

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.8.4>

УДК: 53.083.2; 53.082.73

## ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ДИСКОВЫЙ АКТЮАТОР КРУЧЕНИЯ С ДИСКРЕТНО-СПИРАЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

А. А. Паньков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет  
614990, Пермь, Комсомольский пр-кт, д. 29

Статья поступила в редакцию 12 мая 2024 г.

**Аннотация.** Разработана математическая модель дискового (кольцевого) актюатора кручения с криволинейными встречно-гребенчатыми электродами – «ворсинками» спирального вида, которые характеризуются постоянным значением ориентационного угла произвольного участка ворсинки к окружному направлению диска. Основания электрод-ворсинок, взаимодействующих между собой через локальные области пьезоэлектрического слоя, присоединены с периодическим чередованием к центральному или периферийному концентрическим окружным базовым электродам, к выходам которых подключается управляющие электрические напряжения. В результате численного моделирования «биморфа кручения» построены графики зависимости угла закручивания и блокирующего крутящего момента от отношения внутреннего и внешнего радиусов и значений управляющего электрического напряжения на выходах базовых электродов кольцевого двухслойного актюатора с симметричными (относительно радиальной линии) направлениями спиральных ориентаций электрод-ворсинок и, как следствие, спиральных линий поляризации пьезоэлектрических слоев, работающих на растяжение/сжатие.

**Ключевые слова:** пьезоэлектрический актюатор, встречно-гребенчатые электроды, электроупругость, кручение, численное моделирование.

**Финансирование:** Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

**Автор для переписки:** Паньков Андрей Анатольевич, [a\\_a\\_pankov@mail.ru](mailto:a_a_pankov@mail.ru)

## **Введение**

Пьезоэлектрические элементы широко используются в качестве датчиков и актюаторов в системах автоматического мониторинга и управления, радиотехнике, электронике, оптике, аэрокосмической и медицинской технике, «зеленой» энергетике [1-12]. Широкое применение находят пленочные композитные MFC-актюаторы [13-17], которые состоят из композитного пьезоэлектрического слоя в виде близко уложенных в один ряд однонаправленных пьезоэлектрических волокон – монокристаллов [15] в эпоксидном связующем, а прямолинейные встречно-гребенчатые взаимодействующие электроды установлены на поверхности композитного слоя. По аналогии с устройством MFC-актюатора в [16-18] предложен ряд новых пьезоэлектрических актюаторов, в частности: мембранные (MDS) [16] и цилиндрические (CDS) [17] актюаторы с двойными спиралями взаимодействующих электродов, пластинчатые и оболочечные актюаторы с «древовидными» встречно-гребенчатыми электродами [18].

Цель – разработка математических моделей функционирования пьезоэлектрических дисковых актюаторов с «древовидными» встречно-гребенчатыми электродами [18] на примере дискового актюатора кручения с дискретно-спиральными электродами.

## 1. Дисковые актюаторы со встречно-гребенчатыми электродами

Пьезоэлектрические актюаторы с «древовидными» встречно-гребенчатыми электродами [18] представляют собой, в общем, криволинейный пьезоэлектрический слой, на поверхности или внутри (по толщине) которого расположено множество сопряженных встречно-гребенчатых «ветвей» – криволинейных электродов, отходящие от двух базовых линейных электродов двух токопроводящих подсистем электродов. К выходам базовых электродов токопроводящих подсистем подводится управляющее электрическое напряжение. Каждая криволинейная ветвь одной подсистемы расположена в промежутке (без непосредственного электрического контакта) между соседними сонаправленными (геометрически подобными) ветвями другой подсистемы электродов. Электрическое взаимодействие разнонаправленных ветвей электродов различных подсистем осуществляется опосредованно через соответствующие локальные области пьезоэлектрического слоя между соседними «встречными» электродами первой и второй подсистем. К таким пьезоэлектрическим актюаторам с «древовидными» встречно-гребенчатыми электродами [18] относится рассматриваемый спирально-гребенчатый дисковый (TrsnCD) актюатор кручения (рис. 1), где символами (●) отмечены выходы базовых электродов для подключения к ним управляющего электрического напряжения  $U_{con}$ .

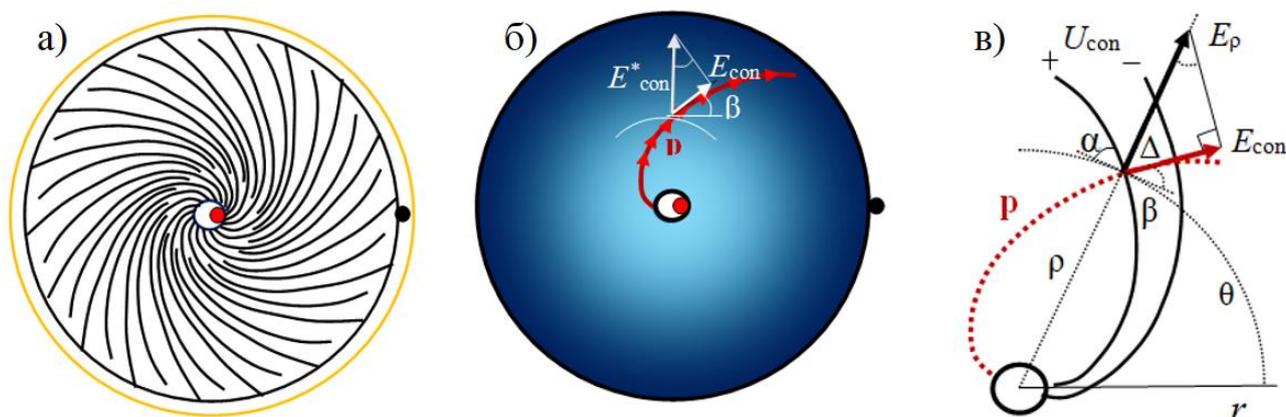


Рис. 1. Спирально-гребенчатый дисковый актюатор кручения (а) со спиральной поляризацией  $\mathbf{p}$  (красная линия) гомогенизированной области (б) и расчетной схемой (в), где  $\alpha = \pi/4$  – угол между направлением электродов и окружным направлением  $\theta$ ,  $\beta = \pi/2 - \alpha$ .

