

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.8.9>

УДК: 537.874; 537.624

АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ МЕТОД РАСЧЕТА ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНУЮ СТРУКТУРУ. ЧАСТЬ 2. ПАДЕНИЕ ВОЛНЫ НА НАКЛОННЫЙ БАРЬЕР

И.В.Антонец¹, В.Г.Шавров², В.И.Щеглов²

¹Сыктывкарский государственный университет им. П.Сорокина,
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55
²Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН,
125009, Москва, ул. Моховая, 11-7

Статья поступила в редакцию 5 июля 2022 г.

Аннотация. На основе матричного алгоритма расчета отражения и прохождения одномерной волны через многослойную структуру решена задача о падении волны на наклонный барьер. Барьер представлен в виде ступенчатой структуры, состоящей из разделенных границами однородных участков. В качестве основного параметра, определяющего свойства волны на данном однородном участке, принято волновое число. Наклонному характеру барьера соответствует линейное возрастание волнового числа ступенчатым образом. Показано, что коэффициент отражения при максимальной длине барьера является достаточно малым и возрастает до максимума при обращении длины барьера в ноль. Зависимость коэффициента прохождения от длины барьера при этом имеет зеркально симметричный вид относительно уровня 0,5 отн. ед., при этом сумма коэффициентов отражения и прохождения при любой длине барьера всегда сохраняется равной единице. По характеру зависимости коэффициента отражения от величины ступеньки волнового числа выделены три области: первая, когда зависимость является регулярной без осцилляций, вторая, когда зависимость является регулярной осциллирующей и третья, когда зависимость

имеет нерегулярный осциллирующий характер, приближающийся к хаотическому тем сильнее, чем высота ступеньки больше. В качестве параметра, разграничивающего области, выявлены два критических значения высоты ступеньки волнового числа, первое – соответствующее переходу от плавной зависимости к осциллирующей и второе – соответствующее переходу от осциллирующей зависимости к хаотической. Установлено, что первое критическое значение ступеньки волнового числа соответствует равенству между средней длиной волны и полной длиной барьера. Второе критическое значение ступеньки волнового числа соответствует равенству между средней длиной волны и длиной единичной ступеньки по длине барьера. Для интерпретации наблюдаемых явлений высказано предположение об их интерференционной природе. Исследованы зависимости обоих критических значений ступеньки волнового числа от начальной длины барьера. Показано, что обе зависимости с высокой точностью (доли процента) следуют закону обратной пропорциональности, причем различный уровень кривых определяется соотношением между длиной барьера в целом и длиной его единичного участка. Исследована связь между начальной длиной барьера и величиной ступеньки волнового числа. Выявлен инвариант, равный половине отношения начальной длины барьера к полной длине структуры, умноженного на величину ступеньки волнового числа. Рассмотрено отражение и прохождение волны при большой длине структуры. Обнаружен периодический характер зависимостей отражения и прохождения от длины барьера. На зависимостях выявлены резкие пики, высота которых приближается к предельной, соответствующей нулевому значению длины барьера. Установлено, что расстояние между пиками по длине барьера обратно пропорционально высоте ступеньки волнового числа. Отмечено, что значение периода длины барьера, соответствующего резким пикам, значительно (до двух порядков) превышает среднюю длину волны, определяемую полным перепадом волнового числа в пределах всего барьера. Для интерпретации периодического характера зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера предложена модель

последовательных преотражений. Установлено, что синфазность выходящих из структуры волн достигается при совпадении удвоенной длины барьера с длиной распространяющейся волны.

Ключевые слова: распространение волн, многослойная структура, коэффициенты отражения и прохождения.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, частично поддержана грантом РФФИ: № 20-55-53019 ГФЕН_а, грантами РНФ: № 21-72-20048 и № 21-47-00019 и грантом Правительства Республики Коми и РФФИ № 20-42-110004, р_а.

Автор для переписки: Щеглов Владимир Игнатьевич, vshcheg@cplire.ru

Введение

Интерес исследователей к вопросам распространения волн в многослойных средах отличается значительным многообразием [1-10]. Однако теоретическая трактовка в большинстве случаев обращается к структурам, содержащим сравнительно небольшое число слоев – не более двух-трех.

Рассмотрение случаев с действительно большим числом слоев (десятки и более), обычно проводится для структур, параметры которых меняются периодическим образом [2, стр. 92-95].

В то же время, значительное число существующих в природе и технике сред не только не являются периодическими, но и имеют существенные неоднородности.

Для расчета отражения и прохождения волн через такие среды традиционно используется представление плавно меняющейся неоднородности в виде совокупности однородных слоев, свойства которых от слоя к слою меняются ступенчатым образом [3, 7].

Наиболее последовательным методом расчета распространения волн в ступенчато неоднородных средах является прямой метод, состоящий в решении

волновых уравнений в каждом слое по отдельности с последующим сшиванием полученных решений на границах [11, 12].

Высокая трудоемкость прямого метода, обусловленная необходимостью раскрытия определителей высоких порядков, способствовала предложению различных методов последовательных вычислений, в которых расчет проводится не по всей структуре сразу, а постепенно, переходя от предыдущей ступеньки к последующей.

В первую очередь к таким методам следует отнести метод импеданса [3, 7], а также метод матрицы [2, 13-16]. Однако практическая реализация обоих этих методов обычно ограничивается небольшим числом слоев, например, пленка на подложке, или две пленки.

Для значительного числа слоев в работах [17-20] предложен метод пошагового алгоритма, позволяющий простыми средствами получать аналитические выражения для произвольного числа слоев.

В работе [21] предложен метод исключения, предполагающий разбиение структуры на соответствующие слои ячейки, по которым производится проход в прямом и обратном направлениях. Высокая универсальность этого метода позволила рассчитать отражение и прохождение волны через структуру, параметры слоев которой меняются случайным образом [21, 22].

Однако, несмотря на универсальность метода исключения и высокую простоту метода алгоритма, первый в идеологическом отношении довольно сложен, а второй предназначен, в основном, для получения аналитических выражений. Машинная реализация того и другого методов является достаточно сложной. В связи с этим встает задача поиска метода, являющегося универсальным и допускающего простую машинную реализацию.

В работе [23] на основе матричного метода получен простой алгоритм вычисления коэффициентов отражения и прохождения через ступенчатую структуру, включающую в себя значительное число сред, параметры которых могут меняться произвольным образом.

Настоящая работа, являющаяся продолжением работы [23]. В качестве примера реализации предложенного алгоритма, обратимся к задаче, решение которой с достаточной точностью прямым методом заведомо недостижимо по причине крайней громоздкости раскрытия требуемых детерминантов. Рассмотрим применение матричного алгоритма к расчету падения волны на барьер, высота которого по ходу распространения волны нарастает.

1. Геометрические и волноведущие параметры структуры

Будем рассматривать задачу о распространении одномерной волны через «наклонный барьер», который представим в виде структуры, содержащей 16 однородных слоев, то есть участков, расположенных друг за другом вдоль оси Ox . Нумерацию участков введем в положительном направлении оси Ox от 1 до 16. Будем считать, что волновое число от участка к участку линейно возрастает ступенчатым образом. В силу однородности участков, волновые числа всех волн являются действительными. Ограничимся случаем падения на структуру только одной волны, распространяющейся в положительном направлении оси Ox . Амплитуду такой волны обозначим через A .

Схема зависимости волнового числа от координаты иллюстрируется рис. 1. Рассмотрены восемь различных вариантов зависимости волнового числа от координаты, обозначенные цифрами от 1 до 8 (в кругах) на левом краю рисунка. Весь расчет проводится далее в условных (относительных) единицах, поэтому конкретная размерность не указывается.

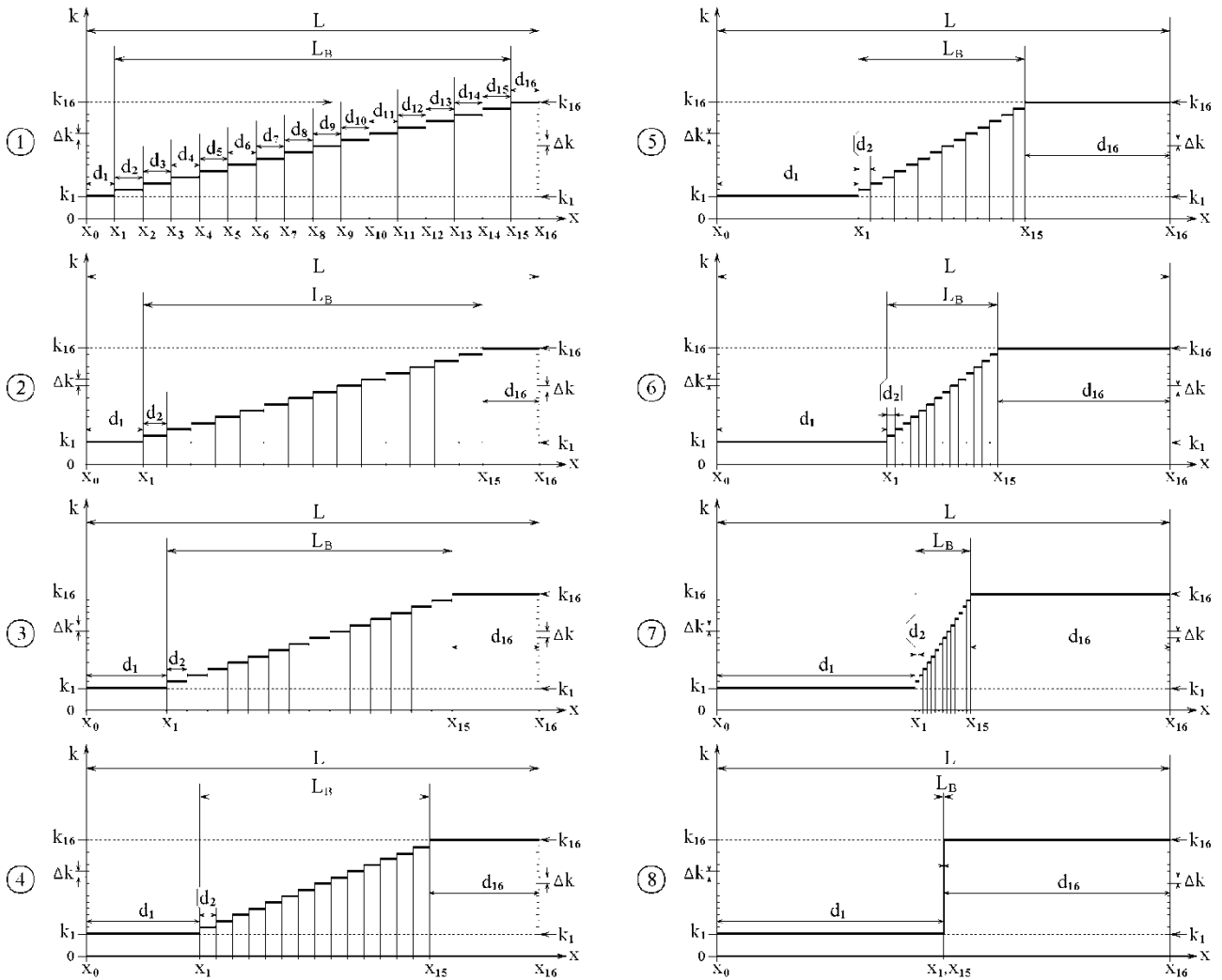


Рис. 1. Схема зависимости волнового числа от координаты для различных вариантов многослойной структуры

Вся структура имеет полную длину вдоль оси Ox , равную 16 условным единицам, начало структуры соответствует координате x_0 , конец – координате x_{16} . Структура содержит 16 следующих друг за другом пронумерованных от 1 до 16 участков, начальные и конечные координаты которых обозначены через x_{n-1} и x_n , где n – номер участка, то есть $n = 1, 2, \dots, 16$. Длины участков обозначены через d_n , так что:

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \quad (1)$$

Соответствующие участкам волновые числа обозначены через k_n , так что k_n – волновое число волны на участке n , то есть между координатами x_{n-1} и

x_n . Таким образом, волновое число участка 1 обозначается через k_1 , волновое число участка 16 обозначается через k_{16} .

