

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.8.1>

УДК: 534.8

УДОВЛЕТВОРЯЕТ ЛИ АКУСТОЯРКОСТНАЯ ТЕМПЕРАТУРА УРАВНЕНИЮ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ?

А.А. Аносов^{1,2}, А.А. Шаракшанэ²

¹ Первый МГМУ им. И.М. Сеченова Минздрава России (Сеченовский Университет)
119991, Москва, ул. Трубецкая, д. 8, стр. 2

² Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН
125009, Москва, ул. Моховая, 11/7

Статья поступила в редакцию 29 января 2023 г.

Аннотация. В медицине, для контроля локальной гипертермии, необходимо осуществлять безболезненные измерения глубинной температуры с погрешностью, не превышающей 0.5–1 К, и пространственным разрешением не хуже 5 мм. Для измерения температуры предлагается использовать пассивную акустическую термометрию, основанную на регистрации собственного теплового акустического шума объекта. Измерения шумового сигнала требуют значительного времени интегрирования: в мегагерцовом диапазоне для получения требуемой точности необходимо усреднять сигнал в течение 30–50 с. Чтобы снизить это время без потери точности, предлагается при восстановлении температуры использовать уравнение теплопроводности с кровотоком. Рассмотрена локальная глубинная гипертермия мягких тканей человека. Путем интегрирования трехмерного уравнения теплопроводности (которому подчиняется глубинная температура) по глубине с весовым множителем, учитывающим поглощение ультразвука, с учетом аппаратной функции приемного датчика получено дифференциальное уравнение для акустояркостной температуры (измеряемого сигнала). Показано, что в начале нагрева (~ 5 мин) распределение акустояркостной температуры на поверхности тела приблизительно

удовлетворяет двумерному уравнению теплопроводности, параметры которого однозначно связаны с параметрами трехмерного уравнения теплопроводности, которому удовлетворяет распределение глубинной температуры. Проведены расчеты, в которых использованы характерные для мягких тканей организма значения коэффициента температуропроводности, удельного кровотока, коэффициента поглощения ультразвука и типичные параметры источника при локальном пятиминутном нагреве мягких тканей. Акустояркостьную температуру рассчитывали стандартным способом, используя известное интегральное выражение без учета и с учетом аппаратной функции приемника, и путем решения полученного двумерного уравнения теплопроводности. Различие между рассчитанными разными способами акустоярковыми температурами увеличивается со временем, но после пяти минут нагрева не превышает погрешности измерений. Сформулировано условие, определяющее допустимость сделанного приближения. Предлагаемое приближение позволяет определить параметры уравнения теплопроводности по результатам измерений акустоярковой температуры, что позволяет рассчитать распределение глубинной температуры в любой момент времени.

Ключевые слова: пассивная акустическая термометрия; тепловое акустическое излучение; восстановление температуры; уравнение теплопроводности Пеннеса; акустоярковая температура.

Финансирование: Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00175, <https://rscf.ru/project/23-22-00175/>

Автор для переписки: Аносов Андрей Анатольевич, anosov_a_a@staff.sechenov.ru

Введение

В ряде медицинских приложений необходимо с надлежащей точностью осуществить безболезненные измерения глубинной температуры. При этом ошибка определения температуры не должна превышать 0.5–1 К, пространственное разрешение должно быть не хуже 5 мм [1]. Предлагается использовать пассивную акустическую термометрию, основанную на

регистрации теплового акустического излучения объекта [2-4]. Измерения шумового сигнала требуют значительного времени интегрирования: в мегагерцовом диапазоне для получения требуемой точности необходимо усреднять сигнал в течение 30–50 с [5,6]. Чтобы снизить это время без потери точности, предлагалось при восстановлении температуры использовать уравнение теплопроводности с кровотоком [7,8]. В акустотермографии этот подход уже исследовался теоретически в различных модификациях [9,10]. В предлагаемом алгоритме восстанавливается не сама температура, а параметры уравнения теплопроводности, при этом искомые параметры не определяются каждый раз заново, а уточняются по мере измерений. Такой подход уже рассмотрен, в том числе и экспериментально. При нагреве модельного объекта – говяжьей печени – восстанавливали температуропроводность и источник нагрева [11], при охлаждении нагретых модельных объектов – пластилина и тефлона – восстанавливали температуропроводность и начальную температуру [12,13]. Отметим работу [14] в области СВЧ-термометрии (математически СВЧ-и акустотермометрия описываются схожими уравнениями), где для восстановления температуры также было использовано уравнение теплопроводности (без кровотока) и рассмотрен внешний нагрев объекта, что соответствует учету граничных условий.

