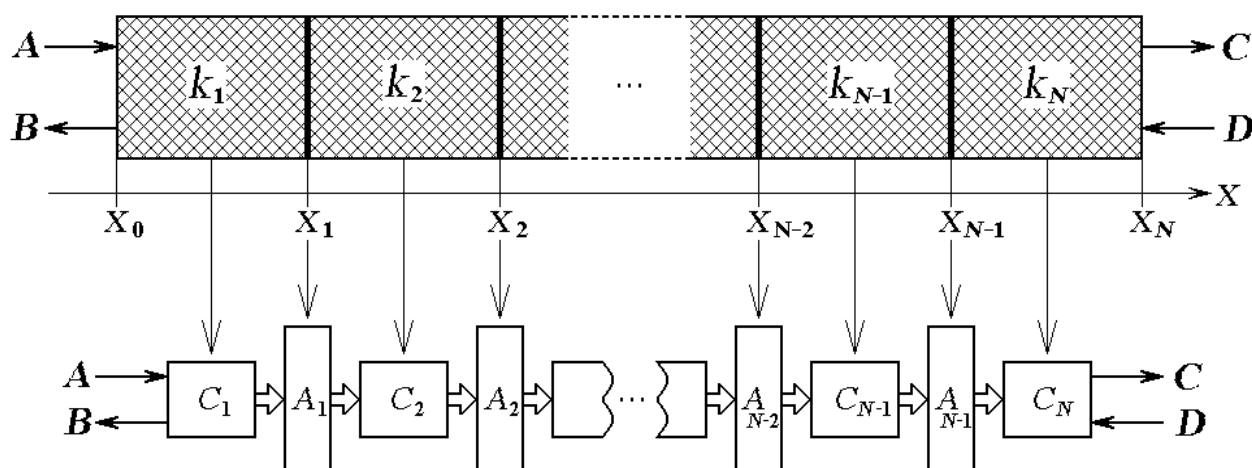


Рис. 1. Схема представления слоистой структуры в виде эквивалентной цепочки из четырехполюсников

Здесь в верхнем ряду показана волноведущая структура, слои которой представляют собой среды с волновыми числами $k_{1,2, \dots, N}$. Координата начала структуры – x_0 , конца – x_N . Координаты границ между средами – от x_1 до x_{N-1} . Длины участков между границами, то есть толщины слоев, будем обозначать далее через d_n , где $d_n = x_n - x_{n-1}$, причем n меняется от 1 до N .

На структуру в положительном направлении оси Ox на слой 1 падает волна A , выходит из этого слоя в отрицательном направлении волна B . На ту же структуру со стороны слоя N , то есть в отрицательном направлении оси Ox , падает волна D , выходит из этого слоя в положительном направлении волна C . Следуя [21, 22], сопоставим структуре эквивалентную цепочку из четырехполюсников, показанную в нижнем ряду рис. 1. То есть, каждой среде или каждой границе с номером n соответствует четырехполюсник с тем же

номером, где номера n для сред меняются от 1 до N , а для границ – от 1 до $N - 1$.

Отвечающая волноведущей структуре цепочка содержит четырехполосники двух видов – соответствующие участкам сред, обозначенные буквами C_n , и соответствующие границам между участками, обозначенные буквами A_n . Поскольку в пределах сред волны распространяются в том или ином направлении, четырехполосники сред C_n будем называть четырехполосниками распространения, а соответствующие им матрицы \hat{C}_n – матрицами распространения. Поскольку граница связывает между собой два соседствующих участка сред, будем называть такие четырехполосники \hat{A}_n четырехполосниками связи, а соответствующие им матрицы \hat{A}_n – матрицами связи.

2. Получение матриц распространения и связи

Решаем задачу в приближении одномерных волн типа волны в струне [11, 12, 23]. Координатная часть волновой функции, являющейся решением волнового уравнения второго порядка, имеет вид:

$$X_n = A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}, \quad (1)$$

где k_n – волновое число волны в среде (слое) с номером n , A_n и B_n – соответствующие произвольные постоянные, которые должны быть определены из граничных условий. Первое слагаемое в этом выражении при зависимости от времени вида $e^{i\omega t}$ описывает волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Ox , второе – в отрицательном.

3. Матрица распространения (среда)

Рассмотрим получение матрицы распространения на примере четырехполосника типа С, общая схема которого представлена на рис. 2.

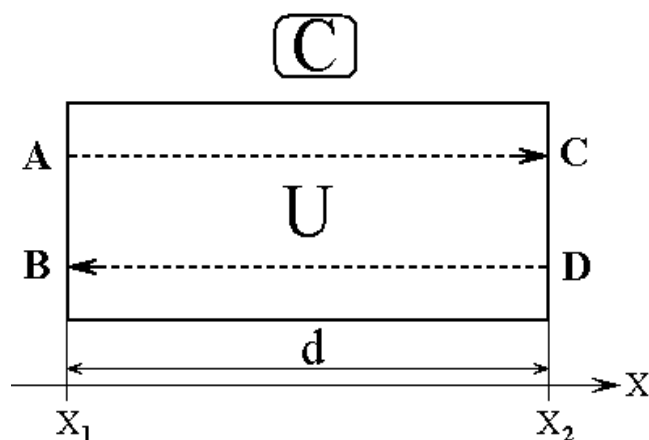


Рис. 2. Схема четырехполосника распространения

На границе при координате x_1 четырехполосник имеет два контакта А и В, на границе при координате x_2 – тоже два контакта С и D. Передача сигнала от контактов А и В к контактам С и D в матричной записи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{C} \cdot \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} \quad (2)$$

Для удобства записи будем считать, что наименования контактов соответствуют амплитудам волн с такими же обозначениями. Толщину среды обозначим через d , то есть будем считать:

$$x_2 - x_1 = d. \quad (3)$$

Итак, на этом отрезке распространяются во встречных направлениях две волны u и v , в силу единства волнового уравнения, имеющие одно и то же волновое число k .

Рассмотрим трансформацию обеих волн на этом пути.

Так, выходящая из точки x_1 волна u , имея в этой точке амплитуду A , при прохождении расстояния d за счет набега (отставания) фазы приобретает вид: $A e^{-i k d}$, после чего входит в границу при координате x_2 уже как волна C .

Выходящая из границы при x_2 волна ν , имея в этой точке амплитуду D , распространяясь в противоположном направлении и проходя расстояние d , испытывает такое же отставание по фазе, так что приобретает вид $D e^{-i k d}$, после чего выходит из начала структуры при x_1 уже как волна B .