Поляризации пьезоэлектрических слоев актюаторов (рис. 1) с «древовидными» встречно-гребенчатыми электродами осуществляется (на этапе изготовления актюаторов) подключением к выходам базовых электродов поляризующего значения электрического напряжения  $U_{pol}$ , что обуславливает взаимообратные поляризации  $\pm \mathbf{p}$  вдоль линии поляризации  $\xi_3$  локальных областей пьезоэлектрического слоя (рис. 2) в его поперечном (ортогональном ветвям электродов) сечении. Элементарная ячейка  $V$  пьезоэлектрического слоя (актюатора) и ее приведенная расчетная схема изображены на рис. 3.

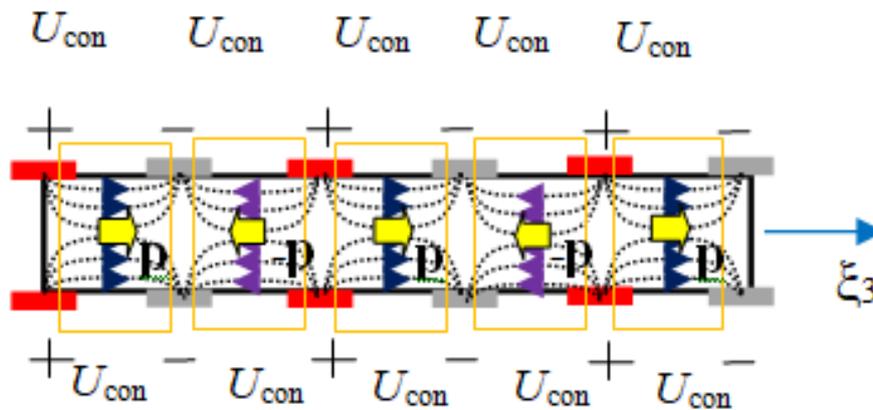


Рис. 2. Расположения электродов на верхней и нижней поверхностях и направления поляризаций  $\mathbf{p}$  пьезоэлектрического слоя вдоль линии поляризации  $\xi_3$

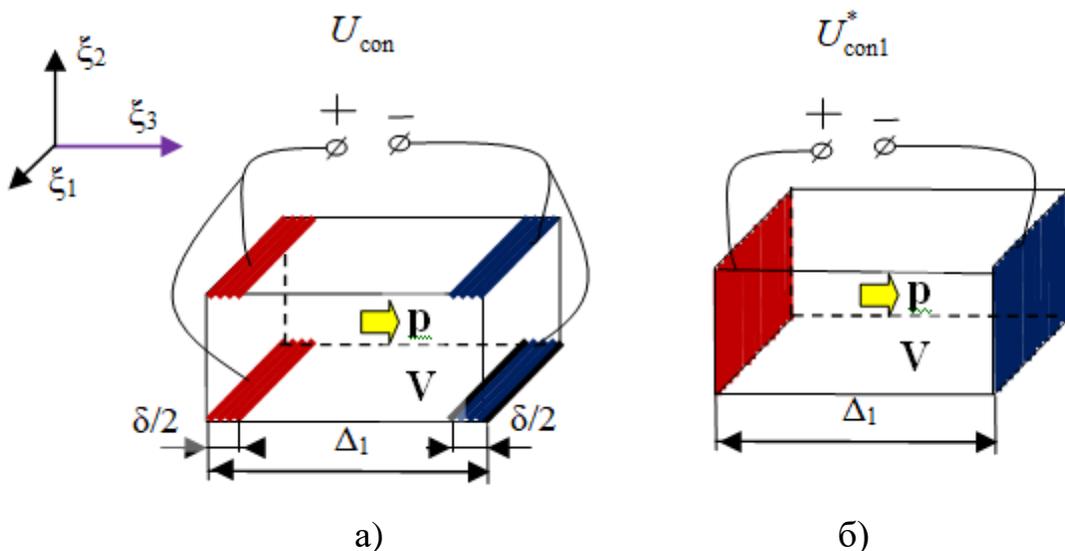


Рис. 3. Элементарная ячейка (а) и ее приведенная расчетная схема (б) в локальной системе координат  $\xi$ , где  $\xi_3$  – ось поляризации.