В данной работе предложенный метод получает свое развитие. Использование нескольких акустических приемников, расположенных на поверхности тела человека, позволяет получить меняющееся во времени двумерное распределение акустояркой температуры (измеряемого сигнала). Делается предположение, что это распределение акустояркой температуры удовлетворяет двумерному уравнению теплопроводности, параметры которого однозначно связаны с параметрами трехмерного уравнения теплопроводности, которому удовлетворяет распределение глубинной температуры. Если это так, то анализ результатов измерений (двумерного распределения акустояркой температуры) позволит определить параметры уравнения теплопроводности, а,

следовательно, восстановить распределение глубинной температуры в любой момент времени.

1. Теоретическая модель

Моделируется локальная гипертермия мягких тканей человека, когда в глубине тела ($x \geq 0, -\infty < y < +\infty, -\infty < z < +\infty, x = 0$ – поверхность тела) действует источник $S(x, y, z)$. Температура $T(t, x, y, z)$, ограниченная во всей области, подчиняется уравнению теплопроводности с учетом кровотока или уравнению Пеннеса [15]:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) - \eta(T - T_0) + S, \quad (1)$$

где t – время, a^2 – коэффициент температуропроводности, η – кровоток, с начальным $T(t = 0, x, y, z) = T_0$ и граничным $T(t, x = 0, y, z) = T_0$ условием.

Будем считать, что исследуемая среда однородна по температуропроводности $a^2 = \text{const}$ и кровотоку $\eta = \text{const}$. Рассмотрим датчик, принимающий сигнал из тела, расположенный на границе тела при $x = 0$. Акустическая температура, измеряемая датчиком, расположенным на границе тела при $x = 0$, рассчитывается (если не учитывать аппаратную функцию датчика) по формуле [16]:

$$T_A(t, y, z) = \gamma \int_0^\infty T(t, x, y, z) \exp(-\gamma x) dx, \quad (2)$$

где γ – коэффициент поглощения ультразвука по интенсивности. Будем считать, что исследуемая среда однородна по поглощению $\gamma = \text{const}$.

Умножим обе части уравнения (1) на выражение $\gamma \exp(-\gamma x)$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$. Будем считать (обоснование представлено ниже) справедливым соотношением [17]:

$$\gamma a^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \exp(-\gamma x) dx = \gamma^2 a^2 \left[-\frac{\partial T(t, 0, y, z)}{\partial (\gamma x)} + (T_A - T_0) \right] \ll \gamma \int_0^\infty dx \exp(-\gamma x) S(x, y, z). \quad (3)$$

Ниже будет показано, что соотношение (3) справедливо на начальной стадии нагрева, при $\gamma^2 a^2 t \ll 1$.

В этом случае получаем, что акустоярковая температура (без учета аппаратной функции датчика), определенная на плоскости $x = 0$, удовлетворяет 2D уравнению теплопроводности:

$$\frac{\partial T_A}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T_A}{\partial z^2} \right) - \eta(T_A - T_0) + \tilde{S}(y, z), \quad (4)$$

где $\tilde{S}(y, z) = \gamma \int_0^\infty dx \exp(-\gamma x) S(x, y, z)$. При этом параметры коэффициент теплопроводности и кровоток остаются такими же, как в 3D уравнению теплопроводности для температуры, и меняется выражение для источника.

Рассмотрим распределение акустоярковой температуры с учетом аппаратной функции датчика [18]. Акустоярковая температура, измеряемая датчиком, расположенным на границе тела при $x = 0$ с центром в точке (u, v) , рассчитывается по формуле:

$$T_A(u, v) = \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz A(y - u, z - v, x) \gamma \exp(-\gamma x) T(t, x, y, z), \quad (5)$$

где A – аппаратная функция датчика. Отметим, что для аппаратной функции для любого x действует правило нормировки: $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} A(y - u, z - v, x) dy dz = 1$. Такая нормировка связана с определением акустоярковой температуры, как температуры черного тела, испускающего ту же плотность потока теплового излучения, что и исследуемый объект. Таким образом, если в выражении (5) положить температуру равной константе, то этой же константе будет равна и акустоярковая температура.

Умножим обе части уравнения (1) на выражение $A(y - u, z - v, x) \gamma \exp(-\gamma x)$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$, по y и z от $-\infty$ до $+\infty$ с учетом аппаратной функции. В дальнейшем, для простоты изложения, перейдем в плоскости $x = 0$ от координат u, v к более привычным координатам y, z . Вынесем дифференцирование $\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ за знак интеграла. По аналогии с интегрированием без учета аппаратной функции получим, что акустоярковая температура удовлетворяет уравнению (4), где

$$\tilde{S}(y, z) = \tilde{S}(u, v) = \gamma \int_0^\infty dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dz A(y - u, z - v, x) \exp(-\gamma x) S(x, y, z). \quad (6)$$

2. Условие соответствия акустоярковой температуры уравнению теплопроводности

Для простоты рассмотрим одномерный случай. Температура определяется уравнением теплопроводности, заданным для полуограниченной прямой:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + S(x), \quad x > 0, \quad t > 0. \quad (7)$$

Начальное и граничное условия нулевые: $T(0, x) = 0$, $T(t, 0) = 0$, функции $T(t, x)$ и $S(x)$ – ограничены.

