DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.8.8
УДК: 621.3211

МЕТОД СИНТЕЗА СОГЛАСОВАННОГО ФИЛЬТРА

А.Н. Дегтярев, И.Л. Афонин, А.Л. Поляков

Севастопольский государственный университет
299053, г. Севастополь, ул. Университетская, 33

Статья поступила в редакцию 25 апреля 2023 г.

Аннотация. В работе исследован способ аппроксимации комплексного коэффициента передачи согласованного, физически реализуемого, устойчивого фильтра имеющего минимально необходимое количество функциональных узлов. Предложен методы аппроксимации комплексного коэффициента передачи согласованного фильтра, а именно: аппроксимация комплексным коэффициентом устройства, полученного каскадным соединением линейной инвариантной во времени системы и всепропускающей цепи. Линейная инвариантная во времени система имеет амплитудно-частотную характеристику равную модулю спектральной плотности сигнала, с которым фильтр согласован. Комплексный коэффициент передачи всепропускающей цепи определяется с учетом требуемой фазочастотной характеристики согласованного фильтра. Как результат, существенно снижается количество элементов согласованного фильтра.

Ключевые слова: согласованный фильтр, комплексный коэффициент передачи, всепропускающая цепь, линейная инвариантная во времени система, импульсная характеристика, групповое время запаздывания.

Автор для переписки: Поляков Александр Леонидович, AL_Polykov@inbox.ru

Введение

Согласованный фильтр является оптимальным линейным фильтром для обнаружения сигналов на фоне аддитивного белого шума по нескольким критериям.

При аддитивном белом гауссовом шуме согласованный фильтр – это фильтр, который максимизирует отношение сигнал/среднеквадратичный уровень шума; фильтр, синтезируемый на основе метода проверки гипотез статистической теории обнаружения; также фильтр считается оптимальным по критерию Байеса.

Согласованный фильтр используется в оптимальных устройствах оценки таких параметров сигнала, как, например, время запаздывания, доплеровский сдвиг частоты и постоянная амплитуда на фоне аддитивного белого гауссова шума [1, 2].

Моделированию и синтезу согласованных фильтров уделяется достаточно много внимания [1-3].

Согласованные фильтры реализуются на основе знаний о форме сигналов или спектральных плотностей сигналов, с которыми эти фильтры согласуются. Причем для каждого конкретного сигнала используется свой оригинальный подход при синтезе согласованного с ним фильтра. В результате чего конструируется не согласованный, а квазисогласованный фильтр [1, 2].

В работе [4] представлены методы, которые позволяют синтезировать фильтры, согласованные с сигналами произвольной формы. Один из рассмотренных методов основан на аппроксимации импульсной характеристики синтезируемого фильтра причинными физически реализуемыми функциями, в качестве которых выбраны корреляционные функции импульсных характеристик фильтров нижних частот (ФНЧ). Указанные корреляционные функции ФНЧ с некоторой погрешностью совпадают с функциями отсчетов, поэтому этот метод представляют собой физическую реализацию способа восстановления непрерывной функции по ее отсчетам в соответствии с теоремой В.А. Котельникова. В работе [4] отмечается, что число элементов задержки, необходимых для достижения требуемой степени аппроксимации импульсной характеристики, пропорционально числу значимых отсчетов сигнала, с которым фильтр согласован. Так, для приведенного в работе примера этот метод требует, чтобы число элементов задержки в 57 раз превышало число отсчетов сигнала.

Второй метод, рассмотренный в работе [4], основан на использовании аппроксимации функций полиномами. Для приведенного примера этот метод предполагает, чтобы число элементов задержки на 57 единиц было больше, чем число отсчетов сигнала.

Таким образом, рассмотренные в [4] методы, основанные на синтезе согласованных фильтров по их заданным импульсным характеристикам, требуют большого объема памяти, что ограничивает практическое использование указанных методов.