## 2. Математическая модель дискового TrsnCD-актюатора кручения

Спирально-гребенчатый дисковый (TrsnCD) актюатор (рис. 1а) включает в себя периодически чередующиеся (по окружной координате) разнонаправленные (от центра и к центру) однотипные спирально-ворсиночные электроды с различными электрическими потенциалами  $\phi_1$ ,  $\phi_2$ , передающимися от «центрального» и «периферийного» концентрических окружных базовых электродов, расположенных соответственно на внутреннем и внешнем контурах кольцевой области пьезоэлектрической пластины, с радиусами  $r_0, R$  и заданным на них значением управляющего электрического напряжения  $U_{\text{con}} = \phi_1 - \phi_2$  (рис. 1). В общем, такой пьезоэлектрический актюатор в виде круглой кольцевой пьезоэлектрической пластины с установленными на ней электродами имеет ось симметрии  $n$ -го порядка, где  $n$  – число эквипотенциальных электродов каждого вида. Все спирально-ворсиночные электроды характеризуются постоянным значением угла  $\alpha$  между локальным направлением криволинейного электрода и окружной координатной линией  $\theta$ ,  $\beta = \pi/2 - \alpha$  – ориентационный угол электрода к радиальному направлению, область значений  $\rho \in (r_0; R)$ . Для случая, когда  $\beta = 0$ , тогда электроды расположены радиально и линия поляризации по окружной координате, а при  $\beta \rightarrow \pi/2$  имеем окружные электроды и радиальную поляризацию. На рис. 1 изображен вид криволинейных электродов для случая  $\alpha = \beta = \pi/4$ , что соответствует пьезоэлектрическому TrsnCD-актюатору кручения.

Для произвольного криволинейного электрода (с постоянным значением угла  $\alpha$  между направлением криволинейного электрода и окружной координатной линией  $\theta$ ) общее решение в полярной системе координат  $\rho, \theta$  имеет вид

$$\rho = Ce^{\theta \operatorname{tg} \alpha}$$

с учетом вспомогательных выражений

$$d\rho = \rho \operatorname{tg} \alpha d\theta, \quad \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tg} \alpha d\theta, \quad \int \frac{d\rho}{\rho} = \operatorname{tg} \alpha \int d\theta, \quad \ln \frac{\rho}{C} = \theta \operatorname{tg} \alpha.$$

В частности, для  $k$ -го криволинейного электрода (начало и конец которого расположены в точках с координатами  $(r_0; \theta_{0(k)})$  и  $(R; \theta_{R(k)})$  соответственно, где  $k = \overline{1, n}$ ,  $n$  – число эквипотенциальных, т.е. «центральных» или «периферийных» электродов) имеем уравнение

$$\rho_{(k)} = C_{(k)} e^{\theta \operatorname{tg} \alpha}$$

с областью значений  $\theta \in (\theta_{0(k)}; \theta_{R(k)})$ , где

$$\theta_{0(k)} \equiv 2\pi k / n,$$

константа интегрирования

$$C_{(k)} = \frac{r_0}{e^{\theta_{0(k)} \operatorname{tg} \alpha}}$$

определена из условия:  $\rho = r_0$  при  $\theta = \theta_{0(k)}$ , полярный угол

$$\theta_{R(k)} = \frac{\ln(R / C_{(k)})}{\operatorname{tg} \alpha}$$

– из условия:  $\rho = R$  при  $\theta = \theta_{R(k)}$ .

При приложении к базовым (центральному и периферийному) кольцевым электродам (рис. 1б) с радиусами  $r_0, R$  электрических потенциалов  $\phi_r, \phi_R$  в пластине возникает электрическая напряженность, например, в приближении электростатики (без учета пьезоэффекта) в виде (рис. 1в)

$$E_\rho \approx \frac{U_{\text{con}}^*}{\rho \ln(R / r_0)} \quad (1)$$

как функция от координаты  $\rho$  с проекцией на линию поляризации

$$E_{\text{con}} = E_\rho \sin \alpha, \quad (2)$$

где величина приведенного управляющего электрического напряжения

$$U_{\text{con}}^* \equiv \phi_r - \phi_R.$$

После осреднения оператором  $\langle \dots \rangle$  левой и правой частей равенства (2) «по радиусу»  $\rho \in (r_0; R)$  получим

$$\left\langle \frac{1}{\Delta} \right\rangle \kappa U_{\text{con}} = \frac{U_{\text{con}}^*}{R - r_0} \sin \alpha \quad (3)$$

с учетом равенств

$$E_{\text{con}} = \kappa U_{\text{con}} / \Delta, \quad \langle E_{\rho} \rangle = U_{\text{con}}^* / (R - r_0), \quad (4)$$

где коэффициент  $\kappa \approx 0.92$  (найден из решения задачи электростатики для элементарной ячейки (рис. 3)) учитывает поверхностное расположение электродов на пьезоэлектрическом слое (диске) актюатора. Выразим из (3) величину приведенного значения управляющего электрического напряжения

$$U_{\text{con}}^* = \frac{R - r_0}{\sin \alpha} \left\langle \frac{1}{\Delta} \right\rangle \kappa U_{\text{con}}$$

или в виде

$$U_{\text{con}}^* = \frac{r_0 \ln(R / r_0)}{\Delta_0 \sin \alpha} \kappa U_{\text{con}} \quad (5)$$

с учетом функциональной зависимости

$$\Delta = \rho \Delta_0 / r_0 \quad (6)$$

расстояния  $\Delta$  между соседними взаимодействующими криволинейными электродами от координаты  $\rho$ , при этом осредненное значение

$$\left\langle \frac{1}{\Delta} \right\rangle = \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle \frac{r_0}{\Delta_0} = \frac{r_0 \ln(R / r_0)}{\Delta_0 (R - r_0)},$$

где  $\Delta_0$  – расстояние между электродами при  $\rho = r_0$ , так как

$$\left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle \equiv \frac{1}{R - r_0} \int_{r_0}^R \frac{d\rho}{\rho} = \frac{\ln(R / r_0)}{R - r_0}.$$

Таким образом, из формул (1), (2) следует выражение для величины напряженности управляющего электрического поля

$$E_{\text{con}} = \frac{\sin \alpha}{\rho \ln(R / r_0)} U_{\text{con}}^* \quad (7)$$

гомогенизированной расчетной схемы на рис. 1б, из которого с учетом (5) следует вид

$$E_{\text{con}} = \frac{r_0}{\rho \Delta_0} \kappa U_{\text{con}}, \quad (8)$$

что совпадает с выражением, полученным непосредственной подстановкой в формулу  $E_{\text{con}} = \kappa U_{\text{con}} / \Delta$  (4) выражения  $\Delta = \rho \Delta_0 / r_0$  (6) первоначальной расчетной схемы (рис. 1а).