По мере увеличения номера участка волновые числа увеличиваются ступенчатым образом с начальной величины k_1 при величине единичной ступеньки Δk , так что полное значение волнового числа на участке с номером n равно:

$$k_n = k_1 + \Delta k \cdot (n - 1), \quad (2)$$

где отсчет начинается с $n = 2$ и продолжается до $n = 16$.

В проводимом далее численном расчете рассматривается частный случай, когда

$$k_1 = \Delta k, \quad (3)$$

так что

$$k_n = \Delta k \cdot n. \quad (4)$$

Такое условие принято для простоты рассмотрения. В общем же случае k_1 в формуле (2) может быть произвольным.

В рассматриваемом на рис. 1 частном случае длины первого и последнего участков положены равными друг другу, то есть

$$d_1 = d_{16}. \quad (5)$$

Длины всех остальных участков равны между собой, однако в общем случае от длин участков 1 и 16 могут отличаться. Будем считать, что совокупность участков от 2 до 15 по величине волнового числа образует «барьер», высота которого постепенно нарастает. Длина L_B такого барьера, остающаяся за вычетом из полной длины структуры L длин первого и последнего участков d_1 и d_{16} , соответственно равна:

$$L_B = L - d_1 - d_{16}. \quad (6)$$

Число участков, образующих барьер равно $16 - 2 = 14$. Таким образом, часть структуры от участка 2 до участка 15, то есть между координатами x_1 и x_{15} ,

разделена на 14 равных по длине участков. Длину таких равных участков от 2 до 15 обозначим через Δd , то есть:

$$d_2 = d_2 = \dots = d_{15} = \Delta d. \quad (7)$$

Ввиду равенства длин участков от 2 до 15, при условии линейного увеличения волнового числа, длина барьера L_B , равна величине в 14 раз большей, чем Δd :

$$L_B = d_2 + d_3 + \dots + d_{15} = 14 \cdot \Delta d. \quad (8)$$

Поскольку условиями рассматриваемой далее задачи задаются полная длина структуры L и длины первого и последнего участков d_1 и d_{16} , а величина Δd является вторичной, то она может быть определена по формуле:

$$\Delta d = L_B / 14 = (L - d_1 - d_{16}) / 14. \quad (9)$$

Перечисленные геометрические параметры структуры приведены в таблице №1.

Таблица №1. Геометрические параметры структуры

№	d_1	$\Delta d (d_2, \dots, d_{15})$	d_{16}	L_B
1	1,0000	1,0000	1,0000	14,0000
2	2,0000	0,8571	2,0000	12,0000
3	3,0000	0,7143	3,0000	10,0000
4	4,0000	0,5714	4,0000	8,0000
5	5,0000	0,4286	5,0000	6,0000
6	6,0000	0,2857	6,0000	4,0000
7	7,0000	0,1429	7,0000	2,0000
8	8,0000	0,0000	8,0000	1,0000

В первом столбце таблицы приведены номера вариантов структуры, отмеченные на рис. 1 цифрами в кругах. Во втором столбце приведена длина первого участка. В третьем столбце – длины участков от 2 до 15, внутри каждого варианта структуры равные друг другу, но между различными вариантами

структуры – отличные. В четвертом столбце таблицы приведена длина последнего участка, имеющего номер 16. Длина этого участка равна длине первого. В пятом столбце таблицы приведена суммарная длина L_B всех участков от 2 до 15, определяемая формулой (9).

Из рассмотрения рис. 1, в сочетании с данными таблицы №1, можно видеть, что по мере увеличения координаты x волновое число сначала, в пределах первого участка, не меняется, затем на участках 2 – 15 ступенчатым образом растет, после чего на последнем участке №16 снова остается постоянным. При этом ступеньки «лестницы» по высоте всегда остаются постоянными, а по длине в пределах каждого варианта структуры также сохраняются, но по мере увеличения длины участков 1 и 16 становятся короче.

Такую лестничную структуру, учитывая малость высоты отдельных ступенек Δk относительно полного перепада волнового числа от k_1 до k_{16} , можно рассматривать как приближение плавного возрастания волнового числа на ограниченном участке структуры от x_1 до x_{15} . При этом минимум волнового числа с учетом условия (3) равен Δk , а максимум равен $16 \cdot \Delta k$. То есть на структуре по волновому числу имеется определенный «барьер», высота которого остается постоянной, а крутизна увеличивается от достаточно плавной (структура №1 на рис. 1) до ступенчатого перепада (структура №8 на рис. 1) с резким скачком волнового числа от k_1 до k_{16} , происходящего в одной точке, где координаты x_1 и x_{15} сливаются.

2. Дискретная вариация длины и крутизны барьера

Из рис. 1 можно видеть, что уменьшение длины барьера L_B от эюры №1 до эюры №8 эквивалентно увеличению крутизны барьера. До есть на эюре №1 барьер достаточно плавный, тогда как на эюре №8 – обращается в резкий перепад по волновому числу от минимума Δk до максимума $16 \cdot \Delta k$.

Из качественного рассмотрения можно полагать, что увеличение крутизны барьера должно приводить к увеличению отражения падающей волны и уменьшению ее прохождения.

Количественное рассмотрение, то есть расчет коэффициентов отражения и прохождения, выполнялся в соответствии с алгоритмом, приведенном в работе [23]. Программа расчета была составлена на языке FORTRAN [24, стр.140-259], содержала около 160 строк, в том числе одну подпрограмму, содержащую 12 строк. Шаг по координате при d_1 меньше 6 отн. ед. составлял от 0,02 отн. ед., при d_1 от 6 до 7 отн. ед. составлял 0,001 отн. ед. Время счета на компьютере с частотой 2400 МГц составляло от долей секунды до 2-3 секунд.

Для расчета коэффициентов отражения и прохождения по энергии использовались формулы (100)-(101) из работы [23], для 16 слоев имеющие вид:

$$R_e^{(16, A)} = \left| \frac{B(A)}{A} \right|^2; \quad (10)$$

$$T_e^{(16, A)} = \left| \frac{C(A)}{A} \right|^2 \cdot Re \left(\frac{k_{16}}{k_1} \right), \quad (11)$$

где A – амплитуда падающей волны, $B(A)$ и $C(A)$ – амплитуды отраженной и проходящей волн, при $D = 0$ определяемые первыми слагаемыми формул (97), (98) работы [23].

Поскольку формулы расчета элементов матрицы \hat{G} типа (84)–(87) и (90)–(93) работы [23], а также формулы для определения B и C вида (97)–(98) работы [23] содержат экспоненты с мнимыми показателями, весь расчет проводился с числами в комплексной форме.

Результаты расчета представлены на рис. 2, где приведены зависимости коэффициентов отражения и прохождения по энергии R_e и T_e (для простоты обозначений верхние индексы опущены) от длины барьера L_B . По рисунку слева направо величина L_B уменьшается, то есть крутизна перепада

увеличивается. Приведены зависимости при различных значениях интервала волнового числа, а также начального и конечного волновых чисел.

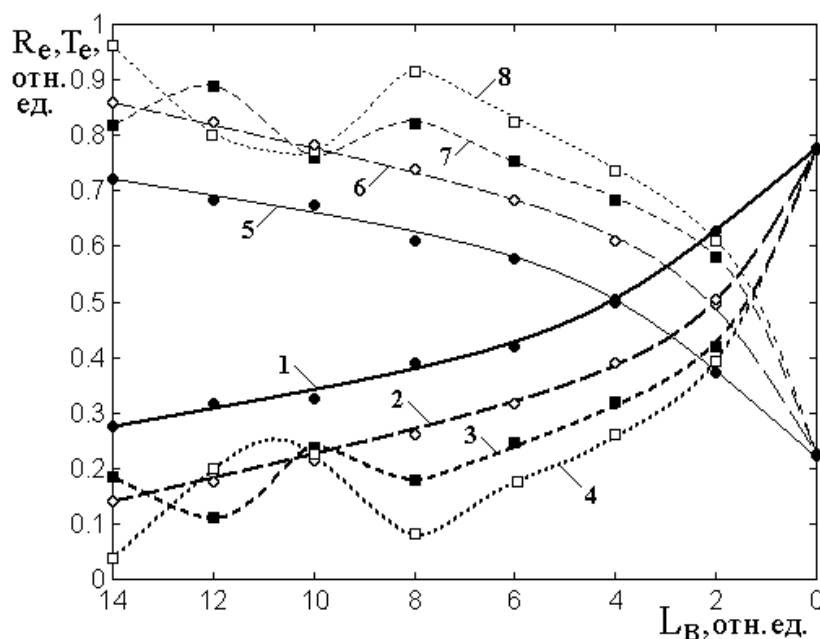


Рис. 2. Зависимости коэффициентов отражения и прохождения по энергии R_e и T_e от длины барьера L_B при различных значениях интервала волнового числа Δk , а также начального и конечного волновых чисел:

$$1, 5 - \Delta k = 0,10, k_1 = 0,10, k_{16} = 1,60;$$

$$2, 6 - \Delta k = 0,20, k_1 = 0,20, k_{16} = 3,20;$$

$$3, 7 - \Delta k = 0,30, k_1 = 0,30, k_{16} = 4,80;$$

$$4, 8 - \Delta k = 0,40, k_1 = 0,40, k_{16} = 6,40.$$

Точки соответствуют восьми позициям по L_B на рис.1. Утолщенные линии 1-4 соответствуют коэффициенту отражения R_e , тонкие 5-6 – коэффициенту прохождения T_e

Все зависимости для коэффициента отражения по мере уменьшения величины L_B (слева направо), то есть увеличения крутизны перепада волновых чисел, возрастают, стремясь к одной и той же величине 0,7785. Коэффициенты прохождения при этом убывают, стремясь к величине 0,2215. Числовые значения этих величин соответствуют коэффициентам отражения и прохождения для одной границы [11, 12], разделяющей две среды с волновыми числами k_1 и k_{16} (участвуют только эти два числа, так как промежуточные среды отсутствуют):

$$R_e|_{L_B=0} = \left| \frac{k_{16} - k_1}{k_{16} + k_1} \right|^2; \quad (12)$$

$$T_e|_{L_B=0} = \left| \frac{2k_1}{k_{16} + k_1} \right|^2 \cdot Re\left(\frac{k_{16}}{k_1}\right), \quad (13)$$

Путем прямой проверки можно убедиться, что при принятом выше условии (3), согласно которому $k_1 = \Delta k$ и $k_{16} = 16 \cdot \Delta k$, эти величины при любой величине Δk сохраняют значения 0,7785 и 0,2215.

Из рисунка 2 видно, что зависимости коэффициента прохождения (5-8) являются зеркальным отражением относительно уровня 0,5 зависимостей для коэффициента отражения (1-4). Проверка показывает, что сумма того и другого коэффициентов равна единице:

$$R_e + T_e = 1, \quad (14)$$

что является выражением закона сохранения энергии.