В настоящей работе сделана попытка решения двуединой задачи: максимально точная аппроксимация импульсной характеристики согласованного фильтра при минимально необходимом количестве элементов.

Основная часть

Пусть задан сигнал $s(t)$, имеющий спектральную плотность

$$S(\mathrm{j}\omega) = S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi(\omega)}, \tag{1}$$

где $S(\omega)$ – модуль спектральной плотности, $\psi(\omega)$ – аргумент спектральной плотности сигнала.

Тогда комплексный коэффициент передачи фильтра, согласованного с сигналом (1), запишется как

$$K_{\text{СФ}}(\mathrm{j}\omega) = S(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}[-\psi(\omega)-\omega t_0]}, \tag{2}$$

где t_0 – длительность сигнала.

Будем рассматривать сигналы, которые описываются причинными функциями, т.е. $s(t) = 0$, если $t < 0$.

В этом случае сигнал можно рассматривать как реакцию некоторой минимально фазовой линейной, инвариантной во времени (ЛИВ) системы на последовательность взвешенных дельта-импульсов

$$s(t) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n g(t - nT_{\text{д}}), \tag{3}$$

где $T_{\text{д}}$ – интервал следования дельта-импульсов, $g(t)$ – импульсная характеристика ЛИВ-системы [4].

Модуль спектральной плотности сигнала $S(\omega)$ равен амплитудно-частотной характеристике указанной ЛИВ-системы.

В общем случае комплексный коэффициент передачи $K_{\text{ЛИВ}}(\mathrm{j}\omega)$ ЛИВ-системы имеет вид отношения двух полиномов по степеням $\mathrm{j}\omega$

$$K_{\text{ЛИВ}}(\mathrm{j}\omega) = K_{\text{ЛИВ}}(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\omega)} = \frac{V(\mathrm{j}\omega)}{W(\mathrm{j}\omega)}, \tag{4}$$

где $K_{\text{ЛИВ}}(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ – амплитудно-частотная (АЧХ) и фазочастотная (ФЧХ) характеристики ЛИВ-системы.

Выделим в числителе и знаменателе дроби (4) вещественные и мнимые части и перепишем комплексный коэффициент передачи ЛИВ-системы в виде

$$K_{\text{ЛИВ}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{M_1(\omega) + \mathrm{j}N_1(\omega)}{M_2(\omega) + \mathrm{j}N_2(\omega)}, \tag{5}$$

где $M_1(\omega)$ и $N_1(\omega)$ – вещественная и мнимая части числителя, $M_2(\omega)$ и $N_2(\omega)$ – вещественная и мнимая части знаменателя, соответственно.

Тогда модуль спектральной плотности сигнала имеет вид

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{M_1^2(\omega) + N_1^2(\omega)}{M_2^2(\omega) + N_2^2(\omega)}}. \tag{6}$$

Прямое преобразование Фурье от обеих частей равенства (1) позволяет записать

$$S(\mathrm{j}\omega) = K_{\text{ЛИВ}}(\omega) \sum_{n=0}^{N-1} a_n \mathrm{e}^{-\mathrm{j}nT_{\text{д}}\omega},$$

или

$$S(\omega)e^{j\psi(\omega)} = K_{\text{ЛИВ}}(\omega)\sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-jnT_{\text{д}}\omega}.$$

С учетом равенства

$$S(\omega) = K_{\text{ЛИВ}}(\omega),$$

получаем

$$e^{j\psi(\omega)} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{-jnT_{\text{д}}\omega}. \tag{7}$$

Т.к. модуль левой части выражения (7) равен единице, то левая часть выражения (5) также имеет модуль равный единице. Тогда можно считать, что фазовый множитель $e^{j\psi(\omega)}$ формируется некоторой всепропускающей цепью, которая вносит в сигнал только фазовые искажения.