Акустоярковая температура, измеряемая датчиком, расположенным на границе тела, рассчитывается по формуле (2). Умножим обе части уравнения (7) на выражение $\gamma \exp(-\gamma x)$ и проинтегрируем по x от 0 до $+\infty$. Необходимо сравнить между собой слагаемые в правой части уравнения (7) после интегрирования.

Решение уравнения (7): $T(t, x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right\} S(\xi) d\xi d\tau$ при заданных граничном и начальном условии.

Рассмотрим интеграл $F = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2(t-\tau)}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \right\} d\tau$.

Проведем замену $z = t - \tau$, $dz = -d\tau$, $\tau = 0 \rightarrow z = t$, $\tau = t \rightarrow z = 0$. Тогда $F = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a^2 z}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 z}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 z}\right] \right\} dz$. Тогда, согласно дифференцированию

интеграла с переменным верхним пределом, $\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] \right\}$. Рассмотрим источник в форме δ -функции $S(x) = Qd\delta(x - x_0)$,

где Q , x_0 , d – константы. Будем считать, что $x_0 \gg d$. Тогда $\frac{\partial T}{\partial t} =$

$\frac{Qd}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] \right\} \delta(\xi - x_0) d\xi = \frac{Qd}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2 t}\right] \right\}$. Первое слагаемое в правой части уравнения (7) $a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} =$

$\frac{\partial T}{\partial t} - S(x) = \frac{Qd}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2 t}\right] \right\} - Qd\delta(x - x_0)$. Тогда

интеграл $I = \gamma a^2 \int_0^\infty \partial^2 T / \partial x^2 \exp(-\gamma x) dx = \gamma^2 a^2 \left\{ -\frac{\partial T(t,0)}{\partial(\gamma x)} + T_A(t) \right\}$ равен $I = Qd\gamma \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t} - \gamma x\right] - \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2 t} - \gamma x\right] \right\} dx - \exp(-\gamma x_0) \right\}$.

Рассмотрим интеграл $Y_{\mp} = \frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x \mp x_0)^2}{4a^2 t} - \gamma x\right] dx$. Представим $-\frac{(x \mp x_0)^2}{4a^2 t} - \gamma x = -\frac{(x \mp x_0 + 2\gamma a^2 t)^2}{4a^2 t} \mp \gamma x_0 + \gamma^2 a^2 t$, тогда $Y_{\mp} = \frac{\exp(\gamma^2 a^2 t \mp \gamma x_0)}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \int_0^\infty \exp\left[-\frac{(x \mp x_0 + 2\gamma a^2 t)^2}{4a^2 t}\right] dx$. Проведем замену $z = \frac{x \mp x_0 + 2\gamma a^2 t}{2\sqrt{a^2 t}}$, $2\sqrt{a^2 t} dz = dx$, $x = 0 \rightarrow z = \frac{2\gamma a^2 t \mp x_0}{2\sqrt{a^2 t}}$, $x = \infty \rightarrow z = \infty$. Тогда $Y_{\mp} = \frac{\exp(\gamma^2 a^2 t \mp \gamma x_0)}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{2\gamma a^2 t \mp x_0}{2\sqrt{a^2 t}}}^\infty \exp(-z^2) dz = \frac{\exp(\gamma^2 a^2 t \mp \gamma x_0)}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{2\gamma a^2 t \mp x_0}{2\sqrt{a^2 t}}\right)$, где $\operatorname{erfc}(\dots)$ – дополнительная функция ошибок $\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \exp(-z^2) dz$. Интеграл I равен $I = Qd\gamma \left\{ \frac{\exp(\gamma^2 a^2 t)}{2} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{2\gamma a^2 t - x_0}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \exp(-\gamma x_0) - \operatorname{erfc}\left(\frac{2\gamma a^2 t + x_0}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \exp(\gamma x_0) \right] - \exp(-\gamma x_0) \right\}$.

При $t \rightarrow 0$, $x_0 \gg d > 0$ $\operatorname{erfc}\left(\frac{2\gamma a^2 t \mp x_0}{2\sqrt{a^2 t}}\right) \rightarrow \operatorname{erfc}\left(\mp \frac{x_0}{2\sqrt{a^2 t}}\right) = \operatorname{erfc}(\mp \infty) = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$, т.е. $Y_{-} \rightarrow \frac{\operatorname{erfc}(-\infty) \exp(\gamma^2 a^2 t - \gamma x_0)}{2} = (1 + \gamma^2 a^2 t) \exp(-\gamma x_0)$. В то же время $Y_{+} \rightarrow \frac{\operatorname{erfc}(+\infty) \exp(\gamma^2 a^2 t - \gamma x_0)}{2} = 0$. Таким образом, $I \approx Qd\gamma [(1 + \gamma^2 a^2 t) \exp(-\gamma x_0) - \exp(-\gamma x_0)] = Qd \exp(-\gamma x_0) \gamma^3 a^2 t$.