Для рассматриваемой кольцевой пластины (рис. 1б) с криволинейной трансверсальной изотропией электроупругих свойств (обусловленной криволинейной поляризацией  $\mathbf{p}$ ) локальная ось поляризации  $\xi_3$  – ось симметрии свойств имеет единичный направляющий вектор  $\mathbf{l} = \{l_1; l_2; 0\}$  с координатами  $l_1 = \cos(\theta - \beta)$ ,  $l_2 = \sin(\theta - \beta)$  или в виде

$$l_1 = \sin(\theta + \alpha), \quad l_2 = -\cos(\theta + \alpha)$$

с учетом равенства  $\beta = \pi / 2 - \alpha$  в системе координат  $r_{1,2,3}$ . Используем разложения компонент  $C_{ijmn}$ ,  $e_{imn}$ ,  $\lambda_{imn}$  трансверсально-изотропных тензоров 4-го ( $\mathbf{C}$ ), 3-го ( $\mathbf{e}$ ) и 2-го ( $\lambda$ ) рангов в  $r_{1,2,3}$  по тензорному базису [19]

$$C_{ijmn} = \sum_{p=1}^6 c_{(p)} T_{(p)ijmn},$$

$$e_{imn} = e_{31} l_i \delta_{mn} + (e_{33} - e_{31} - 2e_{15}) l_i l_m l_n + e_{15} (l_m \delta_{in} + l_n \delta_{im}),$$

$$\lambda_{in} = \lambda_1 \delta_{in} + (\lambda_3 - \lambda_1) l_i l_n,$$

где

$$T_{(1)ijmn} = a_{ij} a_{mn}, \quad T_{(2)ijmn} = a_{ij} l_m l_n, \quad T_{(3)ijmn} = a_{mn} l_i l_j,$$

$$T_{(4)ijmn} = l_i l_j l_m l_n, \quad T_{(5)ijmn} = a_{im} a_{jn} + a_{in} a_{jm}, \quad T_{(6)ijmn} = a_{im} l_j l_n + a_{in} l_j l_m + a_{jm} l_i l_n + a_{jn} l_i l_m,$$

$c_{(p)}$  – коэффициенты разложения ( $c_{(2)} = c_{(3)}$ ), компоненты  $a_{ij} = \delta_{ij} - l_i l_j$ ,

$\delta$  – символ Кронекера с учетом матричных обозначений:  $c_{11} \equiv C_{1111}$ ,  $c_{33} \equiv C_{3333}$ ,

...,  $e_{31} \equiv e_{311}$ ,  $e_{33} \equiv e_{333}$ ,  $e_{15} \equiv e_{113}$  и  $\lambda_1 \equiv \lambda_{11} = \lambda_{22}$ ,  $\lambda_3 \equiv \lambda_{33}$  компонентов тензоров

$\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{e}$ ,  $\lambda$  в главных осях, вид матриц

$$\|c_{ij}\| = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{13} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$\|e_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \|\lambda_{ij}\| = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

где  $c_{66} = (c_{11} - c_{12}) / 2$ , тензорные и матричные индексы связаны между собой соотношениями:  $11 \rightarrow 1$ ,  $22 \rightarrow 2$ ,  $33 \rightarrow 3$ ,  $23$  и  $32 \rightarrow 4$ ,  $13$  и  $31 \rightarrow 5$ ,  $12$  и  $21 \rightarrow 6$ . Решение задачи электроупругости для гомогенизированной расчетной области (рис. 1б) может быть получено, в частности, в рамках «термоанalogии» в приближении, что отличной от нуля является лишь «рабочая» компонента ( $e_{333}$ ) тензора  $e$  пьезоэлектрических модулей, соответствующая осевой деформации вдоль  $\xi_3$  – «линии поляризации».

### 3. Двухслойный дисковый TrsnCD-актюатор кручения

Для повышения эффективности (например, увеличения угла закручивания  $\Omega$ , внешнего ( $R$ ) относительно внутреннего ( $r_0$ ) контуров) пьезоэлектрического TrsnCD-актюатора в два и более раз может быть использована пакетная двухслойная структура из двух однотипных актюаторов (рис. 1а) с взаимобратными (симметричным относительно радиальной координатной линии  $\rho$ ) направлениями «закручиваний» ( $\pm\alpha$ ) спирально-ворсиночных электродов и, как следствие, спиральных линий поляризаций ( $\pm\beta$ ) слоев (актюаторов). Слои актюаторов соединены между собой электроизоляционными (клеевыми) прослойками, в результате, слои взаимодействуют между собой лишь деформационными полями. Для случая, когда  $\alpha = \beta = \pi/4$  (рис. 1), тогда расположение (и направление закручивания) спирально-ворсиночных электродов одного слоя совпадает с