Поскольку спектральная плотность сигнала и комплексный коэффициент передачи согласованного с этим сигналом фильтра отличаются только фазовым множителем, то согласованный фильтр можно представить в виде каскадного соединения минимально фазовой ЛИВ-системы и всепропускающей цепи. Причем комплексный коэффициент передачи ЛИВ-системы с учетом (4-6) записывается как

$$K_{\text{ЛИВ}}(j\omega) = S(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \tag{8}$$

Комплексный коэффициент передачи всепропускающей цепи должен иметь вид

$$K_{\text{ВЦ}}(j\omega) = e^{j\theta(\omega)}, \tag{9}$$

где $\theta(\omega)$ – неизвестная ФЧХ всепропускающей цепи.

Таким образом, можно записать

$$K_{\text{СФ}}(j\omega) = K_{\text{ЛИВ}}(j\omega)K_{\text{ВЦ}}(j\omega) = S(\omega)e^{j[\varphi(\omega)+\theta(\omega)]} = S(\omega)e^{j[-\psi(\omega)-\omega t_0]}. \tag{10}$$

Из уравнения (10) следует равенство

$$\varphi(\omega) + \theta(\omega) = -\psi(\omega) - \omega t_0. \tag{11}$$

На основании (5) ФЧХ ЛИВ-системы имеет вид

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}\left(\frac{N_1(\omega)}{M_1(\omega)}\right) - \mathrm{arctg}\left(\frac{N_2(\omega)}{M_2(\omega)}\right). \quad (12)$$

Всепропускающая цепь реализуется с помощью мостовых схем с комплексным коэффициентом передачи вида

$$K_{\text{ВЦ}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{A(\omega) - \mathrm{j}B(\omega)}{A(\omega) + \mathrm{j}B(\omega)}, \quad (13)$$

где $A(\omega)$ и $B(\omega)$ – четный и нечетный полиномы по степеням переменной ω с неизвестными коэффициентами:

$$A(\omega) = \sum_{n=0}^{N} a_n \omega^{2n}, \quad B(\omega) = \sum_{k=0}^{K} b_k \omega^{2k+1}. \quad (14)$$

На основании (13) ФЧХ всепропускающей цепи записывается как

$$\theta(\omega) = -2 \cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right). \quad (15)$$

Перейдем от равенства, составленного для ФЧХ согласованного фильтра, к равенству для группового времени задержки, продифференцировав (11) по частоте ω

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} + \frac{\mathrm{d}\theta(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = -\frac{\mathrm{d}\psi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} - t_0. \quad (16)$$

Из уравнения (16) получаем

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} + \frac{\mathrm{d}\theta(\omega)}{\mathrm{d}\omega} + \frac{\mathrm{d}\psi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = -t_0. \quad (17)$$

Левая часть уравнения (17) представляет собой групповое время запаздывания $\tau(\omega)$ некоторой линии задержки на время t_0. Подставляя в уравнение (17) выражения (12) и (15), получаем

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{N_1(\omega)}{M_1(\omega)}\right)^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{N_1(\omega)}{M_1(\omega)}\right) - \frac{1}{1 + \left(\frac{N_2(\omega)}{M_2(\omega)}\right)^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{N_2(\omega)}{M_2(\omega)}\right) -$$

$$-2\frac{1}{1 + \left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right)^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right) + \frac{\mathrm{d}\psi(\omega)}{\mathrm{d}\omega} = -t_0. \quad (18)$$

Подставим выражения (14) в уравнение (18) и получим первое уравнение для определения неизвестных коэффициентов a_n и b_k.