Получаем следующее соотношение: $\gamma a^2 \int_0^\infty \partial^2 T / \partial x^2 \exp(-\gamma x) dx \approx Qd \exp(-\gamma x_0) \gamma^3 a^2 t \ll Qd\gamma \exp(-\gamma x_0)$, если $\gamma^2 a^2 t \ll 1$.

Оценим интеграл I при $t \rightarrow \infty$. При любом t интеграл $\int_0^\infty \left\{ \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t} - \gamma x\right] - \exp\left[-\frac{(x+x_0)^2}{4a^2 t} - \gamma x\right] \right\} dx < M$ ограничен, а множитель $\frac{1}{2\sqrt{\pi a^2 t}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Поэтому $I(t \rightarrow \infty) \rightarrow -Qd\gamma \exp(-\gamma x_0) = -\gamma \int_0^\infty S(x) \exp(-\gamma x) dx$, т. е. при $t \rightarrow \infty$ получаем стационарный случай $\frac{\partial T_A}{\partial t} = 0$.

На рис. 1 и 2 приведен (в разных временных масштабах) расчет временной зависимости интеграла $\gamma a^2 \int_0^\infty \partial^2 T / \partial x^2 \exp(-\gamma x) dx$. Выбранные параметры

такие же, как в разделе Результаты расчетов (см. ниже): $a^2 = 0.141 \text{ мм}^2/\text{с}$, $\eta = 0$, $T_0 = 37^\circ\text{C}$, $Q = 0.207 \text{ К/с}$, $d = 4.25 \text{ мм}$, $x_0 = 30 \text{ мм}$, $\gamma = 0.03 \text{ 1/мм}$. За характерное время пять минут интеграл $\gamma a^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \exp(-\gamma x) dx \approx 4 \times 10^{-4} \text{ К/с}$. Источник $\gamma \int_0^\infty S(x) \exp(-\gamma x) dx = Q d \gamma \exp(-\gamma x_0) = 1.1 \times 10^{-2} \text{ К/с}$ или в 27.5 раз больше. Параметр $\gamma^2 a^2 t = 0.038$ при $t = 5 \text{ мин}$.

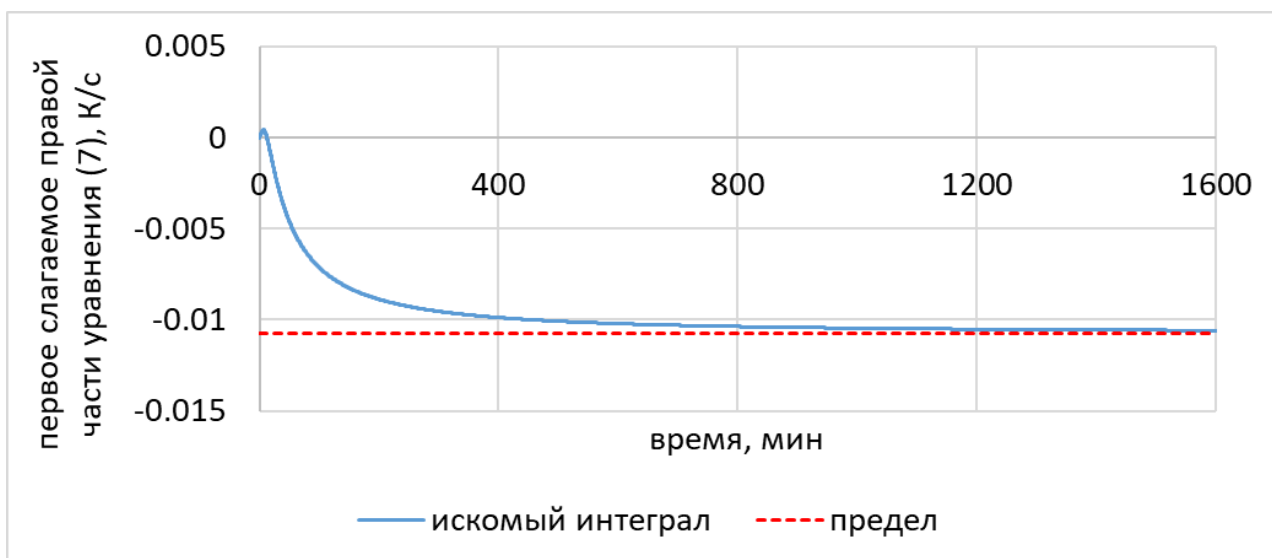


Рис. 1. Временная зависимость интеграла $\gamma a^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \exp(-\gamma x) dx$ и предел, к которому стремится интеграл при $t \rightarrow \infty$