Кривые для коэффициента отражения (1–4) по мере увеличения перепада волнового числа Δk , приходящегося на одну ступеньку, проходят тем ниже, чем больше этот перепад. В то же время, чем единичный перепад больше, тем больше и полный перепад на длине барьера, равный $16 \Delta k$, так что отражение при увеличении Δk отражение должно увеличиваться. То есть вся кривая при увеличении Δk должна подниматься вверх. Однако движение правого конца кривой вверх ограничено точкой $R_e(L_B = 0) = 0,7785$, поэтому основная часть кривой вынуждена снижаться. Таким образом, условие (3), то есть $k_1 = \Delta k$, является как бы условием нормировки, заставляющим правые концы всех кривых сходиться в одну точку, определяемую формулой (12). При этом, чем больше единичный перепад Δk , тем крутизна правой части кривой становится больше, так что основная ее часть вынуждена располагаться ниже. Поэтому кривая 2 проходит ниже кривой 1, а кривая 2 – ниже кривой 3, и так далее. Коэффициент прохождения ведет себя зеркальным образом, поэтому кривые 5-

8, будучи вынужденными приходиться при $L_B \rightarrow 0$ в точку $T_e(L_B = 0) = 0,2215$, проходят тем выше, чем Δk больше, то есть кривая 6 проходит выше кривой 5, кривая 7 – выше кривой 6 и так далее.

3. Плавная вариация длины барьера

Из рис. 2 можно видеть, что кривые 1 и 2, а также соответственно 5 и 6 на всем протяжении сохраняют монотонный характер, тогда как кривые 3 и 7, а также 4 и 8 при L_B больше 0,8 (то есть левее этого значения) имеют осциллирующий характер. На кривых 4 и 8 осцилляции выражены заметно сильнее, чем на кривых 3 и 7. Для более подробного выявления характера осцилляций было предпринято исследование коэффициентов отражения и прохождения не в отдельных точках, соответствующих ступенчатому изменению длины барьера, представленному на рис. 1 и нашедшему свое отражение при построении кривых на рис. 2, а при плавном непрерывном изменении длины барьера L_B .

При расчете использовался алгоритм, предложенный в работе [23]. Алгоритм, в том виде, как он там описан (разделы 10, 12), направлен на получение коэффициентов отражения и прохождения при одном фиксированном значении длин первого и последнего участков d_1 и d_{16} , длины же остальных участков определяются путем деления длины барьера L_B на 14 в соответствии с таблицей №1. Для того, чтобы получить плавные зависимости коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, алгоритм выполнялся в цикле при изменении d_1 достаточно мелкими шагами. В качестве оптимального с точки зрения достаточной точности и малого времени счета при изменении полной длины первого участка от 1 до 8 было принято значение $\Delta d_1 = 0,02$. При этом время счета составляло 2–4 сек.

На рис. 3 представлены результаты расчета зависимости коэффициента отражения от длины барьера при различных значениях единичной ступеньки волнового числа.

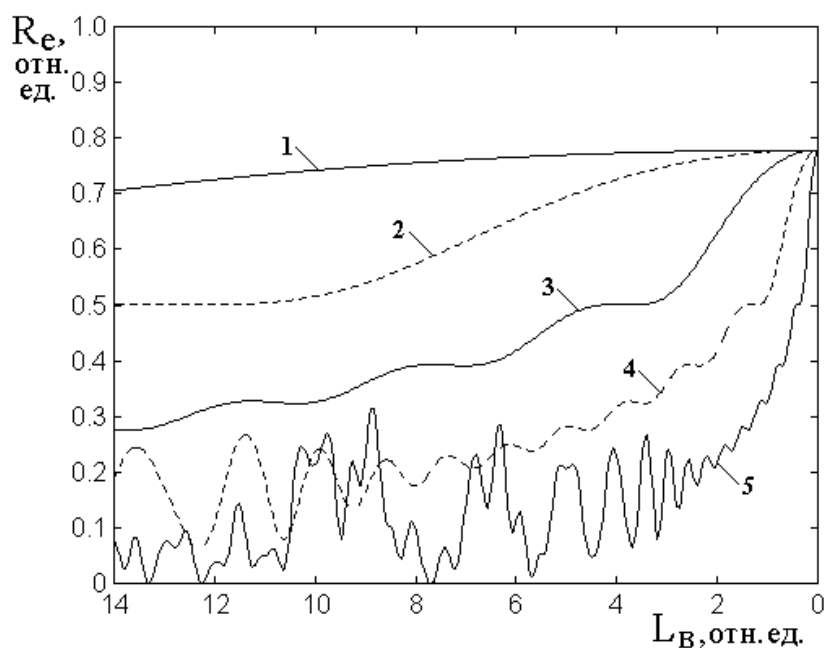


Рис. 3. Зависимости коэффициента отражения от длины барьера при различных значениях единичной ступеньки волнового числа Δk : 1 – 0,01; 2 – 0,03; 3 – 0,10; 4 – 0,30; 5 – 1,00. Начальная длина барьера L_{B0} равна 14 отн. ед. и далее уменьшается до нуля

Можно видеть, что зависимости ведут себя образом, сходным с представленными на рис. 2 кривыми 1–4. Взаимное расположение кривых и стремление их в точку 0,7785 при $L_B \rightarrow 0$ также соответствуют тому же рисунку. Однако здесь осцилляции проявляются значительно сильнее.

Кривая 1, соответствующая малому значению ступеньки Δk , то есть малому перепаду барьера в целом, равному 0,15 отн. ед. (от Δk до $16 \Delta k$), осцилляций не имеет.

На кривой 2, соответствующей высоте барьера 0,45 отн. ед., уже наблюдается заметный изгиб, который можно трактовать как одну осцилляцию с периодом, равным 14 отн. ед. На кривой 3, соответствующей высоте барьера 1,50 отн. ед., уже наблюдается 4 четкие осцилляции с периодом около 3,5 отн. ед. На кривой 4, соответствующей высоте барьера 4,50 отн. ед. количество

осцилляций возрастает до 10, а период падает до 0,14 отн. ед., однако осцилляции остаются еще довольно регулярными. Амплитуда осцилляций на кривых 2–4, в основном, имеет одинаковый порядок, составляя от 0,05 до 0,20 отн. ед.

На кривой 5, соответствующей высоте барьера 16,00 отн. ед., амплитуда осцилляций возрастает почти на порядок (полный размах до 0,3 отн. ед.), период падает до 0,05 отн. ед., а структура приобретает в значительной степени случайный характер. Контрольная проверка показывает, что при дальнейшем увеличении перепада волнового числа (до $\Delta k = 10$) амплитуда осцилляций еще несколько нарастает (до 20%), период уменьшается до 0,005 отн. ед., а характер в целом приближается к хаотическому.

Замечание. Наблюдаемый здесь близкий к хаотическому характер зависимостей не является «хаосом» или «динамическим хаосом» в традиционно принятой трактовке нелинейных колебаний. Согласно такой трактовке, «хаотические режимы характеризуются нерегулярным, похожим на случайный процесс, изменением динамических переменных во времени» [25, стр. 25]. Здесь роль переменой играют коэффициенты отражения и прохождения, в роль времени – длина барьера. В то же время, наблюдаемые зависимости типа показанных кривыми 5 на рис. 3 и рис. 4 носят заметный элемент случайности, свойственный классическим хаотическим колебаниям. Поэтому для упрощения терминологии, будем далее называть такие зависимости «хаосом». Забегая вперед, заметим, что наблюдаемый здесь «хаос» может иметь элементы периодичности, проявляющиеся при большой длине структуры. Свойство периодичности также не соответствует классическому определению хаоса, так что к используемому здесь термину «хаос» следует относиться с определенной осторожностью. Более подробно о периодичности будет сказано в разделе 8.

Возвратимся теперь к основному изложению. Соответствующие рис. 3 зависимости для коэффициента прохождения от длины барьера при различных значениях ступеньки волнового числа показаны на рис. 4.

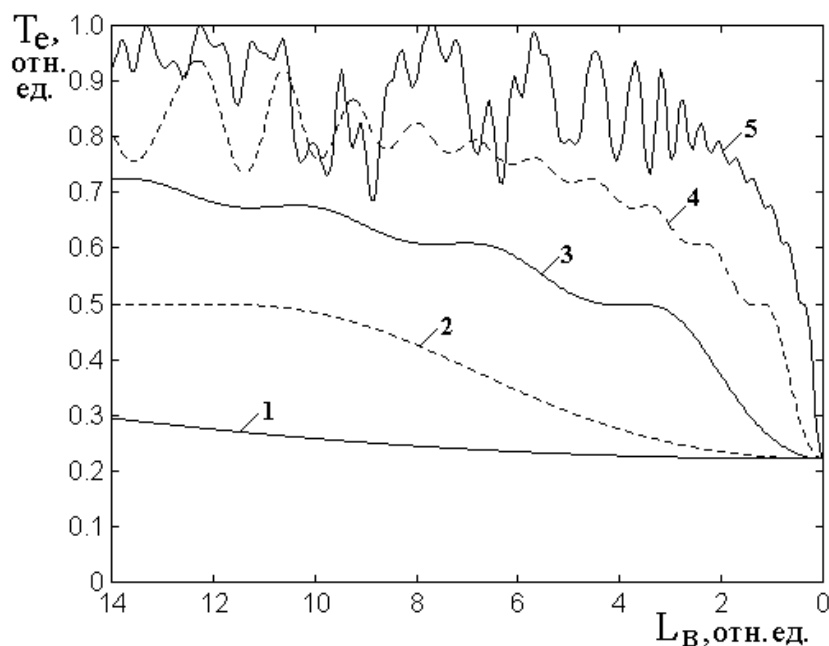


Рис.4. Зависимости коэффициента прохождения от длины барьера при различных значениях единичной ступеньки волнового числа Δk : 1 – 0,01; 2 – 0,03; 3 – 0,10; 4 – 0,30; 5 – 1,00. Начальная длина барьера L_{B0} равна 14 отн. ед. и далее уменьшается до нуля

Видно, что здесь кривые зеркальным образом повторяют подобные кривые для коэффициента отражения, представленные на рис. 3. Характер кривых остается подобным характеру кривых 5–8 на рис. 2. Стремление к величине 0,2215 отн. ед. при $L_B \rightarrow 0$ также сохраняется. Контрольная проверка показывает, что условие равенства суммы коэффициентов отражения и прохождения единице (14) также выполняется с высокой точностью, что соответствует закону сохранения энергии.

Таким образом, из общего рассмотрения рис. 3 и рис. 4 следует, что осцилляции являются неотъемлемым свойством распространения волны через барьер ступенчатого характера. Можно полагать, что такие осцилляции, нарастающие по мере увеличения перепада волнового числа Δk , обусловлены интерференционными явлениями при распространении волны за счет многократных переотражений на границах между однородными участками.

Из рассмотрения полной геометрии волноведущей структуры, представленной на рис. 1, можно видеть, что среди геометрических параметров можно выделить три характерных размера:

1 – длина первого участка d_1 , то есть от начала структуры до начала барьера;

2 – длина барьера L_B ;

3 – длина единичного участка внутри барьера Δd .

Кроме того могут выступать в качестве резонансных, приводящих к образованию стоячих волн, различные комбинации перечисленных размеров в той или иной совокупности. Можно полагать, что именно такое обстоятельство в наибольшей степени проявляется при больших значениях перепада волнового числа, что и приводит к хаотизации зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера.