Для того, чтобы получить максимально плоскую характеристику группового времени задержки этой линейной системы, необходимо все производные $\tau(\omega)$ приравнять к нулю. Таким образом, остальные уравнения для определения a_n и b_k получим путем последовательного дифференцирования уравнения (18). Будем иметь

$$\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\omega^m}\left\{\frac{1}{1+\left(\dfrac{N_1(\omega)}{M_1(\omega)}\right)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{N_1(\omega)}{M_1(\omega)}\right)-\frac{1}{1+\left(\dfrac{N_2(\omega)}{M_2(\omega)}\right)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{N_2(\omega)}{M_2(\omega)}\right)-\right.$$

$$\left.-2\frac{1}{1+\left(\dfrac{B(\omega)}{A(\omega)}\right)^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\frac{B(\omega)}{A(\omega)}\right)+\frac{\mathrm{d}\psi(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\right\}=0. \qquad (19)$$

Число уравнений, входящих в систему, составленную из равенств (18) и (19), должно быть равно числу неизвестных коэффициентов.

Поскольку неизвестные коэффициенты входят в уравнения этой системы в виде своих смешанных произведений, то полученная система уравнений является нелинейной. Такая система имеет множество решений.

Среди всех возможных решений системы уравнений необходимо выбирать те, которые соответствуют критерию устойчивости согласованного фильтра. Для этого необходимо записать передаточную функцию согласованного фильтра, произведя в комплексном коэффициенте передачи согласованного фильтра замену $\mathrm{j}\omega \to p$

$$K_{\text{СФ}}(p) = K_{\text{ЛИВ}}(p) K_{\text{ВЦ}}(p).$$

С учетом (5) и (13) будем иметь

$$K_{\text{СФ}}(p) = \frac{M_1(\omega) + \mathrm{j}N_1(\omega)}{M_2(\omega) + \mathrm{j}N_2(\omega)} \cdot \left.\frac{A(\omega) - \mathrm{j}B(\omega)}{A(\omega) + \mathrm{j}B(\omega)}\right|_{\omega=\frac{p}{\mathrm{j}}}. \quad (20)$$

После чего необходимо определить полюсы p_l передаточной функции $K_{\text{СФ}}(p)$ из уравнения

$$\left.[M_2(\omega) + \mathrm{j}N_2(\omega)] \cdot [A(\omega) + \mathrm{j}B(\omega)]\right|_{\omega=\frac{p}{\mathrm{j}}} = 0. \quad (21)$$

Согласованный фильтр будет устойчивым, если все коэффициенты уравнения (21) положительные числа, а его решения (полюсы p_l) лежат в левой половине комплексной плоскости.

Рассмотрим пример. Пусть ЛИВ-система представляет собой нормированный фильтр нижних частот Баттерворта 6-го порядка с комплексным коэффициентом передачи вида

$$K_{\text{ЛИВ}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{1}{-\omega^6 + \mathrm{j}3{,}86\omega^5 + 7{,}46\omega^4 - \mathrm{j}9{,}14\omega^3 - 7{,}46\omega^2 + \mathrm{j}3{,}86\omega + 1}. \quad (22)$$

Пусть сигнал представляет собой импульсную характеристику нормированного фильтра нижних частот Баттерворта 6-го порядка, т.е.

$$S(\mathrm{j}\omega) = K_{\text{ЛИВ}}(\mathrm{j}\omega). \quad (23)$$

Сигнал, равный импульсной характеристике фильтра, показан на рисунке 1-а. Длительность сигнала принята равной

$$t_0 = 24{,}2 \text{ с}.$$

Комплексный коэффициент передачи всепропускающей цепи будем искать в виде

$$K_{\text{ВЦ}}(\mathrm{j}\omega) = \frac{(a_3\omega^6 + a_2\omega^4 + a_1\omega^2 + a_0) - j(b_4\omega^7 + b_3\omega^5 + b_2\omega^3 + b_1\omega)}{(a_3\omega^6 + a_2\omega^4 + a_1\omega^2 + a_0) + j(b_4\omega^7 + b_3\omega^5 + b_2\omega^3 + b_1\omega)}. \quad (24)$$

Подставляя выражения (22)-(24) в систему уравнений (18)-(19), и решая ее, получаем