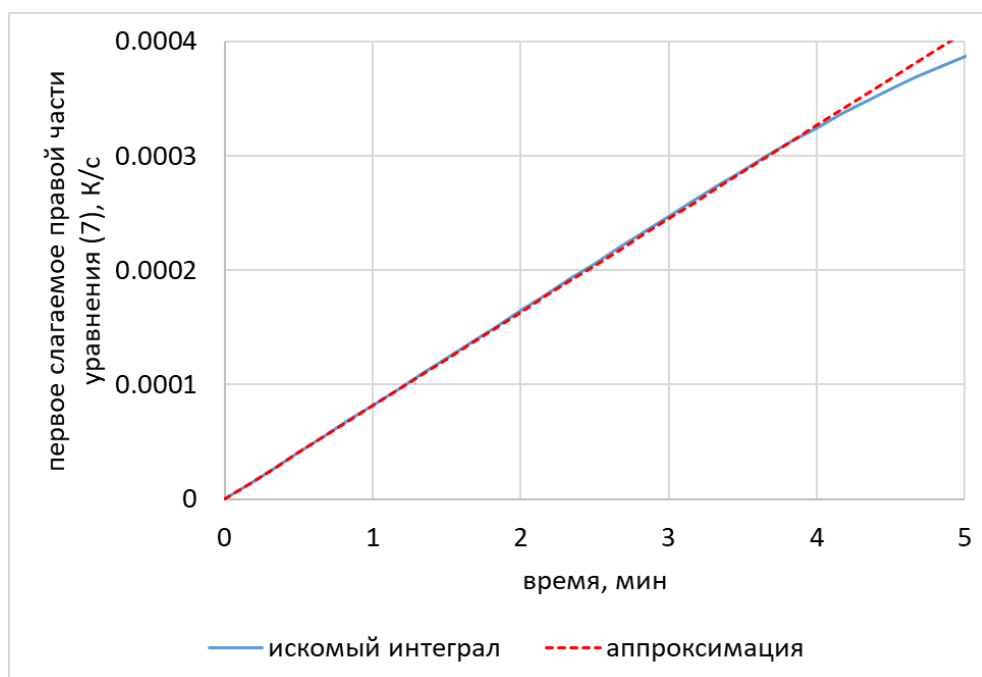


Рис. 2. Временная зависимость интеграла $\gamma a^2 \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \exp(-\gamma x) dx$ в течение пяти минут и аппроксимация интеграла выражением $Q d \exp(-\gamma x_0) \gamma^3 a^2 t$

3. Расчетная модель

Для проверки гипотезы (4) были проведены компьютерные расчеты (см. рис. 3).

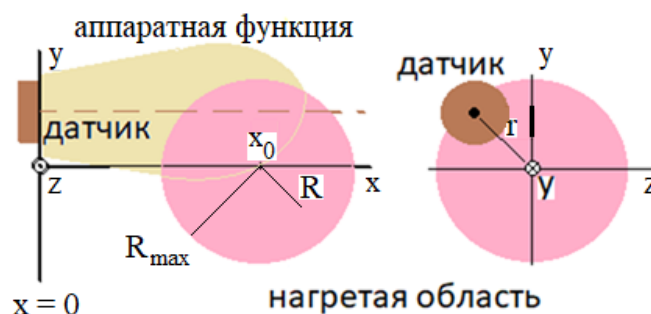


Рис. 3. Схема расчета

Мы считали, что в глубине тела действует центрально-симметричный не меняющийся во времени источник $S(R)$, где R – расстояние от центра источника. Также считали, что температурное распределение $T(t, R)$ также центрально-симметрично и подчиняется уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial T}{\partial R} \right) - \eta(T - T_0) + S(R), \quad (8)$$

с начальным $T(t = 0, R) = T_0$ и граничным $T(t, R = R_{max}) = T_0$ условиями, где R_{max} – радиус рассматриваемой области. Использовали источник в форме Гауссиана:

$$S(x, y, z) = Q \exp \left[-\frac{(x-x_0)^2 + y^2 + z^2}{2d^2} \right] = S(R) = Q \exp \left(-\frac{R^2}{2d^2} \right), \quad (9)$$

где Q – амплитуда, x_0 – глубина залегания, d – характерный размер источника.

Уравнение (8) при заданных параметрах α^2 и η и источнике S решали численно и получали зависимость $T(t, R)$. После чего с помощью выражений (2) и (5) считали акустояркостьную температуру $T_A(t, y, z)$ без учета и с учетом аппаратной функции приемника, соответственно. При этом аппаратную функцию считали для широкополосного датчика, согласно результатам, полученным в [18]. Из-за центральной симметрии температурного распределения двумерное распределение акустояркостьной температуры было центрально-симметричным: $T_A(t, y, z) = T_A(t, r)$, где $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ – расстояние от проекции центра источника на поверхность тела до центра датчика (см. рис.1).