Таким образом, выполняются соотношения:

$$A e^{-i k d} = C, \tag{4}$$

$$D e^{-i k d} = B, \tag{5}$$

из этих соотношений получаем:

$$A = C e^{i k d}, \tag{6}$$

$$B = D e^{-i k d} \tag{7}$$

Записывая (6)-(7) в матричном виде, подобном (2), получаем, что матрица распространения имеет вид:

$$\hat{C} = \left(\begin{array}{c|c} e^{i k d} & 0 \\ \hline 0 & e^{-i k d} \end{array} \right). \tag{8}$$

4. Матрица связи (граница)

Рассмотрим получение матрицы связи на примере четырехполюсника типа А, общая схема которого представлена на рис. 3.

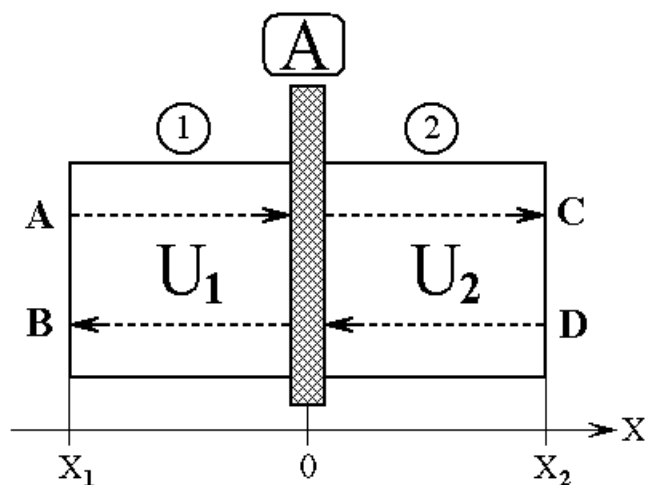


Рис. 3. Схема четырехполюсника связи

Как и в предыдущем случае (2), передача сигнала от контактов А и В к контактам С и D в матричной записи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{A} \cdot \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}, \quad (9)$$

где \hat{A} , в отличие от (2), является матрицей не распространения, а связи.

Итак, четырехполюсник соответствует границе между двумя средами 1 (левая часть рисунка) и 2 (правая часть рисунка), волновые функции в которых имеют вид:

$$U_1 = A e^{-ik_1x} + B e^{ik_1x}; \quad (10)$$

$$U_2 = C e^{-ik_2x} + D e^{ik_2x}. \quad (11)$$

Производные этих волновых функций имеют вид:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} = -iA k_1 e^{-ik_1x} + iB k_1 e^{ik_1x}; \quad (12)$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial x} = -iC k_2 e^{-ik_2x} + iD k_2 e^{ik_2x}; \quad (13)$$

Поскольку нас интересует именно граница между средами, то зададим ей координату $x = 0$. При этом будем полагать, что волна U_1 на расстоянии от x_1 до 0 не меняет амплитуду и не приобретает набега фазы. Аналогично положим, что волна U_2 на расстоянии от 0 до x_2 также не меняется ни по амплитуде, ни по фазе. При этом, учитывая, что на границе $x = 0$, так что все экспоненты обращаются в единицу, из (10)-(11) находим:

$$U_1|_{x=0} = A + B; \quad (14)$$

$$U_2|_{x=0} = C + D, \quad (15)$$

а также из (12)-(13) получаем:

$$\left. \frac{\partial U_1}{\partial x} \right|_{x=0} = -iA k_1 + iB k_1; \quad (16)$$

$$\left. \frac{\partial U_2}{\partial x} \right|_{x=0} = -iC k_2 + iD k_2. \quad (17)$$

Граничными условиями является равенство на границе волновых функций и их производных [11, 12, 23], то есть:

$$U_1|_{x=0} = U_2|_{x=0}; \quad (18)$$

$$\left. \frac{dU_1}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dU_2}{dx} \right|_{x=0}. \quad (19)$$

Подставляя (14)-(17) в эти граничные условия, получаем систему уравнений для амплитуд:

$$A + B = C + D; \quad (20)$$

$$-A k_1 + B k_1 = -C k_2 + D k_2. \quad (21)$$

Решение этой системы относительно A и B дает:

$$A = \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot C + \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot D; \quad (22)$$

$$B = \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot C + \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot D. \quad (23)$$

Таким образом, входящая в (9) матрица связи \hat{A} имеет вид:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \end{pmatrix}.$$

5. Структура цепочки из четырехполюсников

На рис. 1 четырехполюсники, соответствующие средам, обозначены буквами C_n . Эти четырехполюсники описываются матрицами распространения, имеющими вид:

$$\hat{C}_n = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_n d_n} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_n d_n} \end{array} \right). \quad (25)$$

Четырехполюсники, соответствующие границам, обозначены буквами A_n .

Эти четырехполюсники описываются матрицами связи, имеющими вид:

$$\hat{A}_n = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} & \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} \\ \hline \frac{k_n - k_{n+1}}{2k_n} & \frac{k_n + k_{n+1}}{2k_n} \end{array} \right). \quad (26)$$

Полная цепочка четырехполюсников описывается результирующей матрицей \hat{G}_N , представляющей собой последовательное соединение чередующихся матриц распространения и связи:

$$\hat{G}^{(N)} = \hat{C}_1 \hat{A}_1 \hat{C}_2 \hat{A}_2 \dots \hat{C}_{N-1} \hat{A}_{N-1} \hat{C}_N. \quad (27)$$

В записи через элементы результирующая матрица имеет вид:

$$\hat{G}^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(N)} & g_{12}^{(N)} \\ \hline g_{21}^{(N)} & g_{22}^{(N)} \end{array} \right). \quad (28)$$

Матрица $\hat{G}^{(N)}$ связывает волны A и B в начале структуры с волнами C и D в ее конце в соответствии с соотношением:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{G}^{(N)} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (29)$$

В алгебраической записи эта связь имеет вид:

$$A = g_{11}^{(N)} C + g_{12}^{(N)} D; \quad (30)$$

$$B = g_{21}^{(N)} C + g_{22}^{(N)} D. \quad (31)$$

Для реализации такой связи в полном виде, надо найти элементы матрицы $g_{ik}^{(N)}$ в выражении через параметры структуры, такие как волновые числа k_n и протяженности участков структуры d_n .

6. Общая схема алгоритма последовательного вычисления результирующей матрицы

Согласно показанному в предыдущем разделе, для получения результирующей матрицы следует найти матрицы распространения для всех сред и матрицы связи для всех границ, после чего остается только их перемножить в последовательном порядке. Однако при значительном количестве звеньев цепочки перемножение матриц может оказаться весьма громоздким. В то же время процедура получения матриц того и другого вида для всех элементов цепочки является достаточно однообразной, что позволяет найти элементы результирующей матрицы путем последовательного перехода от одного звена цепочки к другому. Такую возможность обеспечивает предлагаемый далее алгоритм, особенно удобный при машинном счете. Начнем рассмотрение с простых случаев двух и трех сред, после чего обобщим все на произвольное число сред.