Для более подробного выяснения роли характерных размеров в формировании зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, рассмотрим перечисленные выше факторы по отдельности.

4. Вариация длины первого участка

Вариация длины первого участка по существу означает перемещение барьера по длине структуры.

Как будет ясно из дальнейшего, длина барьера при его перемещении критическим параметром не является, то есть можно выбрать, исходя из двух факторов. Во-первых, барьер не должен быть очень коротким, чтобы при изменении его длины осцилляции коэффициентов проявлялись достаточно ярко, то есть при уменьшении длины барьера до нуля осцилляции коэффициентов происходили хотя бы три-пять раз. Во-вторых, барьер не должен быть очень длинным, чтобы при его перемещении по длине структуры допустимая величина смещения была достаточно заметной, то есть длина барьера должна быть хотя бы в два-три раза меньше длины структуры.

Возьмем барьер, длина которого составляет четверть длины структуры в целом. Такому барьеру соответствует эпюра №6 на рис. 1, где при полной длине структуры в 16 отн. ед. длина барьера равна 4 отн. ед.

Будем перемещать этот барьер по длине структуры. Обратимся к рис. 5, где показаны некоторые положения барьера при различных значениях длины первого участка d_1 . Изменение длины первого участка соответствует перемещению барьера слева направо. Для всех этих случаев в левом столбце показана начальная длина барьера, а в правом – минимальная, когда барьер вырождается в резкий перепад между начальным и конечным значениями волнового числа. То есть длина барьера слева направо уменьшается от начальной величины 4 отн. ед. до нуля.

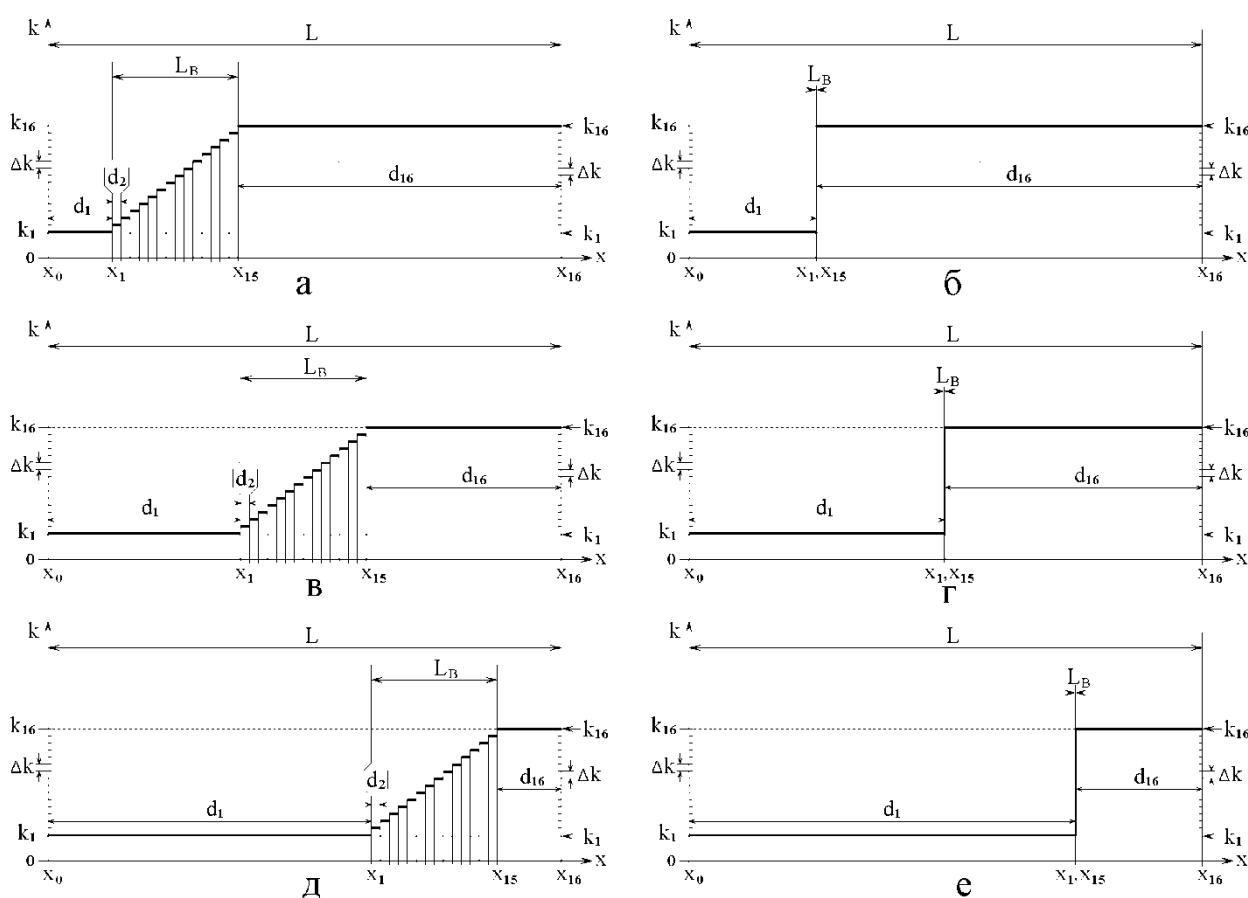


Рис. 5. Положения барьера при различных значениях длины первого участка d_1

а, б – 2 отн. ед.; в, г – 6 отн. ед.; д, е – 10 отн. ед.

Левый столбец (а, в, д) – начальная длина барьера – $L_B = 4$ отн. ед.

Правый столбец (б, г, е) – конечная длина барьера – $L_B = 0$ отн. ед.

Что при этом происходит с зависимостями коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера L_B , показано на рис. 6, где приведены такие

зависимости при положениях барьера, представленных на рис. 5, а также при различных значениях единичного перепада волнового числа Δk .

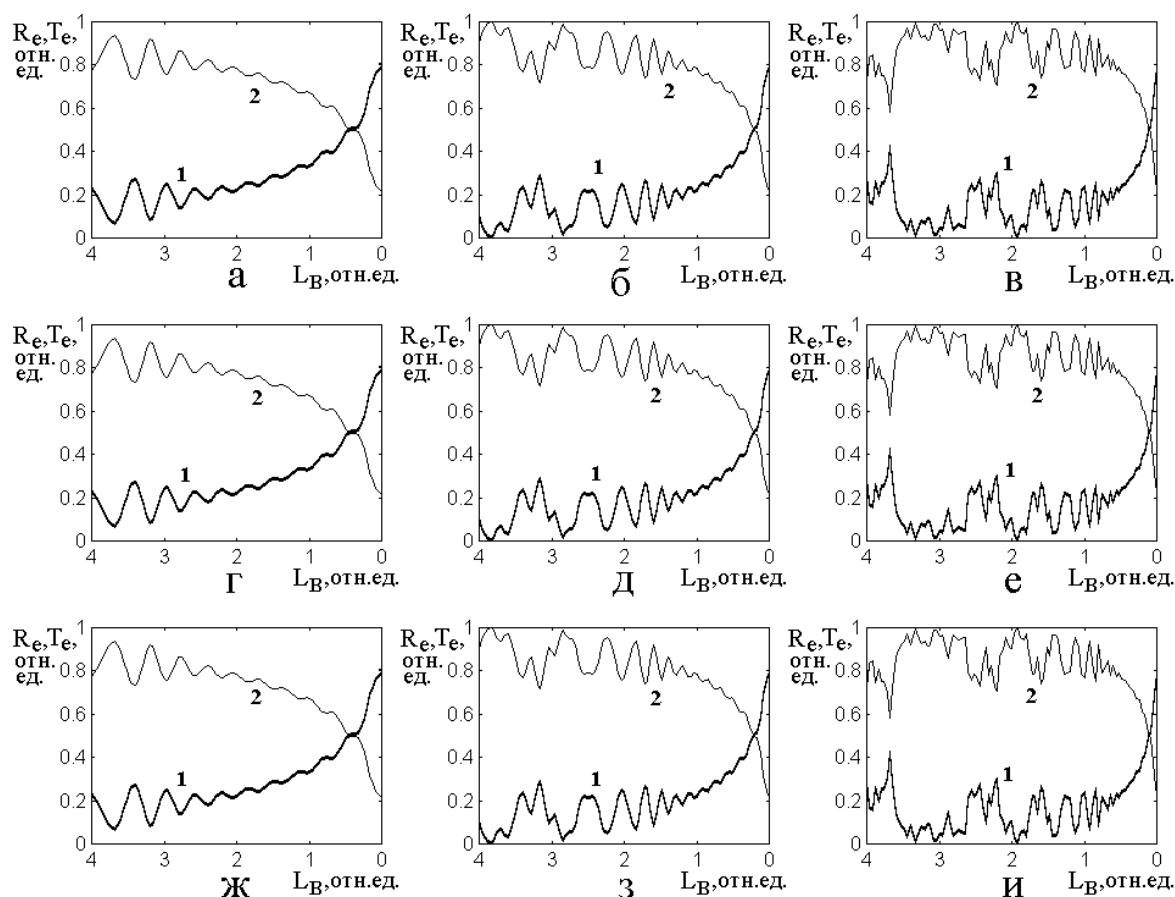


Рис. 6. Зависимости коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера при различных вариациях длины первого участка, показанных на рис.5.

Верхний ряд (а, б, в) соответствует $d_1 = 2$ отн. ед. (а, б на рис.5).

Средний ряд (г, д, е) соответствует $d_1 = 6$ отн. ед. (в, г на рис.5).

Нижний ряд (ж, з, и) соответствует $d_1 = 10$ отн. ед. (д, е на рис.5).

Столбцы соответствуют значениям единичного перепада волнового числа.

Левый столбец (а, г, ж) соответствует $\Delta k = 1$ отн. ед.

Средний столбец (б, д, з) соответствует $\Delta k = 2$ отн. ед.

Правый столбец (в, е, и) соответствует $\Delta k = 4$ отн. ед.

Утолщенные линии 1 – коэффициент отражения R_e , тонкие линии 2 – коэффициент прохождения T_e

Из рисунка видно, что по мере увеличения единичного перепада волнового числа Δk (по любому из горизонтальных рядов) количество осцилляций и их

дробность возрастают, что находится в соответствии с рис. 3 и рис. 4. В то же время, при перемещении барьера, то есть при изменении длины первого участка (по любому их вертикальных столбцов) характер осцилляций и зависимости в целом не изменяются.

Контрольная проверка, выполненная при различных длинах барьера от 2 до 12 отн. ед. и при различных значениях перепада волнового числа от 0,05 до 10 отн. ед. показала то же самое, то есть неизменность зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины первого участка. То же касается длины последнего участка, который варьировался от 1 до 12 отн. ед.

Таким образом, можно сделать вывод, что изменение длины первого или последнего участка, то есть перемещение барьера по длине структуры, в формировании зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера не участвует.

Из этого следует, что возможными причинами появления осцилляций на зависимостях коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера остаются длина единичного участка внутри барьера Δd и длина барьера L_B .

5. Характерные области изменения волнового числа

Обратимся еще раз к рис. 3 и рис. 4, где представлены зависимости коэффициента отражения и прохождения от длины барьера. Для того, чтобы охватить больший интервал значений длины барьера, начальная его длина L_{B0} выбрана равной 14 отн. ед., как это было сделано при построении рис. 3 и рис. 4. Поскольку, как показано выше (раздел 4), характер зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от положения барьера не зависит, выбор длины барьера в 14 отн. ед. при полной длине структуры 16 отн. ед., общности рассмотрения не ограничивает.