Полученное меняющееся во времени распределение акустоярковой температуры называли для краткости интегральной акустоярковой температурой.

С другой стороны, считали меняющееся во времени распределение акустоярковой температуры исходя из дифференциального уравнения (4). Полученное распределение акустоярковой температуры называли для краткости дифференциальной акустоярковой температурой. Использование условия центральной симметрии позволяет записать уравнение (4) в виде:

$$\frac{\partial T_A}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 T_A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_A}{\partial r} \right) - \eta(T_A - T_0) + A \exp\left(-\frac{r^2}{2d^2}\right), \quad (10)$$

где, при условии $x_0 \gg d$, $A = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \gamma Q d \exp(-x_0 \gamma) \left(1 + \frac{d^2 \gamma^2}{2}\right)$.

4. Результаты расчетов

Были заданы следующие параметры: коэффициент температуропроводности $a^2 = 0.141 \text{ мм}^2/\text{с}$ (среднее значение для мягких тканей организма человека [19]), удельный кровоток $\eta = 0$ (приемлемое допущение для жировой и скелетно-мышечной тканей [19]), $T_0 = 37^\circ\text{C}$, $Q = 0.207 \text{ К/с}$, $d = 4.25 \text{ мм}$, $x_0 = 30 \text{ мм}$, $\gamma = 0.03 \text{ 1/мм}$ (характерное значение для мягких тканей организма человека [19]), длительность нагрева 5 мин (длительность гипертермии, используемой в онкологии [20]).

Интегральную и дифференциальную акустоярковые температуры считали без учета и с учетом аппаратной функции. На рис. 4 приведены результаты расчетов температуры и акустоярковых температур (интегральной и дифференциальной) без учета и с учетом аппаратной функции, соответственно. Дифференциальные и интегральные акустоярковые температуры близки – в расчетах без учета аппаратной функции максимальное различие, которое достигается в точке максимума и увеличивается со временем, после пяти минут нагрева не превышает 0.05 К. В расчетах с учетом аппаратной функции максимальное различие в тех же условиях не превышает 0.1 К. Обе величины ниже погрешности измерений.