соответствующими линиями (направлениями) поляризации второго слоя и наоборот, т.е. электроды второго слоя – вдоль соответствующих линий поляризации первого слоя. Для двухслойного TrsnCD-актюатора кручения значения управляющих электрических напряжений на первом  $U_{\text{con1}}$  и втором  $U_{\text{con2}}$  актюаторах взаимнообратны, т.е.  $U_{\text{con2}} = -U_{\text{con1}}$ . В рамках «термоанalogии» [20] сдвиговые деформации

$$\gamma_{\rho\theta}(\rho) = \frac{\sigma_{\rho\theta}(\rho)}{G_{\rho\theta}^*} + \alpha_{\rho\theta}(\rho)U_{\text{con}}^* \quad (10)$$

складываются из упругих  $\sigma_{\rho\theta} / G_{\rho\theta}^*$  и пьезоэлектрических «тепловых»  $\alpha_{\rho\theta}U_{\text{con}}^*$  составляющих с коэффициентом «теплового» расширения

$$\alpha_{\rho\theta} = \frac{d_{333}^* \sin \alpha}{\rho \ln(R / r_0)}, \quad (11)$$

где эффективный модуль сдвига  $G_{\rho\theta}^*$  (в координатных осях  $\rho, \theta$ ) и деформационный пьезомодуль  $d_{333}^*$  (вдоль каждого из локальных направлений  $\xi_3', \xi_3''$  криволинейных линий поляризации слоев) двухслойного пакета слоев, например, в приближении Фойгта

$$G_{\rho\theta}^* = G_{(a)\rho\theta}, \quad d_{333}^* = d_{(a)333} / 2 \quad (12)$$

выражаются через соответствующий модуль сдвига  $G_{(a)\rho\theta}$  и деформационный пьезомодуль  $d_{(a)333}$  (вдоль направления  $\xi_3$  поляризации) элементарной однослойной ячейки актюатора (рис. 1а) с учетом выражения (7).

Для гомогенизированной расчетной схемы двухслойного TrsnCD-актюатора кручения, считая, что для каждой его элементарной двухслойной ячейки отличными от нуля являются лишь макродеформация «чистого сдвига»  $\gamma_{\rho\theta}$ , как результат растяжения/сжатия в двух взаимоортогональных направлениях (по линиям поляризации слоев, см. рис. 1б) под углами  $\pm\pi/4$  к координатным линиям  $\rho, \theta$  (рис. 4).

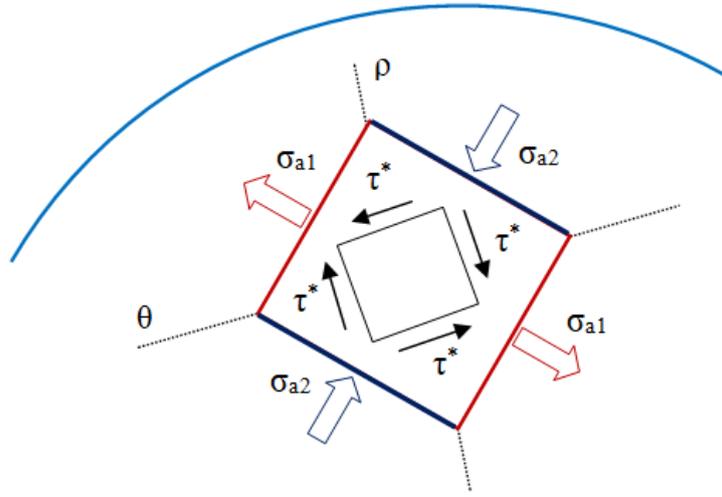


Рис. 4. Расчетная схема чистого сдвига  $\tau^*$  как результат растяжения  $\sigma_{a1}$  и сжатия  $\sigma_{a2}$  в двух взаимно-ортогональных направлениях.

Считаем, что «макроскопические» (т.е. осредненные по двухслойному пакету) касательные напряжения  $\tau^* \approx \sigma_a / 2$ , при равенстве абсолютных значений величин нормальных напряжений  $\sigma_{a2} = \sigma_{a1}$  для обоих слоев (актюаторов). Считаем, что для рассматриваемого случая «самозакручивания» кольцевого актюатора (рис. 1а) отличными от нуля являются лишь касательные напряжения  $\tau^* \equiv \sigma_{\rho\theta}$  (10), которые в полярной системе координат удовлетворяют уравнению равновесия

$$\frac{d\sigma_{\rho\theta}}{d\rho} + \frac{2\sigma_{\rho\theta}}{\rho} = 0$$

с общим решением  $\sigma_{\rho\theta} = A / \rho^2$ , где  $A$  – константа интегрирования. Искомое решение -

$$\sigma_{\rho\theta} = \tau_R (R / \rho)^2, \quad (13)$$

с учетом, что величина  $A = \tau_R R^2$  найдена из граничного условия

$$\sigma_{\rho\theta}|_{\rho=R} = \tau_R, \quad (14)$$

где  $\tau_R$  – касательные напряжения на внешнем контуре кольцевой области. При этом касательные напряжения на внешнем  $\tau_R$  и внутреннем  $\tau_0 = \sigma_{\rho\theta}|_{\rho=r_0}$