Из рис. 3 и рис. 4 можно видеть, что по характеру зависимостей коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера L_B при

изменении величины ступеньки волнового числа Δk можно выделить три характерных области.

Область 1 – зависимость регулярная, осцилляции отсутствуют. Эта область соответствует $0 \leq \Delta k \leq \Delta k_1$, где $\Delta k_1 = 0,05$ отн. ед. Зависимости коэффициентов от длины барьера плавные, осцилляции отсутствуют.

Область 2 – зависимость регулярная, осциллирующая. Эта область соответствует $\Delta k_1 \leq \Delta k \leq \Delta k_2$, где $\Delta k_1 = 0,05$ отн. ед., $\Delta k_2 = 0,50$ отн. ед. Период осцилляций тем меньше, чем больше Δk .

Область 3 – зависимость нерегулярная, осциллирующая. Эта область соответствует $\Delta k_2 \leq \Delta k \leq \infty$, где $\Delta k_2 = 0,50$ отн. ед. Период осцилляций четко не выражен, меняется случайным образом. Перепады осцилляций тем чаще, чем больше Δk . При увеличении Δk выше 1,0 отн. ед. осцилляции приобретают хаотический характер.

Разграничения между областями не резкие, точность определения границ составляет не более 10%.

Можно полагать, что разнообразие зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера обусловлено интерференционными явлениями, сопровождающими распространение волны в многослойной структуре, имеющей множество резких границ между слоями.

В качестве причины интерференции можно полагать соотношение между длинами распространяющихся волн и геометрическими параметрами структуры, такими как длина барьера и длина его единичной ступеньки.

Длина волны обратно пропорциональна волновому числу, так что определяется по формуле:

$$\lambda_k = 2\pi / (n \Delta k), \quad (15)$$

где n – номер ступеньки барьера.

В рассматриваемой геометрии полное волновое число на длине барьера может включать в себя от 1 до 16 ступенек, так что это число меняется от

$k_{min} = 1 \Delta k$ до $k_{max} = 16 \Delta k$. Соответственно максимальное и минимальное значения длины волны равны:

$$\lambda_{max} = 2 \pi / (1 \Delta k), \lambda_{min} = 2 \pi / (16 \Delta k). \quad (16)$$

Средняя величина между этими значениями равна:

$$\lambda_m = 2 \pi / (8 \Delta k). \quad (17)$$

Обратимся к рис. 7, иллюстрирующему соотношение между величиной ступеньки по волновому числу Δk и соответствующей длиной волны λ_k .

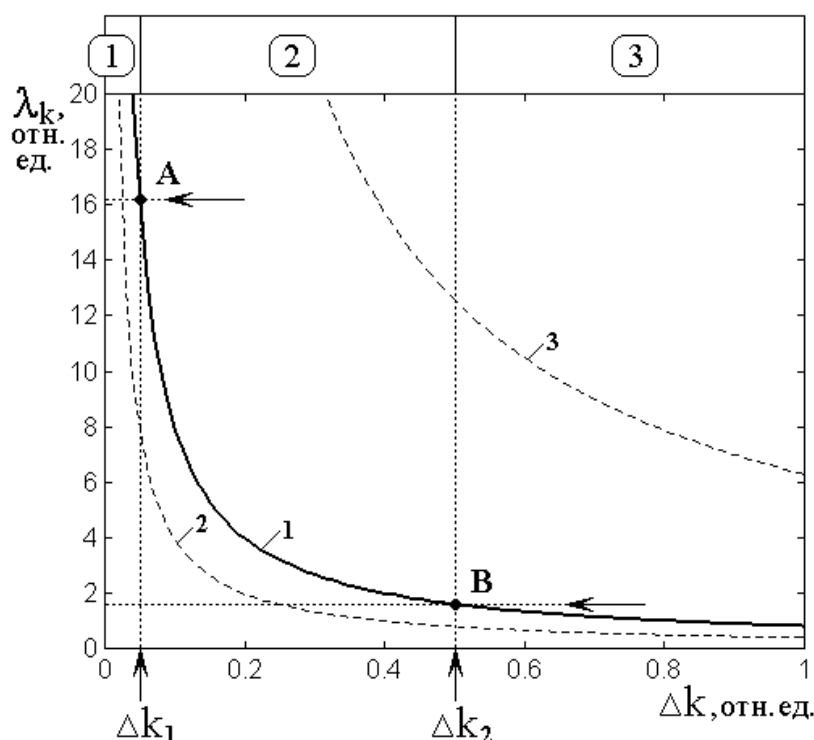


Рис. 7. Соотношение между величиной ступеньки по волновому числу Δk и соответствующей длиной волны. 1 – $\lambda_m(\Delta k)$; 2 – $\lambda_{min}(\Delta k)$; 3 – $\lambda_{max}(\Delta k)$.

Из рисунка видно, что кривая 1 пересекает вертикальную линию, соответствующую Δk_1 на уровне $\lambda_k = 16,1$ отн. ед. (точка А). Эта величина близка к полной длине барьера при единичной длине ступенек, которая составляет 14 отн. ед.

Таким образом, можно полагать, что переход от области 1 к области 2, то есть начало осцилляций, происходит тогда, когда средняя величина волнового числа соответствует длине волны, равной полной длине барьера. То есть, если

длина волны, соответствующая среднему волновому числу, больше полной длины барьера, то осцилляции отсутствуют, а если длины волны меньше длины барьера, то осцилляции появляются.

То есть здесь при достаточно малой величине ступеньки волнового числа интерференционные явления еще не успевают развиться и осцилляции отсутствуют.

Та же кривая 1 пересекает вертикальную линию, соответствующую Δk_2 , на уровне $\lambda_k = 1,6$ отн. ед. (точка В). Эта величина близка к единичной длине ступеньки, равной 1,0 отн. ед.

Можно полагать, что переход от области 2 к области 3, то есть нарушение регулярности осцилляций, происходит тогда, когда средняя величина волнового числа соответствует длине волны, равной длине единичной ступеньки барьера. То есть, если длина волны, соответствующая среднему волновому числу, становится меньше длины одной ступеньки, то осцилляции теряют регулярность и становятся хаотическими.

То есть здесь при достаточно большой величине ступеньки волнового числа развиваются интерференционные явления на длине единичной ступеньки по длине барьера.

Таким образом, можно видеть, что в обоих случаях решающую роль играет именно среднее значение волнового числа по длине барьера, соответствующее кривой 1. В самом деле, кривая 2 проходит слишком низко, что особенно проявляется вблизи Δk_1 , а кривая 2 – слишком высоко, что также особенно заметно вблизи Δk_1 . Однако следует заметить, что кривая 2 пересекает вертикальную линию, соответствующую Δk_2 , на уровне, приемлемом для длины, соответствующей единичной ступеньке, а кривая 3 пересекает вертикальную линию, соответствующую Δk_2 на уровне, приемлемом для длины волны, соответствующей полной длине барьера. То есть в обоих этих случаях та и другая зависимости могут вносить определенный вклад в интерференционную

картину, в первую очередь выше Δk_2 , что приводит к дополнительной хаотизации зависимостей коэффициентов от длины барьера.

6. Критерии осцилляций и хаоса

В предыдущем разделе (раздел 5) показано, что при достаточно большой начальной длине барьера L_{B0} (там принято $L_{B0} = 14$ отн. ед.) характер зависимостей коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера L_B определяется параметром, в качестве которого выступает величина ступеньки волнового числа Δk . По величине этого параметра выделены три области: первая, где зависимости регулярные без осцилляций, вторая, где зависимости регулярные с правильными осцилляциями и третья, где зависимости становятся резко нерегулярными, а характер осцилляций стремится к хаотическому. Между областями определены критические значения параметра: Δk_1 – переход от области 1 к области 2 – критерий начала осцилляций и Δk_2 – переход от области 2 к области 3 – критерий перехода от регулярных осцилляций к хаотическим. Далее будем Δk_1 называть критерием осцилляций, а Δk_2 – критерием хаоса.

Там же (раздел 5) показано, что критерий осцилляций выполняется тогда, когда средняя величина волнового числа соответствует длине волны, равной полной длине барьера. При этом критерий хаоса выполняется тогда, когда средняя величина волнового числа соответствует длине волны, равной длине единичной ступеньки барьера.

Если задана начальная длина барьера L_{B0} , то эта величина определяет как полную длину барьера L_B , равную L_{B0} , то есть $L_B = L_{B0}$, так и длину единичной ступеньки Δd , равную $L_{B0}/(N-2)$, где N – полное число участков структуры, в настоящем рассмотрении равное 16, так что здесь $\Delta d = L_{B0}/14$.

При уменьшении начальной длины барьера L_{B0} обе величины L_B и Δd уменьшаются, так что длины волн, соответствующие этим величинам, также уменьшаются. При этом среднее волновое число, обратное длине волны, для выполнения обоих критериев должно увеличиваться. Это означает, что при уменьшении начальной длины барьера критерии как осцилляций, так и хаоса должны увеличиваться.

Обратимся к рис. 8, где показаны зависимости критериев осцилляций Δk_1 (кривые 1) и хаоса Δk_2 (кривые 2) от начальной длины барьера L_{B0} . Точки рассчитаны с применением алгоритма, приведенного в работе [23]. Кривые построены по эмпирическим формулам, соответствующим обратной пропорциональности:

$$\Delta k_1 = \frac{0,40}{L_{B0}}; \quad (18)$$

$$\Delta k_2 = \frac{7,00}{L_{B0}}. \quad (19)$$

Из рисунка видно, что обе формулы приближают наблюдаемые зависимости с высокой степенью точности (доли процента). То же следует из врезки, где кривые построены в двойном логарифмическом масштабе и хорошо соответствуют прямым линиям.

Различный уровень кривых определяется соотношением между длиной барьера в целом и длиной его единичного участка. Так, при длине барьера 14 отн. ед., длина участка равна 1 отн. ед., так что их отношение равно 14. В то же время, отношение коэффициентов формул (18) и (19) равно $7,00/0,40 = 17,50$, что отличается от отношения длин на 25%. Однако, как отмечено в разделе 5, точность определения коэффициентов составляет порядка 20%, так что приведенные отношения можно считать достаточно близкими.

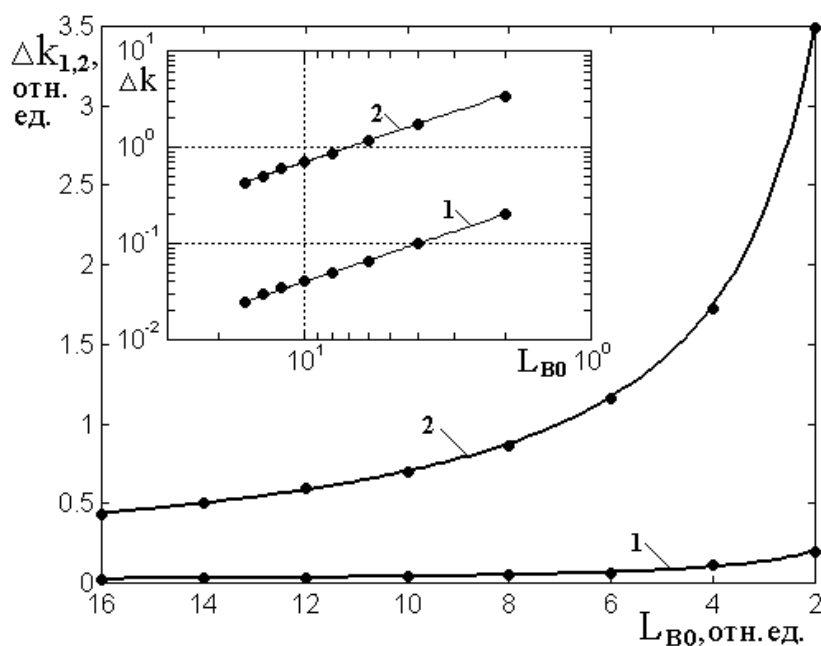


Рис. 8. Зависимости критериев осцилляций Δk_1 (кривые 1) и хаоса Δk_2 (кривые 2) от начальной длины барьера L_{B0} . На врезке – те же зависимости в двойном логарифмическом масштабе.