7. Результирующие матрицы для двух и трех сред

Начнем со среды 1 без границ. Результирующая матрица $\hat{G}^{(1)}$ для этого случая равна просто матрице распространения для этой среды:

$$\hat{G}^{(1)} = \hat{C}_1^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1} \end{array} \right). \quad (32)$$

Запишем эту матрицу в виде:

$$\hat{G}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} \\ \hline g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} \end{array} \right), \quad (33)$$

где:

$$g_{11}^{(1)} = e^{ik_1 d_1}; \quad (34)$$

$$g_{12}^{(1)} = 0; \quad (35)$$

$$g_{21}^{(1)} = 0; \quad (36)$$

$$g_{22}^{(1)} = e^{-ik_1 d_1}. \quad (37)$$

Для задачи о двух средах, разделенных одной границей, согласно (27), результирующая матрица имеет вид:

$$\hat{G}^{(2)} = \hat{C}_1^{(2)} \cdot \hat{A}_1^{(2)} \cdot \hat{C}_2^{(2)}, \quad (38)$$

где, согласно (25), (26), составляющие ее матрицы равны:

$$\hat{C}_1^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1} \end{array} \right); \quad (39)$$

$$\hat{A}_1^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \hline \frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \end{array} \right); \quad (40)$$

$$\hat{C}_2^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right). \quad (41)$$

Произведение двух последних матриц имеет вид:

$$\hat{A}_1^{(2)} \cdot \hat{C}_2^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2 d_2} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2 d_2} \\ \hline \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2 d_2} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right). \quad (42)$$

Учтем теперь, что матрица $\hat{C}_1^{(2)}$ теперь занимает место матрицы $\hat{C}_1^{(1)}$, то есть относится к той же среде 1, так что, с учетом (32), ее можно записать в виде (33):

$$\hat{C}_1^{(2)} \rightarrow \hat{C}_1^{(1)} = \hat{G}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(1)} & g_{12}^{(1)} \\ \hline g_{21}^{(1)} & g_{22}^{(1)} \end{array} \right). \quad (43)$$

Выполняя умножение (43) на (42), получаем:

$$\hat{G}^{(2)} = \hat{C}_1^{(2)} \cdot \hat{A}_1^{(2)} \cdot \hat{C}_2^{(2)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(2)} & g_{12}^{(2)} \\ \hline g_{21}^{(2)} & g_{22}^{(2)} \end{array} \right), \quad (44)$$

где элементы получившейся матрицы равны:

$$g_{11}^{(2)} = g_{11}^{(1)} \cdot \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2d_2} + g_{12}^{(1)} \cdot \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2d_2}; \quad (45)$$

$$g_{12}^{(2)} = g_{11}^{(1)} \cdot \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2d_2} + g_{12}^{(1)} \cdot \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2d_2}; \quad (46)$$

$$g_{21}^{(2)} = g_{21}^{(1)} \cdot \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2d_2} + g_{22}^{(1)} \cdot \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2d_2}; \quad (47)$$

$$g_{22}^{(2)} = g_{21}^{(1)} \cdot \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2d_2} + g_{22}^{(1)} \cdot \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2d_2}. \quad (48)$$

Учтем теперь, что в соответствии с (35) и (36) выполняются равенства: $g_{12}^{(1)} = 0$

и $g_{21}^{(1)} = 0$. Подставляя эти значения в (45)-(48), получаем:

$$g_{11}^{(2)} = g_{11}^{(1)} \cdot \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2d_2}; \quad (49)$$

$$g_{12}^{(2)} = g_{11}^{(1)} \cdot \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2d_2}; \quad (50)$$

$$g_{21}^{(2)} = g_{22}^{(1)} \cdot \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{ik_2d_2}; \quad (51)$$

$$g_{22}^{(2)} = g_{22}^{(1)} \cdot \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{-ik_2d_2}. \quad (52)$$

Заменяя $g_{11}^{(1)}$ и $g_{22}^{(1)}$ их выражениями в соответствии с (34) и (37), а также

объединяя показатели экспонент, получаем:

$$g_{11}^{(2)} = \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{i(k_1d_1 + k_2d_2)}; \quad (53)$$

$$g_{12}^{(2)} = \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{i(k_1d_1 - k_2d_2)}; \quad (54)$$

$$g_{21}^{(2)} = \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \cdot e^{-i(k_1 d_1 - k_2 d_2)}; \quad (55)$$

$$g_{22}^{(2)} = \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \cdot e^{-i(k_1 d_1 + k_2 d_2)}. \quad (56)$$

Обратимся теперь к случаю трех сред, разделенных двумя границами. В этом случае, согласно (27), результирующая матрица имеет вид:

$$\hat{G}^{(3)} = \hat{C}_1 \cdot \hat{A}_1 \cdot \hat{C}_2 \cdot \hat{A}_2 \cdot \hat{C}_3, \quad (57)$$

где составляющие — это выражение матрицы, в соответствии с (25)-(26), имеют вид:

$$\hat{C}_1^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_1 d_1} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_1 d_1} \end{array} \right); \quad (58)$$

$$\hat{A}_1^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_1 + k_2}{2k_1} & \frac{k_1 - k_2}{2k_1} \\ \hline \frac{k_1 - k_2}{2k_1} & \frac{k_1 + k_2}{2k_1} \\ \hline \frac{2k_1}{2k_1} & \frac{2k_1}{2k_1} \end{array} \right); \quad (59)$$

$$\hat{C}_2^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_2 d_2} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_2 d_2} \end{array} \right); \quad (60)$$

$$\hat{A}_2^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{k_2 + k_3}{2k_2} & \frac{k_2 - k_3}{2k_2} \\ \hline \frac{k_2 - k_3}{2k_2} & \frac{k_2 + k_3}{2k_2} \\ \hline \frac{2k_2}{2k_2} & \frac{2k_2}{2k_2} \end{array} \right); \quad (61)$$

$$\hat{C}_3^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} e^{ik_3 d_3} & 0 \\ \hline 0 & e^{-ik_3 d_3} \end{array} \right). \quad (62)$$

Для случая трех сред, запишем матрицу $\hat{G}^{(3)}$ в виде:

$$\hat{G}^{(3)} = \left(\begin{array}{c|c} g_{11}^{(3)} & g_{12}^{(3)} \\ \hline g_{21}^{(3)} & g_{22}^{(3)} \end{array} \right). \quad (63)$$