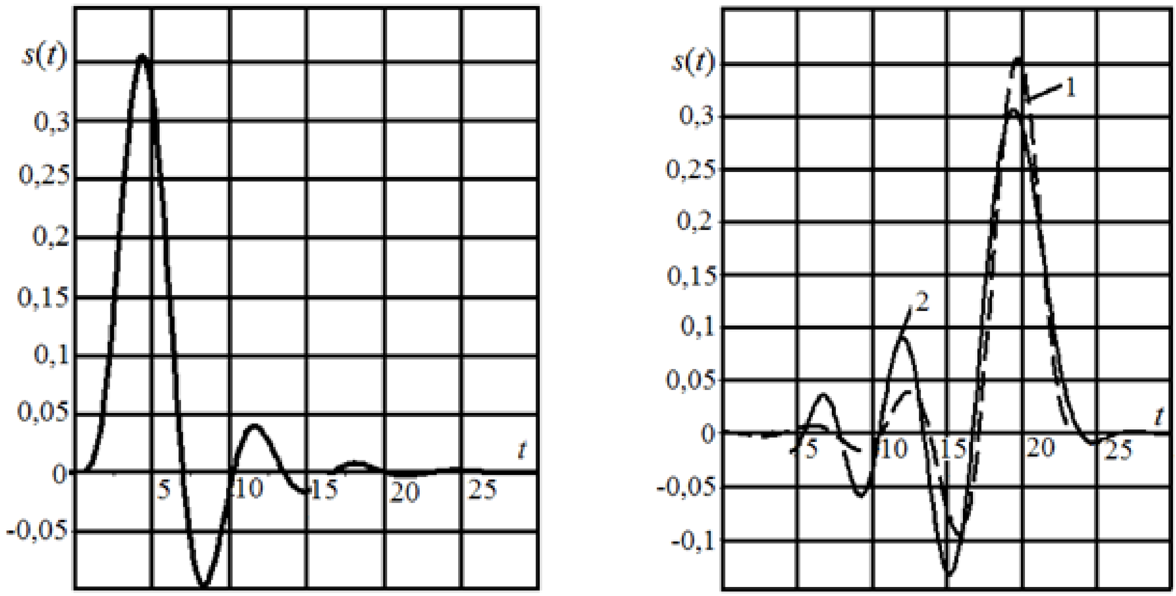
a_0=0; a_1=30,97; a_2=100,4; a_3=54,82; b_1=8,236; b_2=69,32; b_3=94,96; b_4=15,10.

Синтезированный фильтр является устойчивым. Полюсы его передаточной функции лежат в левой половине комплексной плоскости. Так, поскольку ЛИВ-система является нормированным фильтром Баттерворта 6-го порядка, т. е. устойчивым устройством, то достаточно проверить положение полюсов всепропускающей цепи. Эти полюсы имеют следующие значения:

p_1=-0,3869+j0,6699; p_2=-0,5254+j0,4218; p_3=-0,5942+j0,2061; p_4=-0,6155;

p_5=-0,5942-j0,2061; p_6=-0,5254-j0,4218; p_7=-0,3869-j0,6699.

На рисунке 1-б показаны импульсные характеристики идеального и синтезированного согласованных фильтров.



а) б)

Рис. 1. Сигнал и импульсная характеристика согласованного фильтра
1 – импульсная характеристика идеального согласованного фильтра,
2 – импульсная характеристика синтезированного согласованного фильтра

На рисунке 2 показан график группового времени запаздывания $\tau(\omega)$ линии задержки на время t_0.

Как видно из рисунка 1 импульсная характеристика синтезированного фильтра несколько отличается от идеальной характеристики.

Дальнейшее повышение порядка всепропускающей цепи приводит к неустойчивости синтезированного фильтра.