контурах связаны между собой уравнением равновесия для крутящих моментов

$$2\pi h \tau_0 r_0^2 = 2\pi h \tau_R R^2 \text{ в виде}$$

$$M_{\bullet} / (2\pi h) = \tau_0 r_0^2 = \tau_R R^2, \quad (15)$$

где  $M_{\bullet}$  – результирующий «блокирующий» крутящий момент как характеристика двухслойного актюатора кручения (для случая жесткого закрепления его внутреннего и внешнего контуров),  $h = 2h_a$  – толщина (равная удвоенной толщине  $h_a$  одиночного пьезоэлектрического актюаторного слоя, см. рис. 1а) двухслойного актюатора; толщиной поверхностных электродов можно пренебречь для упрощения расчетной схемы. Отметим, что уравнение равновесия крутящих моментов (15) следует из решения (13) при  $\rho = r_0$  с учетом  $\tau_0 = \sigma_{\rho\theta}|_{\rho=r_0}$ . Для рассматриваемого случая, когда внутренний и внешний контуры двухслойного актюатора жестко закреплены и, как следствие, результирующий угол поворота внешнего контура относительно внутреннего равен нулю, т.е. имеем равенство

$$\int_{r_0}^R \gamma_{\rho\theta} d\rho = 0$$

или с учетом (10) – (13) в виде

$$\frac{1}{G_{\rho\theta}^*} \int_{r_0}^R \sigma_{\rho\theta} d\rho + U_{\text{con}}^* \int_{r_0}^R \alpha_{\rho\theta} d\rho = 0$$

или

$$\frac{\tau_R R^2}{G_{(a)\rho\theta}} \left( \frac{1}{r_0} - \frac{1}{R} \right) + \frac{1}{2} U_{\text{con}}^* d_{(a)333} \sin \alpha = 0$$

и в результате получим искомое выражение

$$\tau_R = \frac{G_{(a)\rho\theta} d_{(a)333} \sin \alpha}{2R(R/r_0 - 1)} U_{\text{con}}^* \quad (16)$$

для вычисления величины  $\tau_R$  – касательного напряжения, действующего на внешнем (жестко закрепленном) контуре; далее, с использованием  $\tau_R$  (16) находим величины  $M_{\bullet}, \tau_0$  (15).

Для случая двухслойного TrsnCD-актюатора кручения со свободным внешним и/или внутренним контурами с радиусами  $R, r_0$  имеем граничные значения касательных напряжений  $\tau_R = \tau_0 = 0$  и, как следствие, равенство  $\sigma_{\rho\theta} = 0$  внутри всей кольцевой области, при этом сдвиговые деформации имеют вид

$$\gamma_{\rho\theta}(\rho) = \alpha_{\rho\theta}(\rho)U_{\text{con}}^* \quad (17)$$

с учетом (10), константа  $A = 0$ . Результирующий угол поворота  $\Omega_{\bullet}$  внешнего контура относительно неподвижного внутреннего рассчитываем по формуле

$$\Omega_{\bullet} = \frac{1}{R} \int_{r_0}^R \gamma_{\rho\theta} d\rho = \frac{U_{\text{con}}^*}{R} \int_{r_0}^R \alpha_{\rho\theta} d\rho = \frac{d_{(a)333} \sin \alpha}{2R} U_{\text{con}}^* \quad (18)$$

с учетом (11), (17).

В результате, для двухслойного TrsnCD-актюатора кручения имеем формулы

$$\Omega_{\bullet} = \frac{\kappa d_{(a)333} \ln \zeta}{2\zeta \Delta_0} U_{\text{con}} \quad (19)$$

$$M_{\bullet} = R^2 \frac{\pi \kappa h G_{(a)\rho\theta} d_{(a)333} \ln \zeta}{\Delta_0 \zeta (\zeta - 1)} U_{\text{con}} \quad (20)$$

вычисления результирующего угла закручивания  $\Omega_{\bullet}$  (внешнего контура относительно неподвижного внутреннего) и блокирующего крутящего момента  $M_{\bullet}$  актюатора с учетом обозначения  $\zeta \equiv R/r_0$ , формул (15), (16), (18) и выражения приведенного значения управляющего электрического напряжения  $U_{\text{con}}^*$  через его действительное значение  $U_{\text{con}}$  (5) между взаимодействующими криволинейными электродами; выполняются равенства

$$\tau_0 = \tau_R \zeta^2, \quad \tau_R = \frac{\kappa G_{(a)\rho\theta} d_{(a)333} \ln \zeta}{2\Delta_0 \zeta (\zeta - 1)} U_{\text{con}}; \quad (21)$$

коэффициент «жесткости» актюатора

$$k_{\bullet} \equiv M_{\bullet} / \Omega_{\bullet} = 2\pi h G_{(a)\rho\theta} R^2 / (\zeta - 1). \quad (22)$$

При действии на внешний контур частично-блокирующего крутящего момента  $M \in (0; M_*)$  имеем величину угла закручивания

$$\Omega = \Omega_* (1 - M / M_*) \quad (23)$$

из области значений  $\Omega \in (0; \Omega_*)$ . Величина коэффициента  $k_*$  (22) характеризует угол наклона прямолинейного графика функции (23) к оси  $\Omega$ .