Выполняя перемножение матриц (58)-(62), получаем ее элементы:

$$g_{11}^{(3)} = \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1k_2} \cdot e^{i(k_1d_1 + k_2d_2 + k_3d_3)} + \frac{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1k_2} \cdot e^{i(k_1d_1 - k_2d_2 + k_3d_3)}; \quad (64)$$

$$g_{12}^{(3)} = \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1k_2} \cdot e^{i(k_1d_1 + k_2d_2 - k_3d_3)} + \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1k_2} \cdot e^{i(k_1d_1 - k_2d_2 - k_3d_3)}; \quad (65)$$

$$g_{21}^{(3)} = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1k_2} \cdot e^{i(-k_1d_1 + k_2d_2 + k_3d_3)} + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1k_2} \cdot e^{i(-k_1d_1 - k_2d_2 + k_3d_3)}; \quad (66)$$

$$g_{22}^{(3)} = \frac{(k_1 - k_2)(k_2 - k_3)}{4k_1k_2} \cdot e^{i(-k_1d_1 + k_2d_2 - k_3d_3)} + \frac{(k_1 + k_2)(k_2 + k_3)}{4k_1k_2} \cdot e^{i(-k_1d_1 - k_2d_2 - k_3d_3)}. \quad (67)$$

Перепишем те же элементы, группируя в квадратных скобках сомножители дробей и показатели экспонент в виде, совпадающем с (53)-(56):

$$g_{11}^{(3)} = \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} \cdot e^{i(k_1d_1 + k_2d_2)} \right] \cdot \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \cdot e^{ik_3d_3} + \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2k_1} \cdot e^{i(k_1d_1 - k_2d_2)} \right] \cdot \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} \cdot e^{ik_3d_3}; \quad (68)$$

$$g_{12}^{(3)} = \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} \cdot e^{i(k_1d_1 + k_2d_2)} \right] \cdot \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} \cdot e^{-ik_3d_3} +$$

$$+ \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2k_1} \cdot e^{i(k_1 d_1 - k_2 d_2)} \right] \cdot \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \cdot e^{-ik_3 d_3}; \quad (69)$$

$$g_{21}^{(3)} = \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2k_1} \cdot e^{i(-k_1 d_1 + k_2 d_2)} \right] \cdot \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \cdot e^{ik_3 d_3} +$$

$$+ \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} \cdot e^{i(-k_1 d_1 - k_2 d_2)} \right] \cdot \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} \cdot e^{ik_3 d_3}; \quad (70)$$

$$g_{22}^{(3)} = \left[\frac{(k_1 - k_2)}{2k_1} \cdot e^{i(-k_1 d_1 + k_2 d_2)} \right] \cdot \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} \cdot e^{-ik_3 d_3} +$$

$$+ \left[\frac{(k_1 + k_2)}{2k_1} \cdot e^{i(-k_1 d_1 - k_2 d_2)} \right] \cdot \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \cdot e^{-ik_3 d_3}. \quad (71)$$

Учитывая (53)-(56) эти же соотношения можно записать в виде:

$$g_{11}^{(3)} = g_{11}^{(2)} \cdot \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \cdot e^{ik_3 d_3} + g_{12}^{(2)} \cdot \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} \cdot e^{ik_3 d_3}; \quad (72)$$

$$g_{12}^{(3)} = g_{11}^{(2)} \cdot \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} \cdot e^{-ik_3 d_3} + g_{12}^{(2)} \cdot \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \cdot e^{-ik_3 d_3}; \quad (73)$$

$$g_{21}^{(3)} = g_{21}^{(2)} \cdot \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \cdot e^{ik_3 d_3} + g_{22}^{(2)} \cdot \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} \cdot e^{ik_3 d_3}; \quad (74)$$

$$g_{22}^{(3)} = g_{21}^{(2)} \cdot \frac{(k_2 - k_3)}{2k_2} \cdot e^{-ik_3 d_3} + g_{22}^{(2)} \cdot \frac{(k_2 + k_3)}{2k_2} \cdot e^{-ik_3 d_3}. \quad (75)$$

Из этих выражений видно, что все элементы матрицы $\hat{G}^{(3)}$ можно выразить через элементы матрицы для двух сред $\hat{G}^{(2)}$, умножая их на множители, подобные элементам матрицы двух сред $\hat{G}^{(2)}$ с учетом увеличения индексов волновых чисел на единицу, а также замены показателя экспоненты для первых двух сред на показатель, соответствующий третьей среде.

Вынося за скобки общие множители, выражения (45)-(48) можно записать в более компактном виде:

$$g_{11}^{(2)} = \frac{1}{2k_1} \cdot [g_{11}^{(1)} \cdot (k_1 + k_2) + g_{12}^{(1)} \cdot (k_1 - k_2)] \cdot e^{ik_2 d_2}; \quad (76)$$

$$g_{12}^{(2)} = \frac{1}{2k_1} \cdot [g_{11}^{(1)} \cdot (k_1 - k_2) + g_{12}^{(1)} \cdot (k_1 + k_2)] \cdot e^{-ik_2 d_2}; \quad (77)$$

$$g_{21}^{(2)} = \frac{1}{2k_1} \cdot [g_{21}^{(1)} \cdot (k_1 + k_2) + g_{22}^{(1)} \cdot (k_1 - k_2)] \cdot e^{ik_2 d_2}; \quad (78)$$

$$g_{22}^{(2)} = \frac{1}{2k_1} \cdot [g_{21}^{(1)} \cdot (k_1 - k_2) + g_{22}^{(1)} \cdot (k_1 + k_2)] \cdot e^{-ik_2 d_2}. \quad (79)$$

К подобному же виду можно привести выражения (72)-(75):

$$g_{11}^{(3)} = \frac{1}{2k_2} \cdot [g_{11}^{(2)} \cdot (k_2 + k_3) + g_{12}^{(2)} \cdot (k_2 - k_3)] \cdot e^{ik_3 d_3}; \quad (80)$$

$$g_{12}^{(3)} = \frac{1}{2k_2} \cdot [g_{11}^{(2)} \cdot (k_2 - k_3) + g_{12}^{(2)} \cdot (k_2 + k_3)] \cdot e^{-ik_3 d_3}; \quad (81)$$

$$g_{21}^{(3)} = \frac{1}{2k_2} \cdot [g_{21}^{(2)} \cdot (k_2 + k_3) + g_{22}^{(2)} \cdot (k_2 - k_3)] \cdot e^{ik_3 d_3}; \quad (82)$$

$$g_{22}^{(3)} = \frac{1}{2k_2} \cdot [g_{21}^{(2)} \cdot (k_2 - k_3) + g_{22}^{(2)} \cdot (k_2 + k_3)] \cdot e^{-ik_3 d_3}. \quad (83)$$

Итак, выражения (72)-(75) для матрицы $\hat{G}^{(3)}$ по структуре подобны выражениям (45)-(48) для матрицы $\hat{G}^{(2)}$. То же можно сказать относительно выражений (80)-(83) и (76)-(79).

Таким образом, зная элементы матрицы $\hat{G}^{(1)}$ можно найти элементы матрицы $\hat{G}^{(2)}$, зная которые, далее можно найти элементы матрицы $\hat{G}^{(3)}$.