Повысить качество синтезированного фильтра можно, использовав в качестве всепропускающей цепи каскадное соединение двух одинаковых всепропускающих цепей меньшего порядка. В этом случае комплексный коэффициент согласованного фильтра может быть записан в виде

$$K_{СФ}(j\omega) = K_{ЛИВ}(j\omega) K_{ВЦ}^2(j\omega).$$

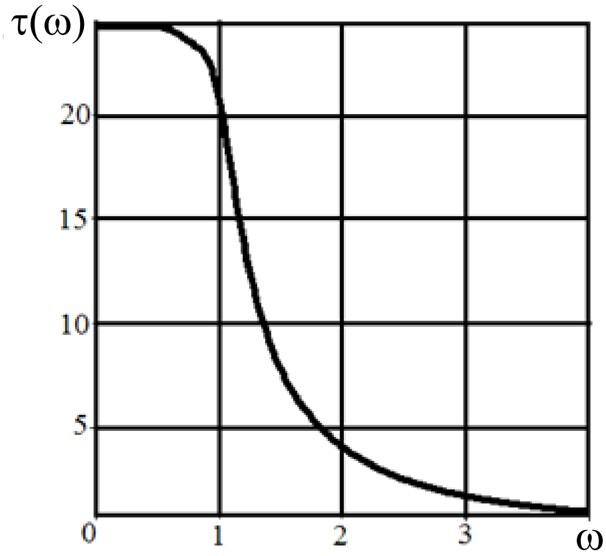


Рис. 2. График группового времени запаздывания $\tau(\omega)$ линии задержки на время t_0

Примем

$$K_{ВЦ}(j\omega) = \frac{(a_2\omega^4 + a_1\omega^2 + a_0) - j(b_3\omega^5 + b_2\omega^3 + b_1\omega)}{(a_2\omega^4 + a_1\omega^2 + a_0) + j(b_3\omega^5 + b_2\omega^3 + b_1\omega)}.$$

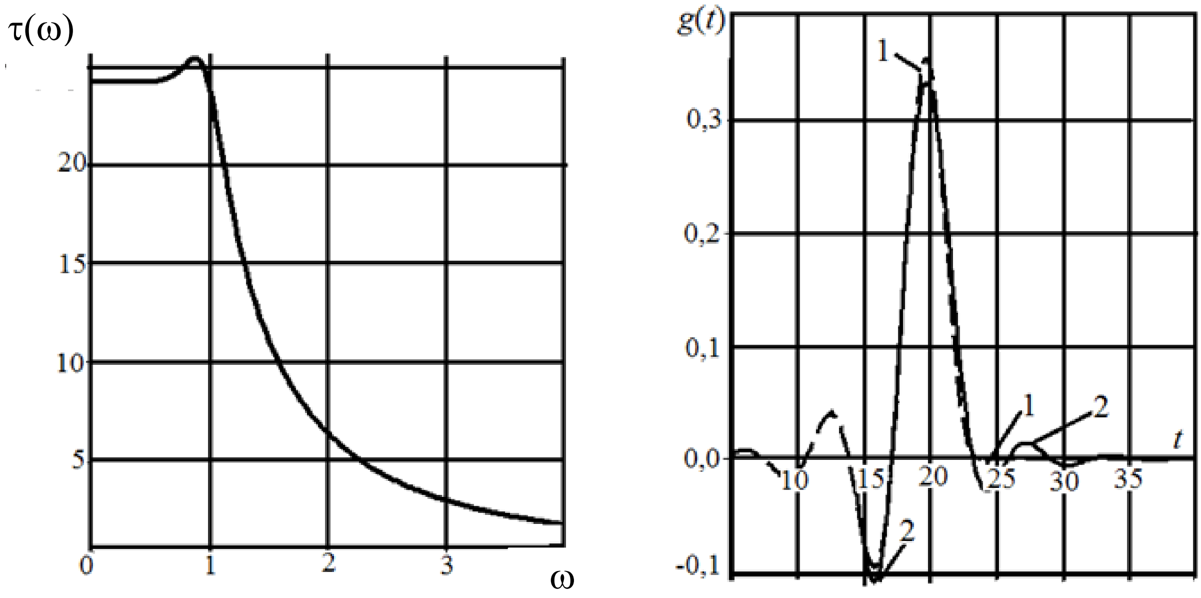
Решаем систему уравнений (18)-(19) и получаем

a_0=1; a_1= 7,258; a_2= 3,436; b_1= 4,118; b_2= 6,845; b_3=0,7184.