Для случая трехслойного пакета слоев, когда слои кольцевых актюаторов (рис. 1а) расположены (приклеены) на верхней и нижней сторонах круглой кольцевой упругой мембраны в виде дополнительного «центрального» слоя толщиной  $h_m$  и со значениями радиусов  $R, r_0$ , тогда величины  $G_{\rho\theta}^*$ ,  $d_{333}^*$  в формулах (11), (12) надо заменить на эффективные значения, например, также как в (12) в приближении Фойгта

$$G_{\rho\theta}^* = c_a G_{(a)\rho\theta} + (1 - c_a) G_{(m)\rho\theta}, \quad d_{333}^* = c_a d_{(a)333} / 2 \quad (24)$$

для трехслойного пакета слоев, где  $c_a = 2h_a / h$  – относительная суммарная толщина ( $2h_a$ ) актюаторных слоев,  $h = h_m + 2h_a$  – полная толщина трехслойного пакета. В результате, аналоги формул (19) – (21) вычисления результирующего угла закручивания  $\Omega_*$ , блокирующего крутящего момента  $M_*$  актюатора и касательного напряжения  $\tau_R$  на внешнем (жестко закрепленном) контуре примут вид

$$\Omega_* = \frac{\kappa d_{333}^* \ln \zeta}{\zeta \Delta_0} U_{\text{con}}, \quad M_* = R^2 \frac{2\pi \kappa h G_{\rho\theta}^* d_{333}^* \ln \zeta}{\Delta_0 \zeta (\zeta - 1)} U_{\text{con}}, \quad (25)$$

$$\tau_R = \frac{\kappa G_{\rho\theta}^* d_{333}^* \ln \zeta}{\Delta_0 \zeta (\zeta - 1)} U_{\text{con}} \quad (26)$$

с учетом выражения  $\tau_0 = \tau_R \zeta^2$ , (24), при этом коэффициент жесткости

$$k_* = 2\pi h G_{\rho\theta}^* R^2 / (\zeta - 1). \quad (27)$$

#### 4. Результаты численного моделирования

Были заданы следующие значения параметров расчетной области двухслойного TrsnCD-актюатора кручения в виде двухслойной кольцевой пластины с внешним  $R = 6$  см и внутренним  $r_0 = 0.1$  мм радиусами, толщина пластины  $h = 2h_a = 0.6$  мм при толщине одиночного слоя (актюатора)  $h_a = 0.3$  мм. Электроупругие свойства 1-го и 2-го слоев (актюаторов) отличаются лишь направлениями  $\mathbf{p}_{1,2}$  спиральной поляризации, так как 2-й слой – это «перевернутый» 1-й слой на основе пьезокерамики (PZT-5A) с деформационным пьезомодулем  $d_{(a)333} \approx 300$  пКл/Н вдоль локального направления  $\xi_3$  криволинейной линии поляризации каждого слоя, модуль сдвига  $G_{(a)\rho\theta} \approx 20$  ГПа под углом  $\pi/4$  к главным осям  $\xi_3, \xi_1$  в плоскости слоя;  $\xi_2$  направлена по нормали к слою. На рис. 5 даны зависимости результирующего угла закручивания  $\Omega_\bullet$  и блокирующего крутящего момента  $M_\bullet$  от отношения  $r_0/R$  внутреннего  $r_0$  и внешнего  $R = 6$  см радиусов актюатора при фиксированном значении 0.5 мм расстояния между ворсинками взаимодействующих электродов вблизи внутреннего контура  $r_0$  для случая  $U_{\text{con}} = 1000$  В. На рис. 6 даны графики линейных зависимостей (23) угла закручивания  $\Omega \in (0; \Omega_\bullet)$  от величины действующего на внешний контур частично-блокирующего крутящего момента  $M \in (0; M_\bullet)$  для случая  $r_0/R = 0.3$  (рис. 6а), 0.6 (рис. 6б).

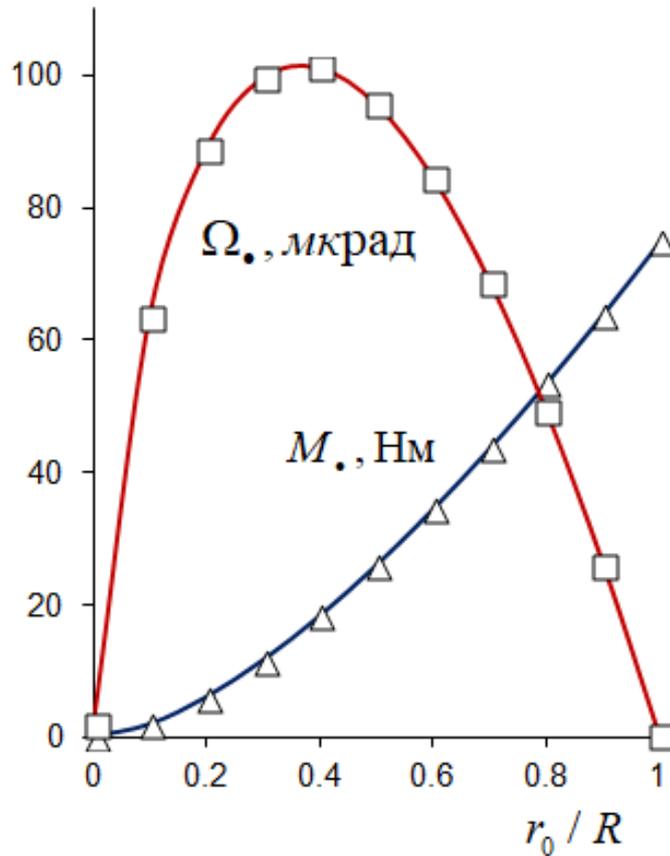


Рис. 5. Зависимости угла закручивания  $\Omega$  и блокирующего крутящего момента  $M$  от отношения  $r_0 / R$  внутреннего  $r_0$  и внешнего  $R = 6$  см радиусов TrsnCD-актюатора.