Следует заметить, что при этом волновые числа $k_{1,2,3}$ и размеры сред $d_{1,2,3}$ предполагаются заранее заданными, как условия исходной задачи.

8. Результирующая матрица для произвольного числа сред

Обобщим теперь алгоритм, приведенный в предыдущем разделе на произвольное число сред.

Прежде всего рассмотрим вычисление отдельных матриц распространения и связи, для чего обратимся к матрицам (58)-(62). Можно видеть, что первые три матрицы (58)-(60) здесь повторяют матрицы предыдущего случая (39)-(41) с заменой верхнего индекса «2» на «3», а третья и четвертая матрицы (61) и (62) повторяют (59) и (60) с увеличением всех индексов на единицу. Путем прямой проверки можно убедиться, что при дальнейшем увеличении числа сред на единицу только последние две матрицы изменяются, приобретая индексы на единицу больше индексов предыдущих матриц подобного вида. Таким образом, при машинном вычислении матриц для произвольного числа сред можно воспользоваться циклом, обращающимся только к одной подпрограмме, которая будет вычислять только две матрицы типа $\hat{A}_{n-1}^{(n)}$ и $C_n^{(n)}$, где n – номер той среды, для которой вычисляются данные матрицы. При этом, если структура в целом содержит N сред, то последним значением n будет $n = N$.

Теперь обратимся к вычислению элементов результирующих матриц. Поскольку элементы матриц получаются из элементов предыдущих единообразным образом, подобным получению элементов $g_{ik}^{(3)}$ из элементов $g_{ik}^{(2)}$ в виде (80)-(83), учитывая увеличение соответствующих индексов на единицу, в формулах (80)-(83) выполним замены: $2 \rightarrow n$ и $3 \rightarrow n + 1$. При этом получаем для результирующей матрицы $\hat{G}^{(n+1)}$ элементы в виде:

$$g_{11}^{(n+1)} = \frac{1}{2k_n} \cdot \left[g_{11}^{(n)} \cdot (k_n + k_{n+1}) + g_{12}^{(n)} \cdot (k_n - k_{n+1}) \right] \cdot e^{ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (84)$$

$$g_{12}^{(n+1)} = \frac{1}{2k_n} \cdot \left[g_{11}^{(n)} \cdot (k_n + k_{n+1}) + g_{12}^{(n)} \cdot (k_n + k_{n+1}) \right] \cdot e^{-ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (85)$$

$$g_{21}^{(n+1)} = \frac{1}{2k_n} \cdot \left[g_{21}^{(n)} \cdot (k_n + k_{n+1}) + g_{22}^{(n)} \cdot (k_n - k_{n+1}) \right] \cdot e^{ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (86)$$

$$g_{22}^{(n+1)} = \frac{1}{2k_n} \cdot \left[g_{21}^{(n)} \cdot (k_n - k_{n+1}) + g_{22}^{(n)} \cdot (k_n + k_{n+1}) \right] \cdot e^{-ik_{n+1}d_{n+1}}. \quad (87)$$

Последовательно повторяя такое вычисление от $n = 1$ до $n = N$, где N – число сред в полной структуре, можно получить результирующую матрицу $\hat{G}^{(N)}$, которая связывает векторы начала и конца структуры соотношением, подобным (29):

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \hat{G}^{(N)} \cdot \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}. \quad (88)$$

В результате последовательных вычислений по формулам (84)-(87) от 1 до N , матрица $\hat{G}^{(N)}$ приобретает вид:

$$\hat{G}^{(N)} = \begin{pmatrix} g_{11}^{(N)} & g_{12}^{(N)} \\ g_{21}^{(N)} & g_{22}^{(N)} \end{pmatrix}, \quad (89)$$

элементы которой определяются соотношениями:

$$g_{11}^{(N)} = \frac{1}{2k_{N-1}} \cdot \left[g_{11}^{(N-1)} \cdot (k_{N-1} + k_N) + g_{12}^{(N-1)} \cdot (k_{N-1} - k_N) \right] \cdot e^{ik_N d_N}; \quad (90)$$

$$g_{12}^{(N)} = \frac{1}{2k_{N-1}} \cdot \left[g_{11}^{(N-1)} \cdot (k_{N-1} + k_N) + g_{12}^{(N-1)} \cdot (k_{N-1} + k_N) \right] \cdot e^{-ik_N d_N}; \quad (91)$$

$$g_{21}^{(N)} = \frac{1}{2k_{N-1}} \cdot \left[g_{21}^{(N-1)} \cdot (k_{N-1} + k_N) + g_{22}^{(N-1)} \cdot (k_{N-1} - k_N) \right] \cdot e^{ik_N d_N}; \quad (92)$$

$$g_{22}^{(N)} = \frac{1}{2k_{N-1}} \cdot \left[g_{21}^{(N-1)} \cdot (k_{N-1} - k_N) + g_{22}^{(N-1)} \cdot (k_{N-1} + k_N) \right] \cdot e^{-ik_N d_N}; \quad (93)$$

где элементы $g_{ik}^{(N-1)}$ предполагаются вычисленными на предыдущем шаге.

Таким образом, при машинном вычислении матриц для произвольного числа сред можно воспользоваться циклом, обращающимся только к одной подпрограмме, которая будет вычислять элементы последующей матрицы $g_{ik}^{(n+1)}$ на основе элементов предыдущей матрицы $g_{ik}^{(n)}$, причем цикл будет выполняться путем последовательного перебора всех сред от 1 до номера N . При этом в качестве начальной точки следует брать элементы $g_{ik}^{(1)}$, определяемые формулами (34)-(37), после чего переходить к формулам (76)-(79), что уже сделает подпрограмма, затем к формулам (80)-(83) также с помощью той же подпрограммы и так далее, вплоть до получения формул (90)-(93).

9. Переход от цепочки четырехполюсников к волноведущей структуре

Итак, элементы результирующей матрицы $\hat{G}^{(N)}$ можно считать найденными, то есть матрицу полностью определенной.

Однако основная задача состоит в том, чтобы получить векторы, соответствующие входу и выходу волн из структуры, что в матричной записи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} B \\ \dots \\ C \end{pmatrix} = \hat{H}^{(N)} \cdot \begin{pmatrix} A \\ \dots \\ D \end{pmatrix}. \quad (94)$$

То есть теперь надо найденную матрицу $\hat{G}^{(N)}$ преобразовать в матрицу $\hat{H}^{(N)}$. Запишем (88) в алгебраическом виде:

$$A = g_{11}^{(N)} C + g_{12}^{(N)} D; \quad (95)$$

$$B = g_{21}^{(N)} C + g_{22}^{(N)} D. \quad (96)$$

Эти соотношения можно рассматривать как систему уравнений, в которой неизвестными являются A и B , а заданными C и D . В то же время, в волноведущую структуру входят волны A и D , а выходят волны B и C , связь между теми и другими амплитудами определяется единичными выражениями (95)-

(96), поэтому для нахождения B и C следует из системы (95)-(96) выразить эти амплитуды через A и D . Преобразуя систему (95)-(96) к такому виду, получаем:

$$B = \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} A + \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} D; \quad (97)$$

$$C = \frac{1}{g_{11}^{(N)}} A - \frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} D. \quad (98)$$

Таким образом, в соответствии с (94), результирующая матрица $\hat{H}^{(N)}$ принимает вид:

$$\hat{H}^{(N)} = \left(\begin{array}{c|c} \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} & \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \\ \hline \frac{1}{g_{11}^{(N)}} & -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \end{array} \right), \quad (99)$$

где элементы $g_{ik}^{(N)}$ определяются формулами (90)-(93).