7. Кратное изменение зависимостей коэффициентов от длины барьера

В предыдущем разделе (раздел 6) показано, что зависимости критериев осцилляций и хаоса от начальной длины барьера (18), (19) с высокой степенью точности описываются законом обратной пропорциональности. То есть, при увеличении длины барьера оба критерия уменьшаются, причем их уменьшение, с точностью до постоянного коэффициента, происходит одинаковым образом.

Поскольку оба критерия являются отражением характера зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, то можно полагать, что и характер изменения таких зависимостей при изменении длины барьера происходит одинаковым образом.

На этот вопрос отвечает рис. 9, где показаны зависимости коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e от длины барьера L_B при различных соотношениях между начальной длиной барьера L_{B0} и ступенчатым перепадом волнового числа Δk .

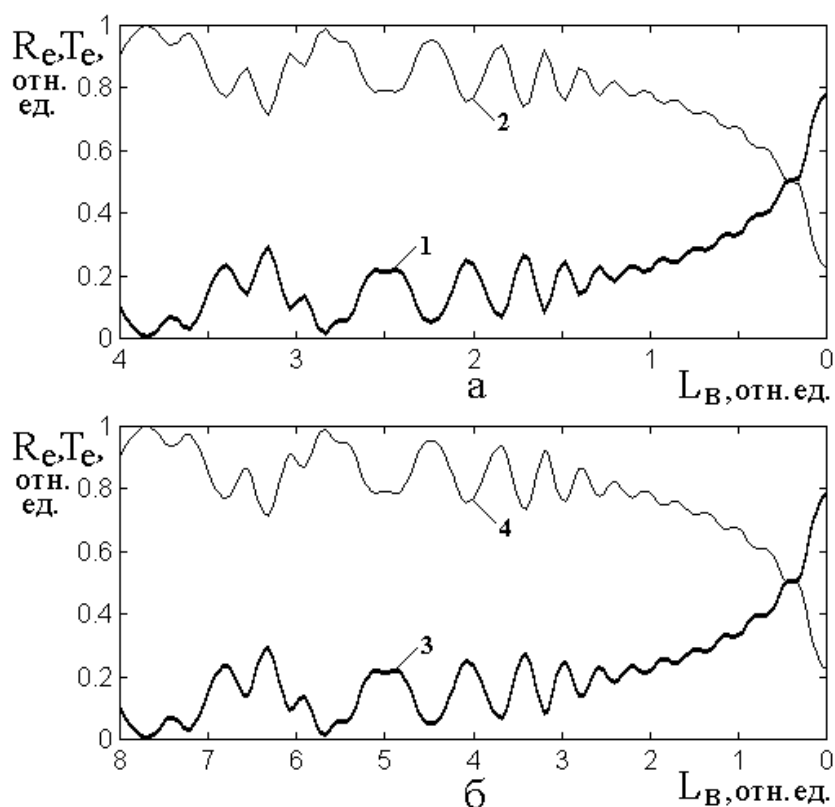


Рис. 9. Зависимости коэффициентов отражения (кривые 1, 3) и прохождения (кривые 2, 4) от длины барьера L_B при различных соотношениях между начальной длиной барьера L_{B0} и ступенчатым перепадом волнового числа Δk : а – $L_{B0} = 4$ отн. ед., $\Delta k = 2$ отн. ед.; б – $L_{B0} = 8$ отн. ед., $\Delta k = 1$ отн. ед.

Из рисунка видно, что при увеличении начальной длины барьера в два раза и одновременном уменьшении перепада волнового числа в те же два раза общий характер кривых (а, б) полностью сохраняется. Изменяется только масштаб по горизонтальной оси в те же два раза.

Проверка показывает, что условием сохранения характера кривых является инвариантность выражения:

$$\frac{L_{B0}}{L_S} \cdot \Delta k = \frac{1}{2}, \tag{20}$$

где через L_S здесь обозначена полная длина структуры.

Учитывая, что для структуры, содержащей 16 участков, выполняется равенство:

$$L_{B0} = L_S - d_1 - d_{16}, \tag{21}$$

это же соотношение можно записать в виде:

$$\frac{L_S - d_1 - d_{16}}{L_S} \cdot \Delta k = \frac{1}{2}, \quad (22)$$

Таким образом, можно считать, что зависимость коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера имеет определенный инвариант, определяемый приведенными формулами.

8. Отражение и прохождение при большой длине структуры

В предыдущих разделах рассматривалась структура, длина которой при значении Δk порядка 1–2 отн. ед., не превышала полутора-двух десятков средней длины волны, определяемой соотношением (17):

$$\lambda_m = 2\pi / (8\Delta k). \quad (23)$$

Типичные для этого случая зависимости коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера соответствуют показанным на рис. 3 и рис. 4. При этом интерференционные явления развиваются в полной мере уже в пределах длины единичной ступеньки барьера, обеспечивая хаос.

В то же время, характерным размером может явиться полная длина барьера, проявление которого при наличии хаоса уже не заметно.

С другой стороны, в разделе 7 выявлено кратное изменение зависимостей коэффициентов от длины барьера, так что при изменении этой длины тонкая структура хаоса (то есть его осцилляции) не меняется

Такое обстоятельство наводит на мысль, что хаос является не просто случайным, а имеет определенную упорядоченность, которая может проявиться при достаточной длине структуры.

Для проверки такого предположения было проведено исследование зависимости коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера при большой длине структуры, превышающей среднюю длину волны λ_m (23) более чем на два порядка.

Обратимся к рис. 10, где показана зависимость коэффициента отражения от длины барьера при полной длине структуры L , равной 160 отн. ед., при условии, что средняя длина волны λ_m составляет 0,4–0,8 отн. ед., то есть L превышает λ_m в 200–400 раз.

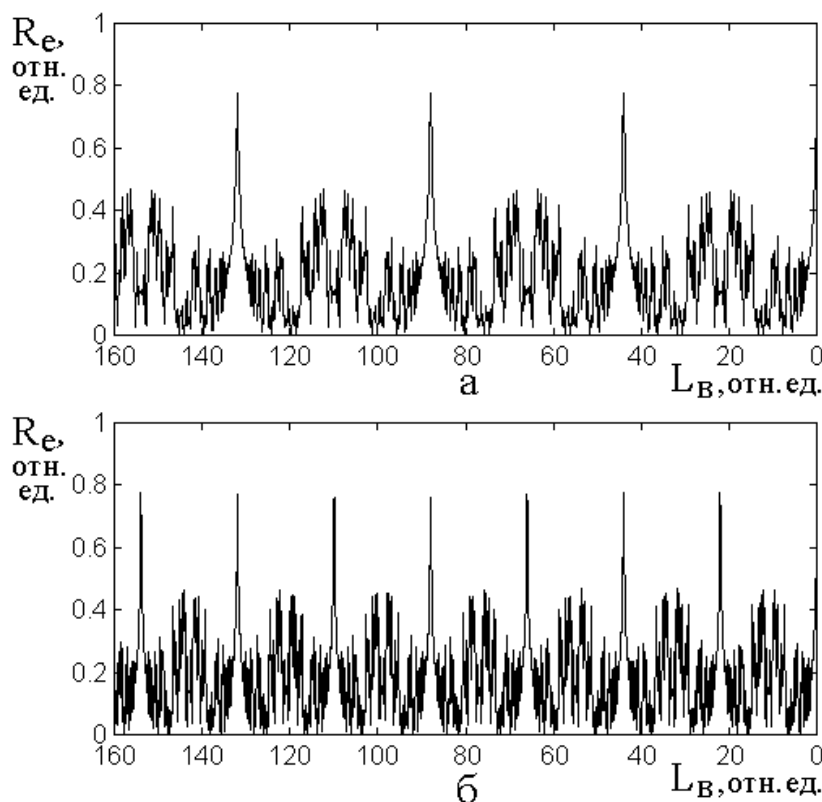


Рис.10. Зависимости коэффициента отражения R_e от длины барьера L_B при различных значениях ступенчатого перепада волнового числа Δk : а – $\Delta k = 1$ отн. ед.; б – $\Delta k = 2$ отн. ед. Полная длина структуры $L = 160$ отн. ед. Начальная длина барьера $L_{B0} = 160$ отн. ед.

Из рисунка видно, что обе зависимости, несмотря на близкую к хаотической структуру, имеют четко выраженную упорядоченность. Так, при определенных значениях длины барьера отражение резко возрастает, давая острый пик, по высоте приближающийся к максимальному значению 0,7785, определяемому соотношением между перепадом волнового числа и полной высотой барьера, содержащего 16 участков (раздел 2, форм.(12)).

Расположение пиков имеет четкую периодичность. Так, на рис. 9а крайний правый пик соответствует $L_B^{(1)} = 43,9978$ отн. ед., а следующий – $L_B^{(2)} = 87,9588$

отн. ед. (где верхний индекс – номер пика), то есть отношение длин барьера для этих пиков составляет 1,9992, что с высокой точностью равно двум. Между этими острыми пиками структура также в известной степени упорядочена, во всяком случае, имеет четкую симметричность относительно середины расстояния между пиками, где наблюдается локальный минимум. Точка минимума, определяющего симметрию между пиками, приходится на $L_B^{(1-2)} = 66,5983$ отн. ед., что близко к геометрической середине между ними, соответствующей $L_B = 65,9783$ отн. ед. Третий пик приходится на $L_B^{(3)} = 131,9597$ отн. ед., что близко к утроенной величине $L_B^{(1)}$ при первом пике, составляющей 131,9934 отн. ед. Минимум, определяющий симметрию, приходится на $L_B^{(2-3)} = 109,3192$ отн. ед., что близко к середине между $L_B^{(2)}$ и $L_B^{(3)}$, приходящейся на 109,9592 отн. ед.

Таким образом, видно, что периодичность выполняется с весьма высокой точностью (порядка 0,05%).

Для характеристики наблюдаемой зависимости введем далее в качестве параметра длину ее периода L_{BR} , равную здесь $L_{BR} = L_B^{(2)} - L_B^{(1)} = 43,9610$ отн. ед.

Следует заметить, что полученная здесь величина L_{BR} превышает среднюю длину волны λ_m , составляющую здесь 0,4–0,8 отн. ед., на два порядка.

На рис. 10б наблюдается такая же периодичность, с тем отличием, что здесь величины всех периодов в два раза меньше, чем на рис. 9а, то есть в этом случае $L_{BR} = 21,9805$ отн. ед. Такое соотношение как раз соответствует увеличению перепада волнового числа Δk с 1 отн. ед. на рис. 9а до 2 отн. ед. на рис. 9б, то есть в те же два раза.

На рис. 11 приведены такие же зависимости для коэффициента прохождения.