Синтезированный фильтр является устойчивым. Полюсы его передаточной функции лежат в левой половине комплексной плоскости. Так, поскольку ЛИВ-система является нормированным фильтром Баттерворта 6-го порядка, т. е. устойчивым устройством, то достаточно проверить положение полюсов одного звена всепропускающей цепи. Эти полюсы имеют следующие значения:

p_1=-0,5822+j0,6349; p_2=-0,7284+j0,2023; p_3=-0,7284-j0,2023; p_4=-0,5822-j0,6349.

График группового времени запаздывания $\tau(\omega)$ линии задержки на время t_0, полученный для этого случая, показан на рисунке 3-а. На рисунке 3-б показаны соответствующие этому случаю импульсные характеристики идеального и синтезированного фильтров.



а) б)

Рис. 3. График группового времени запаздывания $\tau(\omega)$ линии задержки на время t_0 и импульсные характеристики идеального и синтезированного фильтров
1 – импульсная характеристика идеального согласованного фильтра,
2 – импульсная характеристика синтезированного согласованного фильтра

Заключение

Рассмотренный метод синтеза согласованного фильтра приводит к простой технической реализации рассматриваемого устройства. Согласованный фильтр представляет собой каскадное соединение линейной инвариантной во времени системы и всепропускающей цепи.

Линейная инвариантная во времени система имеет амплитудно-частотную характеристику равную модулю спектральной плотности сигнала, с которым фильтр согласован.

Комплексный коэффициент передачи всепропускающей цепи определяется с учетом требуемой фазочастотной характеристики согласованного фильтра.

Линейная инвариантная во времени система реализуется в виде минимально фазового фильтра классическим методом.

Всепропускающая цепь реализуется на основе мостовых схем. Коэффициенты комплексного коэффициента передачи всепропускающей цепи рассчитываются с помощью системы нелинейных уравнений. Выбор порядка всепропускающей цепи и коэффициентов ее комплексного коэффициента передачи ограничивается требованием устойчивости синтезируемого согласованного фильтра.

Повышение качества полученного согласованного фильтра может быть достигнуто путем использования в качестве всепропускающей цепи нескольких мостовых схем меньшего порядка. Ограничивающим фактором в этом случае также выступает устойчивость синтезируемого согласованного фильтра.

Литература

1. Макаров А.М., Ермаков А.С. Оптимальный согласованный фильтр для обнаружения сигнала на фоне шума с неизвестной корреляционной функцией. *Известия ЮФУ. Технические науки*. 2015. №11(172). С.42-54.
2. Попов Д.И. Обнаружение стохастических радиолокационных сигналов. *Известия ВУЗов. Поволжский регион. Технические науки*. 2017. №3(43). С.26-35. https://doi.org/10.21685/2072-3059-2017-3-2
3. Санников В.Г., Алёшинцев А.В. Математическое моделирование многочастотного модема с повышенной помехоустойчивостью. *T-Comm: Телекоммуникации и транспорт*. 2016. Т.10. №7. С.52-58.
4. Дегтярев А.Н., Афонин И.Л., Поляков А.Л., Кожемякин А.С. Синтез согласованных фильтров. *Журнал радиоэлектроники*. 2021. №4 [электронный журнал]. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.9

Для цитирования:

Дегтярев А.Н., Афонин И.Л., Поляков А.Л. Метод синтеза согласованного фильтра. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №8. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.8.8