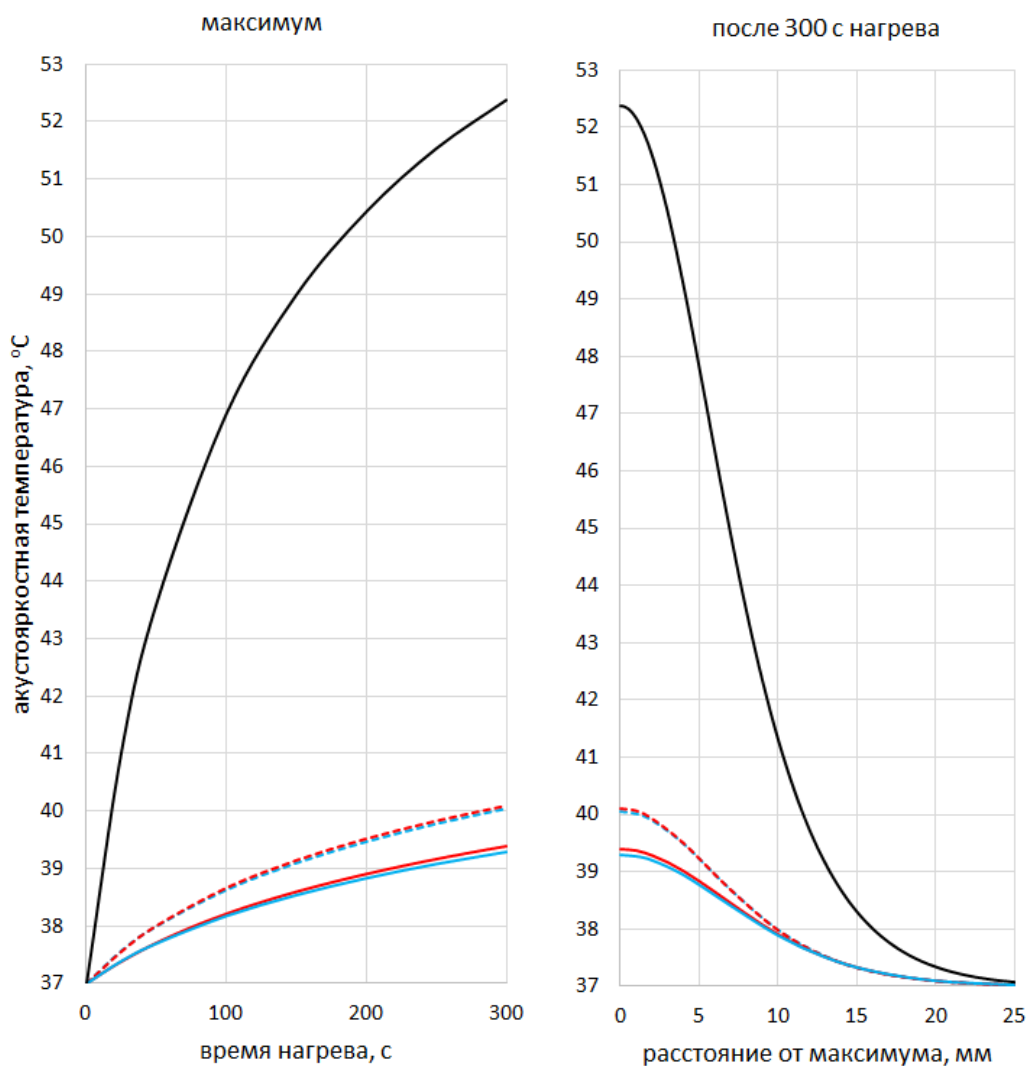


Рис. 4. Расчет зависимостей температуры (черный), дифференциальной (красный) и интегральной (синий) акустяркостных температур без учета (пунктир) и с учетом (сплошная линия) аппаратной функции от времени нагрева в точке максимума и от расстояния от максимума после 5 минут нагрева. Дифференциальная акустяркостная температура рассчитана с помощью уравнения (9). Интегральная акустяркостная температура рассчитана с помощью уравнений (2), (5), (7). Параметры расчета: $a^2 = 0.141$ мм²/с, $\eta = 0$, $T_0 = 37^\circ\text{C}$, $Q = 0.207$ К/с, $d = 4.25$ мм, $x_0 = 30$ мм, $\gamma = 0.03$ 1/мм

5. Обсуждение

Строго говоря, гипотеза, что акустяркостная температура (то есть интенсивность теплового излучения, интенсивность измеряемого сигнала) удовлетворяет уравнению теплопроводности, не следует из уравнений математической физики. Это некоторое приближение, которое можно принять при соблюдении определенных условий:

- соотношение (3) справедливо только в начале нагрева при $\gamma^2 a^2 t \ll 1$,
- параметры a^2 , η , γ считаются постоянными в пространстве.

В одномерном случае из уравнения теплопроводности исчезает параметр a^2 , который отвечает за «распространение», «расползание» температуры, но акустоярковая температура является интегральной характеристикой, а интеграл не «расползается». С течением времени градиент температуры на границе тела $\frac{\partial T(t,0,y,z)}{\partial(\gamma x)}$ будет увеличиваться, температура будет «уходить» за пределы интегрирования, и условие (3) перестанет выполняться.

Полученное приближение следует использовать в медицинских задачах восстановления глубинной температуры. Это приближение позволяет переформулировать обратную задачу восстановления распределения глубинной температуры тела человека: необходимо определить параметры уравнения теплопроводности по результатам измерений акустоярковой температуры. Решение такого типа задач достаточно хорошо разработано (смотри, например, [21]). Это, в свою очередь, позволит, определить параметры уравнения теплопроводности для глубинной температуры, что позволит рассчитать распределение глубинной температуры в любой момент времени.

Заключение

Показано, что распределение акустоярковой температуры на поверхности тела приближенно удовлетворяет двумерному уравнению теплопроводности, параметры которого однозначно связаны с параметрами трехмерного уравнения теплопроводности, которому удовлетворяет распределение глубинной температуры. Предлагаемое приближение позволяет определить параметры уравнения теплопроводности, что позволяет рассчитать распределение глубинной температуры в любой момент времени.

Финансирование: Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда № 23-22-00175, <https://rscf.ru/project/23-22-00175/>

Литература

1. Passechnik V.I., Anosov A.A., Bograchev K.M. Fundamentals and prospects of passive thermoacoustic tomography. *Critical Reviews™ in Biomedical Engineering*. 2000. V.28. №3&4. P.603-640. <https://doi.org/10.1615/CritRevBiomedEng.v28.i34.410>
2. Буров В.А., Дариалашвили П.И., Евтухов С.Н., Румянцева О.Д. Экспериментальное моделирование процессов активно-пассивной термоакустической томографии. *Акустический журнал*. 2004. Т.50. №3. С.298-298. <https://doi.org/10.1134/1.1739492>
3. Миргородский В.И., Герасимов В.В., Пешин С.В. Экспериментальные исследования особенностей пассивной корреляционной томографии источников некогерентного акустического излучения мегагерцевого диапазона. *Акустический журнал*. 2006. Т.52. №5. С.702-709. <https://doi.org/10.1134/S1063771006050150>
4. Bowen T. Acoustic radiation temperature for non-invasive thermometry. *Automedica (New York)*. 1987. V.8. №4. P.247-267. <http://pascal-francis.inist.fr/vibad/index.php?action=getRecordDetail&idt=7595418>
5. Мансфельд А.Д. Акустотермометрия. Состояние и перспективы. *Акустический журнал*. 2009. Т.55. №4-5. С.536-547. <https://doi.org/10.1134/S1063771009040125>
6. Аносов А.А., Беляев Р.В., Вилков В.А., Дворникова М.В., Дворникова В.В., Казанский А.С., Курятникова Н.А., Мансфельд А.Д. Акустотермометрический контроль кисти человека при гипертермии и гипотермии. *Акустический журнал*. 2013. Т.59. №1. С.109-114. <https://doi.org/10.1134/S1063771013010028>
7. Боровиков И.П., Обухов Ю.В., Боровиков В.П., Пасечник В.И. Новые алгоритмы восстановления сигналов и изображений, моделируемых при помощи дифференциальных уравнений. *Радиотехника и электроника*. 1999. Т.44. №6. С.982-987.