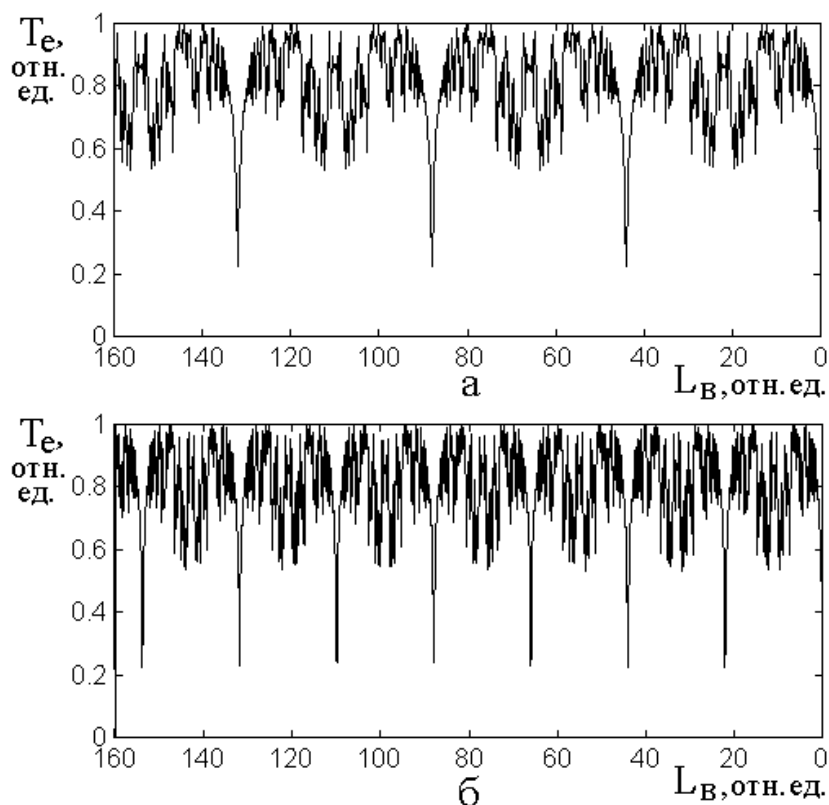


Рис. 11. Зависимости коэффициента отражения R_e от длины барьера L_B при тех же условиях, что на рис. 9

Из рисунка видно, что в обоих случаях эти зависимости зеркально симметричны относительно уровня 0.5 отн. ед., зависимостям, приведенным на рис. 10. Такое положение полностью соответствует подобной симметрии между отражением и прохождением во всех рассмотренных выше случаях, отражая закон сохранения энергии.

Таким образом, из рассмотрения рис. 10 и рис. 11 можно сделать вывод, что имеется характерный размер L_{BR} , определяющий периодический резонансный характер зависимостей отражения и прохождения от длины барьера. При этом величина этого размера обратно пропорциональна перепаду волнового числа Δk , то есть:

$$L_{BR} = \frac{\beta}{\Delta k}, \quad (24)$$

где $\beta = 43,9610$ – постоянный коэффициент пропорциональности.

Легко убедиться, что значение этого коэффициента весьма близко к величине $14 \cdot \pi = 7 \cdot (2\pi) = 43,9823$.

Можно полагать, что такое соответствие, выполняемое с весьма высокой точностью (порядка 0,04%), является не случайным, а обусловлено внутренней физической гармонией наблюдаемых явлений. В качестве аналогии можно упомянуть связь между волновым числом и длиной волны при гармонических колебаниях, имеющую вид [26, стр.216]:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad (25)$$

где длину волны λ можно сопоставить с L_{BR} , а волновое число k с Δk . В случае гармонической волны коэффициент пропорциональности равен 2π , так что здесь коэффициент β превышает эту величину в 7 раз.

Замечание. Заметим, что если в формулу (24) подставить не величину ступеньки Δk , а среднее значение волнового числа, равное $8\Delta k$, то для коэффициента β получим величину 5,4951, что с некоторой натяжкой можно считать близким к 2π , однако точность здесь значительно ухудшается, так что к возможности такой замены следует относиться с определенной осторожностью.

9. Модель переотражений

Для интерпретации периодического характера зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, рассмотрим модель, учитывающую отражение волн на конечных границах барьера, то есть в точках, соответствующих $x = x_1$ и $x = x_{16}$. Будем следить за многократным отражением и прохождением волн через эти точки. При этом в результате суперпозиции выходящих из структуры волн в обе стороны формируются

суммарные отраженная и проходящая волны. Используем схему переотражений, подобную предложенной в работе [27, стр.86-109].

Обратимся к рис. 12, в верхней части которого (а) показана схема барьера, а в нижней (б) – схема распространения волн при многократных переотражениях и прохождении в точках x_1 и x_{16} .

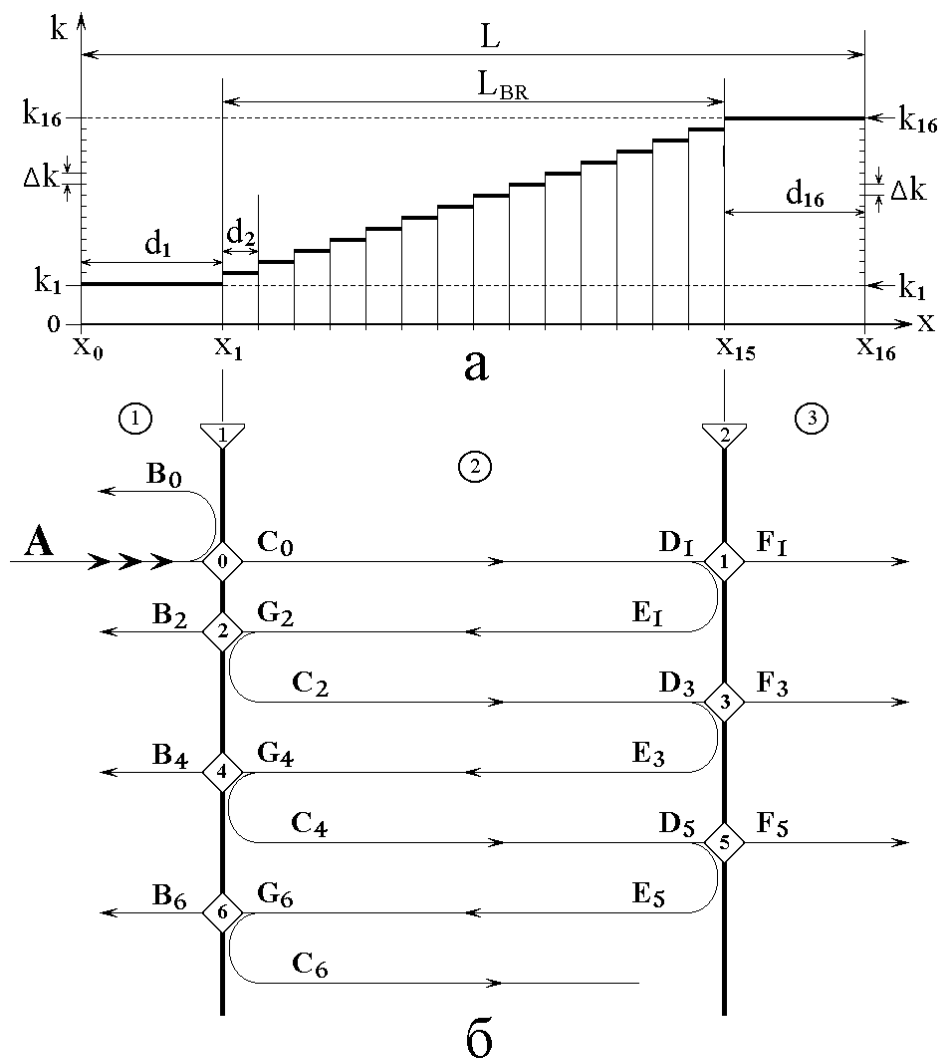


Рис. 12. Схема модели переотражений: а – схема барьера; б – схема распространения волн

Схема барьера, приведенная на рис. 12а, совпадает с приведенной на эюре 3 рис. 1 в разделе 1. Отличие состоит в том, что здесь полная длина структуры L не равна 16 отн. ед., а составляет в 10 раз больше, то есть 160 отн. ед. Длина барьера здесь обозначена через L_{RB} для того, чтобы подчеркнуть, что именно эта величина определяет характерную длину, на концах которой происходит отражение и прохождение. Соответствующие границы при x_1 и x_{16} показаны

на рис. 12б вертикальными утолщенными линиями, обозначенными цифрами 1 и 2 в треугольниках наверху. Точки отражения и прохождения, то есть ветвления входящих в эти точки волн, в порядке следования обозначены цифрами 0, 1, 2, ... в ромбических рамках.

Исходная волна, амплитуда которой равна A , падая на структуру со стороны отрицательного направления оси Ox , попадает в точку 0, где разделяется на две – отраженную B_0 и проходящую C_0 . Волна B_0 выходит из структуры, а волна C_0 продолжает движение вперед до точки 1 второй границы, где она теперь обозначается как D_1 . Здесь эта волна снова претерпевает отражение, давая волну E_1 , идущую внутрь структуры, и прохождение, давая волну F_1 , выходящую из структуры в прямом направлении. Волна E_1 устремляется к первой границе, где в точку 2 она приходит как G_2 . Эта волна снова испытывает отражение и прохождение, давая волну B_2 , выходящую из структуры в обратном направлении и волну C_2 , идущую внутри структуры в прямом направлении к точке 3 границы 2. Далее такое многократное переотражение продолжается, в случае отсутствия затухания вплоть до бесконечности. При каждом падении внутренней волны на ту или другую границу, амплитуда ее уменьшается за счет того, что часть ее выходит из структуры. Суперпозиция волн, выходящих из структуры в обратном направлении, таких как B_0, B_2, B_4, B_6 и так далее, образует суммарную отраженную волну, а суперпозиция волн, выходящих из структуры в прямом направлении, таких как F_1, F_3, F_5 и так далее, образует суммарную проходящую волну.

Замечание. Если известны коэффициенты отражения и прохождения одной волны при падении на единственную точку, соответствующую началу или концу структуры, то амплитуды суммарных отраженной и проходящей волн можно определить с помощью процедуры, описанной в работе [27, стр.93-95].

Следует заметить, что такая процедура подразумевает однородность среды между границами, тогда как в рассматриваемой здесь задача барьер является многослойным и наклонным, поэтому определение амплитуд выходящих из структуры волн требует отдельного рассмотрения.

Таким образом, барьер можно представить в виде протяженного волноведущего «слоя», ограниченного двумя границами. Можно полагать, что в таком слое могут существовать волны, имеющие стоячий характер.

Так, из точки 0 в отрицательном направлении выходит волна B_0 . Из точки 2 также в отрицательном направлении выходит волна B_2 . Для эффективного отражения требуется, чтобы эти волны были в одинаковой фазе. То есть волна, выходящая из точки 0 в виде C_0 , проходящая до точки 1 в виде D_1 , возвращающаяся в точку 2 в виде G_2 и выходящая из структуры в отрицательном направлении в виде B_2 , должна иметь набег фазы, равный 2π , который соответствует длине волны. То же касается остальных волн, формирующих отражение, то есть набег фазы между волнами B_2 и B_4 также должен быть равен 2π , а набег B_4 относительно B_0 равен 4π .

Прохождение, формируемое волнами F_1 и F_3 определяется набегом фазы волн $E_1 \rightarrow G_2 \rightarrow C_2 \rightarrow D_3$, равным 2π . То же касается прохождения, формируемого остальными волнами.