10. Схема пошагового определения амплитуд выходящих волн

Приведем схему расчета амплитуд выходящих из структуры волн B и C при условии задания амплитуд входящих волн A и D , распределяя последовательные действия по шагам в виде, удобном для формирования машинного алгоритма.

Будем полагать, что все участки структуры являются однородными, причем длины и волновые числа для каждого участка известны. То есть, если изначально задаются только параметры среды (например, в случае электромагнитных волн – диэлектрическая и магнитная проницаемости), то в качестве предварительного этапа надо решить волновые уравнения в каждом участке среды и найти соответствующие волновые числа.

Прежде всего следует сформировать подпрограмму, рассчитывающую в соответствии с формулами (84)-(87) элементы последующей матрицы $g_{ik}^{(n+1)}$ на основе элементов предыдущей $g_{ik}^{(n)}$. При этом в качестве входных параметров подпрограммы будут выступать волновые числа k_n, k_{n+1} и длины d_n, d_{n+1} предыдущего и последующего участков структуры, а также элементы матрицы $g_{ik}^{(n)}$, выходными же параметрами будут элементы $g_{ik}^{(n+1)}$. Дальнейшая последовательность шагов следующая.

Шаг №1.

Из полной структуры выделить единичные участки и границы между ними. Задать длины участков и определить полное число участков. Для всех участков задать соответствующие волновые числа. Задать амплитуды волн A и D , входящих в структуру.

Шаг №2.

При заданных длине и волновому числу первого участка, найти элементы его матрицы по формулам (34)-(37).

Шаг №3.

Путем обращения к подпрограмме, использующей формулы (84)-(87), по заданным длинам и волновым числам первого и второго участков, а также элементам матрицы первого участка найти элементы матрицы второго участка.

Шаг №4.

Повторение в цикле шага №3 с увеличением всех индексов на единицу, вплоть до последнего участка структуры с номером N , в результате чего будут получены элементы $g_{ik}^{(N)}$ последней результирующей матрицы $\hat{G}^{(N)}$.

Шаг №5.

По заданным амплитудам входящих в структуру волн A и D , с использованием элементов $g_{ik}^{(N)}$, по формулам (97)-(98), найти амплитуды выходящих из структуры волн B и C .

Шаг №6.

Вывести полученные значения B и C , а также другие необходимые по заданию оператора на внешний носитель.

11. Коэффициенты отражения и прохождения

В качестве заключительного шага, теперь, когда амплитуды волн B и C , выходящих из структуры, получены, можно определить коэффициенты отражения и прохождения по энергии, равные отношениям потоков отраженной и проходящей волн к потоку волны падающей [2]. В случае падения одной волны в положительном направлении оси Ox , эти коэффициенты определяются формулами[2, 11, 12]:

$$R_e^{(N, A)} = \left| \frac{B(A)}{A} \right|^2 = \left| \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2; \quad (100)$$

$$T_e^{(N, A)} = \left| \frac{C(A)}{A} \right|^2 \cdot Re\left(\frac{k_N}{k_1}\right) = \left| \frac{1}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \cdot Re\left(\frac{k_N}{k_1}\right), \quad (101)$$

где амплитуды отраженной $B(A)$ и проходящей $C(A)$ волн, определяются первыми слагаемыми формул (97)-(98). Подобные коэффициенты при падении волны в отрицательном направлении оси Ox имеют вид:

$$R_e^{(N, D)} = \left| \frac{C(D)}{D} \right|^2 = \left| -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2; \quad (102)$$

$$T_e^{(N, D)} = \left| \frac{B(D)}{D} \right|^2 \cdot Re\left(\frac{k_1}{k_N}\right) = \left| \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \cdot Re\left(\frac{k_1}{k_N}\right), \quad (103)$$

где амплитуды $B(D)$ и $C(D)$ определяются вторыми слагаемыми формул (97)-(98).

При одновременном падении двух встречных волн A и D на оба конца структуры можно определить коэффициенты выхода, равные сумме отношений

потоков, выходящих в ту и другую стороны, к потокам соответствующих падающих волн:

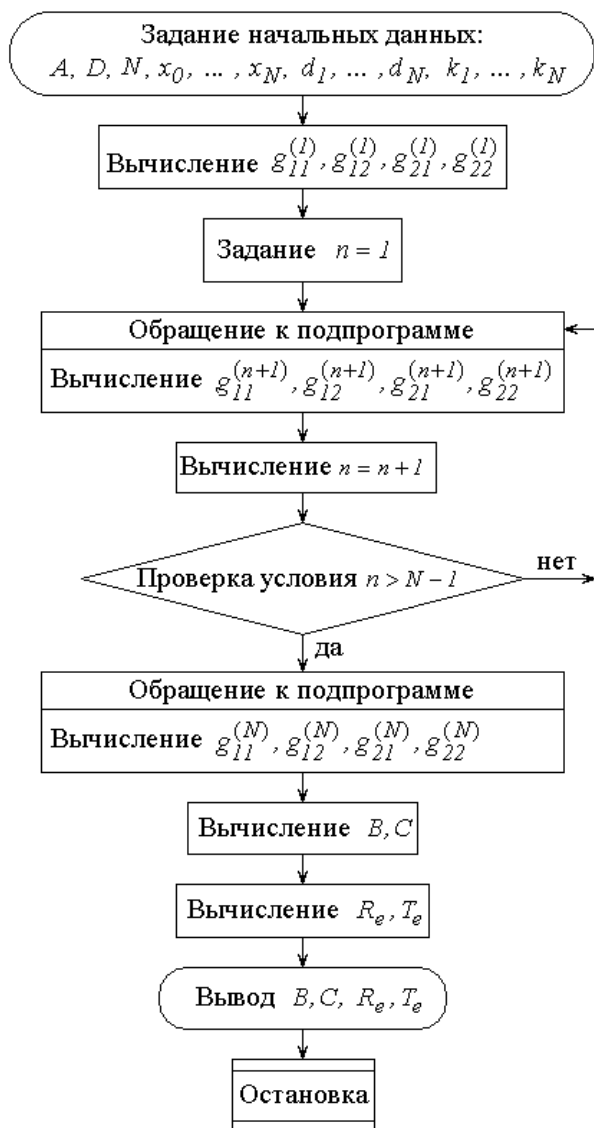
$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 + \left| \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{k_1}{k_N} \right); \\
 &= \left| \frac{g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 + \left| \frac{g_{11}^{(N)} g_{22}^{(N)} - g_{12}^{(N)} g_{21}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{k_1}{k_N} \right); \quad (104)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_e^{(N-)} = R_e^{(N, D)} + T_e^{(N, A)} &= \left| \frac{B(D)}{D} \right|^2 + \left| \frac{C(A)}{A} \right|^2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{k_N}{k_1} \right) = \\
 &= \left| -\frac{g_{12}^{(N)}}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 + \left| \frac{1}{g_{11}^{(N)}} \right|^2 \cdot \operatorname{Re} \left(\frac{k_N}{k_1} \right). \quad (105)
 \end{aligned}$$