8. Аносов А.А., Беляев Р.В., Вилков В.А., Казанский А.С., Курятникова, Н.А., Мансфельд, А.Д. Акустотермометрические данные о кровотоке и теплопродукции в предплечье при физической нагрузке. *Акустический журнал*. 2013. Т.59. №4. С.539-544. <https://doi.org/10.1134/S1063771013040027>
9. Бограчев К.М., Пасечник В.И. Оценки точности восстановления температуры в пассивной термоакустической томографии. *Акустический журнал*. 1999. Т.45. №6. С.742-752.
10. Bosnyakov M.S., Obukhov Yu.V. Optimum wavelet basis for representation of the functions satisfying the head conduction equation. *Pattern Recognition and Image Analysis*. 2003. V.13. №1. P.621-624.
11. Аносов А.А., Беляев Р.В., Вилков В.А., Закарян А.В., Казанский А.С., Мансфельд А.Д., Субочев П.В. Восстановление глубинной температуры методом акустотермометрии с учетом уравнения теплопроводности. *Радиотехника и электроника*. 2015. Т.60. №8. С.855-864. <https://doi.org/10.1134/S106422691508001X>
12. Аносов А.А., Беляев Р.В., Вилков В.А., Дворникова М.В., Дворникова В.В., Казанский А.С., Курятникова Н. А., Мансфельд А.Д. Акустотермометрическое восстановление профиля глубинной температуры с использованием уравнения теплопроводности. *Акустический журнал*. 2012. Т.58. №5. С.592-599. <https://doi.org/10.1134/S1063771012030037>
13. Anosov A.A., Subochev P.V., Mansfeld A.D., Sharakshane A.A. Physical and computer-based modeling in internal temperature reconstruction by the method of passive acoustic thermometry. *Ultrasonics*. 2018. V.82. P.336-344. <https://doi.org/10.1016/j.ultras.2017.09.015>
14. Гайкович К.П. ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕЗУЛЬТАТАМ СОВМЕСТНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ТЕПЛОПЛОПРОВОДНОСТИ В РАДИОТЕРМОМЕТРИИ. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1996. Т.39. №4. С.399-413.

15. Pennes H.H. Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm. *Journal of applied physiology*. 1948. V.1. №2. P.93-122. <https://doi.org/10.1152/jappl.1948.1.2.93>
16. Passechnik V.I. Verification of the physical basis of acoustothermography. *Ultrasonics*. 1994. V.32. №4. P.293-299. [https://doi.org/10.1016/0041-624X\(94\)90009-4](https://doi.org/10.1016/0041-624X(94)90009-4)
17. Аносов А.А. Одномерная обратная задача пассивной акустической термометрии с использованием уравнения теплопроводности: компьютерное и физическое моделирование. *Акустический журнал*. 2022. Т. 68. №5. С. 562-570. <https://doi.org/10.1134/S1063771022050049>
18. Аносов А.А., Шаракшанэ А.А., Казанский А.С., Мансфельд А.Д., Санин А.Г., Шаракшанэ А.С. Аппаратная функция широкополосного акустотермометрического датчика. *Акустический журнал*. 2016. Т.62. №5. С.616-623. <https://doi.org/10.1134/S1063771016050018>
19. Duck F.A. *Physical properties of tissues: a comprehensive reference book*. Academic press. 2013. 345 p.
20. Sapareto S.A., Dewey W.C. Thermal dose determination in cancer therapy. *International Journal of Radiation Oncology* Biology* Physics*. 1984. V.10. №6. P.787-800. [https://doi.org/10.1016/0360-3016\(84\)90379-1](https://doi.org/10.1016/0360-3016(84)90379-1)
21. Parker W.J., Jenkins R.J., Butler C.P., Abbott G.L. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity. *Journal of applied physics*. 1961. V.32. №9. P.1679-1684. <https://doi.org/10.1063/1.1728417>

Для цитирования:

Аносов А.А., Шаракшанэ А.А. Удовлетворяет ли акустоструктурная температура уравнению теплопроводности? *Журнал радиоэлектроники*. 2023. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.8.1>