Таким образом, эффективное отражение и прохождение имеет место тогда, когда расстояние между границами 1 и 2 равно половине длины волны. Именно такое отражение и прохождение формирует острые пики резонансного характера на рис. 10 и рис. 11.

Исходя из рис. 10а и рис. 11а, где $L_B^{(1)} \approx 44$ отн. ед., можно полагать, что длина волны в два раза больше этой величины, то есть $\lambda_B = 88$ отн. ед. в случае

гармонической волны такой длине соответствует волновое число $k_B = 0,0714$ отн. ед.

Заметим, что при построении зависимостей на рис. 10а и рис. 11а величина Δk принята равной 1 отн. ед., то есть больше полученной величины в 14 раз. Тем не менее, из весьма четко выраженной периодичности кривых на рис. 10 и рис. 11, а также обратной пропорциональности их периода величине Δk , с высокой степенью достоверности можно сделать вывод о волновой природе зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера.

В то же время, следует учитывать, что барьер не является однородным, то есть представление о гармоническом характере волны к нему не применимо. Можно полагать, что в процессе распространения волны внутри барьера ее длина меняется в соответствии с текущим значением волнового числа. При этом и набег фазы меняется синхронным образом, так что полный набег фазы формируется именно таким сложным образом, что и может объяснить приведенное различие по волновым числам.

Заключение

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему.

На основе матричного алгоритма расчета отражения и прохождения одномерной волны через многослойную структуру решена задача о падении волны на наклонный барьер. Выполнено представление барьера в виде ступенчатой структуры лестничного характера, состоящей из разделенных границами однородных участков. В качестве основного параметра, определяющего свойства волны на данном однородном участке, принято волновое число. Наклонному характеру барьера соответствует линейное возрастание волнового числа ступенчатым образом. Рассматривается падение на структуру только одной волны, распространяющейся в положительном направлении координатной оси. Вся структура предполагается насчитывающей 16 однородных участков, причем барьер, как таковой, заключен между первым

и последним участками, так что его длина определяется длиной структуры в целом за вычетом длин первого и последнего участков. При этом весь барьер разбит на 14 участков одинаковой длины, волновое число в которых нарастает дискретными ступеньками одинаковой высоты. Изменение длины первого и последнего участков приводит к изменению длины барьера, которая таким способом регулируется от полной длины структуры, когда барьер является наиболее плавным, до нуля, когда барьер превращается в один ступенчатый перепад от минимального значения волнового числа до максимального. При этом крутизна барьера соответственно меняется от сравнительно малой величины до максимума, стремящегося к бесконечности.

Путем рассмотрения дискретного изменения длины барьера единичными шагами показано, что коэффициент отражения при максимальной длине барьера является достаточно малым и возрастает до максимума при обращении длины барьера в ноль. Зависимость коэффициента прохождения от длины барьера при этом имеет зеркально симметричный вид относительно уровня 0,5 отн. ед., так что сумма коэффициентов отражения и прохождения при любой длине барьера всегда сохраняется равной единице. Показано, что по мере увеличения высоты дискретной ступеньки волнового числа зависимость коэффициента отражения от длины барьера при большой его длине понижается. При стремлении длины барьера к нулю эта зависимость приходит к одной и той же точке, не зависящей от высоты ступеньки и соответствующей коэффициенту отражения от одной границы между двумя средами, волновые числа в которых равны значениям таковых в первом и последнем участках.

Путем рассмотрения плавного изменения длины барьера установлено, что при увеличении высоты ступеньки по волновому числу зависимость коэффициента отражения от длины барьера становится осциллирующей, а при дальнейшем увеличении высоты ступеньки приобретает хаотический характер. Установлено, что характер такой зависимости не связан с положением барьера по длине структуры, то есть не меняется при сдвиге барьера как целого в ту или

иную сторону, а определяется только его крутизной и высотой ступеньки волнового числа.

По характеру зависимости коэффициента отражения от величины ступеньки волнового числа выделены три области: первая, когда зависимость является регулярной без осцилляций, вторая, когда зависимость является регулярной осциллирующей и третья, когда зависимость имеет нерегулярный осциллирующий характер, приближающийся к хаотическому тем сильнее, чем высота ступеньки больше. В качестве параметра, разграничивающего области, выявлены два критических значения высоты ступеньки волнового числа, первое – соответствующее переходу от плавной зависимости к осциллирующей и второе – соответствующее переходу от осциллирующей зависимости к хаотической. Полученные критические значения сопоставлены с характерными геометрическими размерами структуры. В качестве вспомогательного параметра для характеристики барьера введено среднее значение волнового числа, равное полусумме минимального и максимального его значений. Обратная величина с коэффициентом 2π определена как средняя длина волны. Установлено, что первое критическое значение ступеньки волнового числа соответствует равенству между средней длиной волны и полной длиной барьера. Второе критическое значение ступеньки волнового числа соответствует равенству между средней длиной волны и длиной единичной ступеньки по длине барьера.

Относительно коэффициента прохождения отмечена полная зеркальная симметрия всех зависимостей относительно уровня 0,5 отн. ед., так что сумма коэффициентов отражения и прохождения всегда равняется единице.

Для интерпретации наблюдаемых явлений высказано качественное предположение об интерференционной их природе, обусловленной многократными отражениями волны от следующих друг за другом границ структуры внутри барьера.

Исследованы зависимости обоих критических значений ступеньки волнового числа от начальной длины барьера. Показано, что обе зависимости с высокой точностью (доли процента) следуют закону обратной

пропорциональности, причем различный уровень кривых определяется соотношением между длиной барьера в целом и длиной его единичного участка. Исследована связь между начальной длиной барьера и величиной ступеньки волнового числа. Установлено, что при увеличении начальной длины барьера в некоторое число раз и одновременном уменьшении перепада волнового числа в то же число раз общий характер зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера сохраняется при условии кратного изменения масштаба по оси распространения волны в то же число раз. Показано, что кратный характер изменения таких зависимостей свидетельствует о наличии инварианта, равного половине отношения начальной длины барьера к полной длине структуры, умноженного на величину ступеньки волнового числа.

Рассмотрено отражение и прохождение волны при большой длине структуры. Показано, что при достаточно большой величине ступеньки волнового числа зависимости коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера, будучи близкими к хаотическим, имеют периодический характер, проявляющийся в наличии резких довольно узких пиков, высота которых приближается к предельной, соответствующей нулевому значению длины барьера. Установлено, что расстояние между пиками по длине барьера обратно пропорционально высоте ступеньки волнового числа, что дополнительно свидетельствует в пользу интерференционного характера наблюдаемых явлений. Отмечено, что значение периода длины барьера, соответствующего резким пикам, значительно (до двух порядков) превышает среднюю длину волны, определяемую полным перепадом волнового числа в пределах всего барьера.

Для интерпретации периодического характера зависимостей коэффициентов отражения и прохождения от длины барьера предложена модель последовательных переотражений. Отмечено, что формирование отраженной и проходящей волн происходит в результате многократного суммирования волн, распространяющихся в прямом и обратном направлениях между точками, соответствующими началу и концу барьера. В качестве характерного размера,

определяющего синфазность отраженной и проходящей волн установлена длина барьера в целом. Установлено, что синфазность достигается при совпадении удвоенной длины барьера с длиной распространяющейся волны. Отмечено, что превышение длины такой волны над средней длиной волны, определяемой полным перепадом волнового числа, говорит о негармоническом характере распространяющейся волны, длина которой при распространении внутри барьера меняется в соответствии с текущим значением волнового числа.

Финансирование

Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН, частично поддержана грантом РФФИ: № 20-55-53019 ГФЕН_а, грантами РНФ: № 21-72-20048 и № 21-47-00019 и грантом Правительства Республики Коми и РФФИ № 20-42-110004, р_а.

Литература

1. Хвольсон О.Д. *Курс физики*. Берлин, Госиздат РСФСР. 1923. Т.2.
2. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. Москва, Наука. 1970.
3. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах*. Москва, Наука. 1973.
4. Ландсберг Г.С. *Оптика*. Москва, Наука. 1976.
5. Поль Р.В. *Введение в оптику*. Москва, Ленинград, ОГИЗ Гос. изд. техн.-теор. лит. 1947.
6. Кизель В.А. *Отражение света*. Москва, Наука. 1973.
7. Бреховских Л.М., Годин О.А. *Акустика слоистых сред*. Москва, Наука. 1989.
8. Розенберг Г.В. *Оптика тонкослойных покрытий*. Москва, Гос.изд. физ.-мат.лит. 1958.
9. Oksanen M.I., Hanninen J., Tretyakov S.A. Vector circuit method for calculating reflection and transmission of electromagnetic waves in multilayered chiral structures. *IEEE Proceedings. H*. 1991. V.138. №7. P.513-520.

10. Sarychev A.K., Bergman D.J., Yagil Y. Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films. *PR(B)*. 1995. V.51. №8. P.5366-5385.
11. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через тонкие слои и пленки*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2010.
12. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2011
13. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С. Изменение типа резонансного отражения электромагнитного излучения в структурах «нанометровая металлическая пленка – диэлектрик». *Письма в ЖТФ*. 2007. Т.33. №2. С.13-22.
14. Усанов Д.А., Скрипаль А.В., Абрамов А.В., Боголюбов А.С. Измерение толщины нанометровых слоев полупроводника в структурах металл-полупроводник по спектрам отражения и прохождения электромагнитного излучения. *ЖТФ*. 2006. Т.76. № 5. С.112-117.
15. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода результирующей матрицы для расчета отражения и прохождения электромагнитных волн при падении на многослойные феррит-металл-диэлектрические структуры. *Сборник трудов XX Международной конференции «Электромагнитное поле и материалы»*. Москва, НИУ МЭИ. 2012. С.187-200.
16. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры Часть вторая. Метод матрицы*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2012
17. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритм определения амплитуд отраженных и проходящих волн при симметричном падении двух встречных волн на многослойную неоднородную структуру. *РЭ*. 2012. Т.57. №1. С.67-79.
18. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритм определения амплитуд внешних и внутренних волн при падении встречных волн на многослойную структуру со ступенчатой неоднородностью. *РЭ*. 2013. Т.58. №1. С.16-27.

19. Антонец И.В., Котов Л.Н., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Два простых алгоритма определения амплитуд внешних и внутренних колебаний при распространении встречных волн в многослойной неоднородной структуре. *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2013. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan13/11/text.pdf>
20. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть пятая. Алгоритмические методы*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2014
21. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть шестая. Метод исключения*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2015
22. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Применение метода исключения для анализа распространения волн в многослойных средах со случайным распределением параметров слоев. *РЭ*. 2013. Т.58. №12. С.1149-1159.
23. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритмический метод расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Матричный алгоритм. *Электронный «Журнал радиоэлектроники»*. 2013. №1. Режим доступа: <http://jre.cplire.ru/jre/jan13/11/text.pdf>
24. Пярнпуу А.А. *Программирование на Алголе и Фортране*. Москва, Наука. 1978.
25. Кузнецов С.П. *Динамический хаос (курс лекций)*. Москва, Физматлит. 2001.
26. Харкевич А.А. *Основы радиотехники*. Москва, Физматлит. 2007.
27. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть четвертая. Специфические методы*. Сыктывкар, Издательство Сыктывкарского государственного университета (ИПО СыктГУ). 2013.

Для цитирования:

Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Алгоритмический метод расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 2. Падение волны на наклонный барьер. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.8.9>