12. Блок-схема алгоритма

Для удобства машинного программирования традиционным приемом представление алгоритма является изображение последовательности действий в виде блок-схемы [24, стр.372-419]. Для рассматриваемого алгоритма такая схема приведена на рис. 4.

Основная программа



Подпрограмма



Рис. 4. Блок-схема алгоритма вычисления амплитуд выходящих волн и коэффициентов отражения и прохождения

В таком виде алгоритм позволяет вычислить амплитуды выходящих волн и коэффициенты отражения и прохождения при одном наборе входных параметров, то есть в одной точке.

Если требуется получить зависимость амплитуд или коэффициентов от какого-то одного из входных параметров, меняющегося по заданному закону, например, равномерными шагами, то приведенный алгоритм должен быть включен в цикл, состоящий в пошаговом задании требуемого параметра с соответствующим пошаговым выводом амплитуд или коэффициентов.

13. Обобщение на электродинамику

Приведенный алгоритм получен для случая распространения одномерных волн. Однако такой характер волн не является необходимым. Так, как показано в работах [12, стр.87-90, 25], формулы, описывающие распространение одномерных волн в слоистой структуре, легко могут быть обобщены на случай электромагнитных волн путем соответствующей замены переменных. Так, для перехода от одномерной волны к электромагнитной в случае нормального падения достаточно заменить волновое число k_n на величину, обратную импедансу $1/Z_n$, причем такие замены производятся только в арифметических действиях, а показатели экспонент остаются без изменений. Поскольку ключевыми для алгоритма являются выражения (84)-(87), эти выражения при такой замене принимают вид:

$$g_{11}^{(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n+1}} \left[g_{11}^{(n)} \cdot (Z_n + Z_{n+1}) - g_{12}^{(n)} \cdot (Z_n - Z_{n+1}) \right] e^{ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (106)$$

$$g_{12}^{(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n+1}} \left[-g_{11}^{(n)} \cdot (Z_n - Z_{n+1}) + g_{12}^{(n)} \cdot (Z_n + Z_{n+1}) \right] e^{-ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (107)$$

$$g_{21}^{(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n+1}} \left[g_{21}^{(n)} \cdot (Z_n + Z_{n+1}) - g_{22}^{(n)} \cdot (Z_n - Z_{n+1}) \right] e^{ik_{n+1}d_{n+1}}; \quad (108)$$

$$g_{22}^{(n+1)} = \frac{1}{2Z_{n+1}} \left[-g_{21}^{(n)} \cdot (Z_n - Z_{n+1}) + g_{22}^{(n)} \cdot (Z_n + Z_{n+1}) \right] e^{-ik_{n+1}d_{n+1}}. \quad (109)$$

Аналогичным образом, используя замены, приведенные в работах [12, стр.87-90, 25], можно получить подобные матричные элементы для случаев наклонного падения при продольной и поперечной поляризациях. При этом, однако, использованию алгоритма должно предшествовать вычисление углов преломления волн на границах сред, определяемой в соответствии с законом Снеллиуса [12, стр.71], [2, 25]:

$$\cos \theta_{n+1} = \frac{\sqrt{k_{n+1}^2 - k_n^2 \sin^2 \theta_n}}{k_{n+1}}, \quad (110)$$

при этом волновое число k в случае продольной поляризации заменяется на величину $1/Z_n \cos \theta_n$, а в случае поперечной – на величину $\cos \theta_n / Z_n$. Экспоненты $e^{ik_n d_n}$ в обоих случаях заменяются на $e^{ik_n d_n \cos \theta_n}$, для случая продольной поляризации амплитуда преломленной волны дополнительно умножается на $\cos \theta_n$. В случае поперечной поляризации умножение амплитуд на $\cos \theta_n$ отсутствует. Здесь мы не приводим получающиеся выражения ввиду их тривиальности в сочетании с высокой громоздкостью.

Замечание. В работе [25] для характеристики поляризаций при наклонном падении продольная поляризация названа «вертикальной», а поперечная – «горизонтальной». Такое разночтение происходит из-за различия терминологии, принимаемой в различных источниках. Здесь авторы предпочитают придерживаться терминологии, принятой в работе [12], то есть называть поляризацию продольной и поперечной. Такая терминология предполагает, что при продольной поляризации вектор электрического поля волны лежит в плоскости падения волны, а при поперечной поляризации перпендикулярен этой плоскости.

14. Замечание о возможности других решений

Приведенное решение задачи относится к случаю, когда участки структуры являются однородными, то есть в пределах каждого участка волновое число остается постоянным. При этом волновая функция на каждом участке является экспоненциальной. В случае неоднородных участков, например, если волновое число зависит от координаты, но такая зависимость для всех участков имеет одинаковый характер, волновые уравнения в пределах участков могут иметь другие решения, отличные от экспоненты. Однако в любом случае, если волновое уравнение имеет второй порядок, то будут два решения,

соответствующие волнам противоположных направлений. При этом формулы, используемые алгоритмом, в том числе элементы матриц распространения и связи, будут другими, возможно, более громоздкими, так как будут включать в себя производные от волновых функций, однако общая структура алгоритма, останется прежней. Для более точного выяснения этого вопроса можно пройти тем же путем что и здесь, то есть сначала найти элементы результирующей матрицы для двух, затем трех и более сред, после чего выделить общность структуры получаемых элементов и обобщить такую структуру на произвольное число сред. Переход от матрицы $\hat{G}^{(N)}$ к матрице $\hat{H}^{(N)}$ также будет сходным, хотя и претерпит некоторые изменения. Подобное выяснение этих вопросов может составить интерес для отдельной работы.

Заключение

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему.

Предложен матричный алгоритм расчета отражения и прохождения одномерной волны через многослойную структуру. Рассмотрен случай одновременного падения на структуру двух волн во встречных направлениях. Структура представлена в виде последовательно следующих друг за другом однородных слоев с различающимися параметрами. В основу метода положена аналогия между распространением волны в многослойной волноведущей структуре и в цепочке, состоящей из последовательно соединенных четырехполосников. Выявлены два вида четырехполосников, соответствующих внутренним средам структуры и границам между ними. Для четырехполосника, соответствующего среде, получена матрица распространения, для четырехполосника, соответствующего границе, получена матрица связи. Полная структура представлена в виде цепочки из чередующихся друг за другом четырехполосников распространения и связи. Получена результирующая матрица структуры, образованная последовательным произведением матриц цепочки. Отмечено соответствие полученной матрицы задаче о прохождении сигнала с одного конца цепочки на другой без учета возможности встречного

распространения сигналов. Полученная результирующая матрица преобразована в матрицу, соответствующую встречному распространению двух сигналов.

Результаты, полученные на модели четырехполюсников, обобщены на случай распространения одномерных волн в многослойной структуре. На основе решения волнового уравнения для каждого однородного участка волноведущей структуры в качестве основного параметра распространения выбрано волновое число. При этом граничные условия поставлены в виде равенстве по обе стороны границы волновых функций и их первых производных по координате. Получены матрицы распространения и связи, соответствующие однородным участкам волноведущей структуры и границам между ними. Получена результирующая матрица, образованная последовательным произведением матриц распространения и связи для структуры в целом.

Выполнен анализ элементов результирующей матрицы для случаев структуры, состоящей из двух и трех сред, разделенных границами. Показано, что элементы результирующей матрицы для трех сред можно получить из элементов результирующей матрицы для двух сред. Полученные результаты распространены на произвольное число сред. Показано, что элементы результирующей матрицы для структуры с произвольным наперед заданным числом сред можно получить из элементов результирующей матрицы для структуры, соответствующей на единицу меньшему числу сред.

На основе схемы получения элементов последующей матрицы из элементов предыдущей предложен алгоритм, позволяющий рекуррентным путем получить результирующую матрицу для любого произвольного числа сред. Отмечено соответствие полученной матрицы задаче о прохождении волн с одного конца структуры на другой без учета возможности встречного распространения волн. Полученная на основе реализации алгоритма результирующая матрица преобразована в матрицу, соответствующую встречному распространению двух волн, падающих на оба конца структуры.

Предложенный алгоритм представлен в виде последовательности шагов. Начальный шаг состоит в задании параметров структуры, таких как длины

отдельных участков, а также волновых чисел, соответствующих распространению волн в этих участках. Следующие шаги включают в себя рекуррентный расчет элементов последующих результирующих матриц на основе предыдущих, который выполняется в цикле. Конечным шагом является преобразование полученной матрицы в результирующую матрицу для встречного распространения падающих волн. На основе этой матрицы рассчитываются амплитуды выходящих из структуры волн через амплитуды входящих, а также коэффициенты отражения и прохождения по энергии для структуры в целом.

Для удобства машинного программирования представлена блок-схема реализующей алгоритм программы, включающая в себя подпрограмму, рассчитывающую элементы последующей матрицы из элементов предыдущей. Приведены рекуррентные формулы, позволяющие обобщить предложенный алгоритм на распространение электромагнитных волн для случая нормального падения волны на поверхность структуры. Высказаны рекомендации, позволяющие обобщить предложенный алгоритм на волны, не имеющие гармонического характера, в том числе описываемые волновыми уравнениями с переменными коэффициентами и имеющими более высокий порядок.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, частично поддержана грантом РФФИ: № 20-55-53019 ГФЕН_a, грантами РНФ: № 21-72-20048 и № 21-47-00019 и грантом Правительства Республики Коми и РФФИ № 20-42-110004, р_a.

Литература

1. Хвольсон О.Д. *Курс физики*. Берлин, Госиздат РСФСР. 1923. Т.2.
2. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. Москва, Наука. 1970.
3. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах*. Москва, Наука. 1973.
4. Ландсберг Г.С. *Оптика*. Москва, Наука. 1976.

5. Поль Р.В. *Введение в оптику*. Москва-Ленинград, ОГИЗ Гос. изд. техн.-теор. лит. 1947.
6. Кизель В.А. *Отражение света*. Москва, Наука. 1973.
7. Бреховских Л.М., Годин О.А. *Акустика слоистых сред*. Москва, Наука. 1989.
8. Розенберг Г.В. *Оптика тонкослойных покрытий*. Москва, Гос.изд. физ.-мат.лит. 1958.
9. Oksanen M.I., Hanninen J., Tretyakov S.A. Vector circuit method for calculating reflection and transmission of electromagnetic waves in multilayered chiral structures. *IEEE Proceedings. H.* 1991. V.138. №7. P.513-520.
10. Sarychev A.K., Bergman D.J., Yagil Y. Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films. *PR(B)*. 1995. V.51. №8. P.5366-5385.
11. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через тонкие слои и пленки*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2010.
12. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2011.
13. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С. Изменение типа резонансного отражения электромагнитного излучения в структурах «нанометровая металлическая пленка – диэлектрик». *Письма в ЖТФ*. 2007. Т.33. №2. С.13-22.
14. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С. Измерение толщины нанометровых слоев полупроводника в структурах металл-полупроводник по спектрам отражения и прохождения электромагнитного излучения. *ЖТФ*. 2006. Т.76. № 5. С.112-117.
15. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода исключения для анализа распространения волн в многослойных средах со случайным распределением параметров слоев. *РЭ*. 2013. Т.58. №12. С.1149-1159.
16. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть шестая. Метод исключения*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2015

17. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритм определения амплитуд отраженных и проходящих волн при симметричном падении двух встречных волн на многослойную неоднородную структуру. *РЭ*. 2012. Т.57. №1. С.67-79.

18. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при падении встречных волн на многослойную структуру со ступенчатой неоднородностью. *РЭ*. 2013. Т.58. №1. С.16-27.

19. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Два простых алгоритма определения амплитуд внешних и внутренних колебаний при распространении встречных волн в многослойной неоднородной структуре. *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2013. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan 13/11/text.pdf>

20. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть пятая. Алгоритмические методы*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2014

21. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода результирующей матрицы для расчета отражения и прохождения электромагнитных волн при падении на многослойные феррит-металл-диэлектрические структуры. *Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2012. С.187-200.

22. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры Часть вторая. Метод матрицы*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2012

23. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука. 1972.

24. Скотт Т. *Основы программирования. Курс программированного обучения*. Москва, Сов.Радио. 1965.

25. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Эквивалентность скалярного одномерного и векторного электродинамического подходов к задаче

о падении волны на пластину, решаемой методами прямым и усреднения. *РЭ.*
2010. Т.55. №2. С.133-143.

Для цитирования:

Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритмический метод расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Матричный алгоритм. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.8.5>