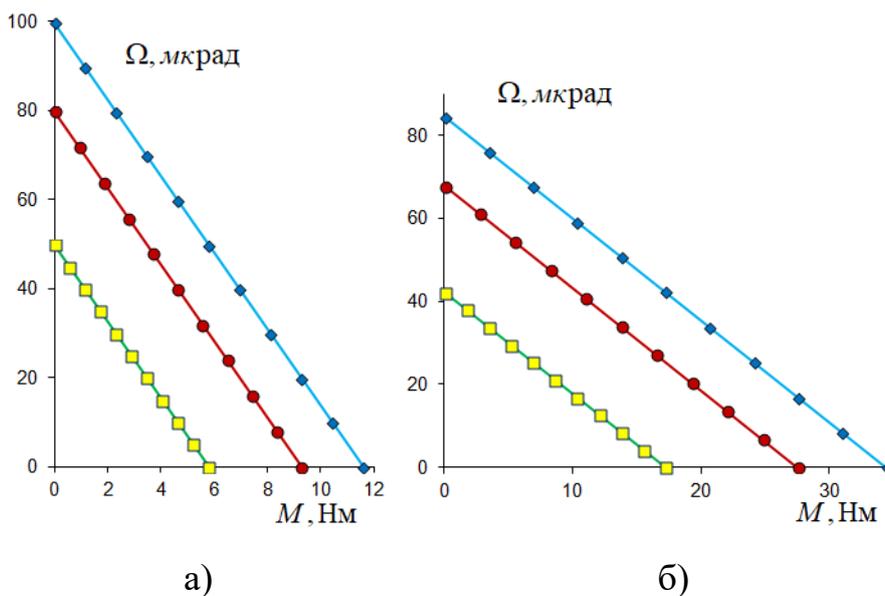


Рис. 6. Зависимости угла закручивания  $\Omega$  от крутящего (блокирующего) момента  $M$  двухслойного TrsnCD-актюатора при  $U_{\text{con}} = 500$  В (■), 800 В (●), 1000 В (◆) для случая  $r_0 / R = 0.3$  (а), 0.6 (б).

## Заключение

Разработана математическая модель дискового TrsnCD-актюатора кручения (рис. 1) с ворсиночными (дискретно-спиральными) встречно-гребенчатыми электродами типа «крыльчатка»; криволинейные электрод-ворсинки характеризуются постоянным значением ориентационного угла  $\alpha$  произвольного линейного участка ворсинки к окружному направлению диска. Основания противоположно направленных электрод-ворсинок, взаимодействующих между собой через локальные области пьезоэлектрического слоя, присоединены с периодическим чередованием по окружному направлению диска к внутреннему (центральному) или периферийному концентрическим окружным базовым электродам (с радиусами  $r_0, R$ ), к выходам которых подключается поляризующее  $U_{pol}$  (на этапе изготовления) или управляющее  $U_{con}$  электрические напряжения. Малые значения расстояний между электрод-ворсинками различных «центральной» и «периферийной» подсистем взаимодействующих электродов обуславливают высокие значения электрических напряженностей в локальных областях пьезоэлектрического слоя между электродами и, как результат, эффективность пьезоэлектрического TrsnCD-актюатора. Для дополнительного улучшения характеристик TrsnCD-актюатора предложена пакетная, в частности, двухслойная структура «биморфа кручения» из двух однотипных однослойных TrsnCD-актюаторов с симметричными (относительно радиальной координатной линии  $\rho$ ) направлениями спиральных ориентаций ворсинок-электродов и, как следствие, спиральных линий поляризаций пьезоэлектрических слоев, работающих на растяжение/сжатие. В результате численного моделирования построены графики зависимости угла закручивания  $\Omega$  и блокирующего крутящего момента  $M_{\bullet}$  от отношения  $r_0/R$  внутреннего  $r_0$  и внешнего  $R$  радиусов (рис. 5), угла закручивания  $\Omega$  от частично-блокирующего момента  $M$  при различных значениях управляющего электрического напряжения  $U_{con}$  (рис. 6) кольцевого двухслойного TrsnCD-актюатора. Выявлена (рис. 5)

существенная нелинейность – близкая к параболическому виду зависимость угла закручивания  $\Omega_0$  от отношения  $r_0 / R$  внутреннего и внешнего радиусов с наличием максимума функции при значении  $r_0 / R \approx 0.4$ .

**Финансирование:** Результаты получены при выполнении государственного задания Министерства науки и высшего образования Российской Федерации на выполнение фундаментальных научных исследований (проект № FSNM-2023-0006).

### Литература

1. Zhu D., Almusallam A., Beeby S.P., Tudor J., Harris N.R. A bimorph multi-layer piezoelectric vibration energy harvester // PowerMEMS 2010 Proceedings. Belgium, Leuven. 2010. P. 1–4.
2. Williams C.B., Yates R.B. Analysis of a microelectric generator for Microsystems // Sensors and Actuators A: Physical. 1996. V. 52. No. 1-3. P. 8–11.
3. Liu H., Zhong J., Lee C., Lee S.-W., Lin L. A comprehensive review on piezoelectric energy harvesting technology: Materials, mechanisms, and applications // Applied Physics Reviews. 2018. V. 5. No. 4. P. 041306. <https://doi.org/10.1063/1.5074184>
4. Ivan I.A., Rakotondrabe M., Lutz P., Chaillet N. Quasistatic displacement self-sensing method for cantilevered piezoelectric actuators // Review of Scientific Instruments. American Institute of Physics. 2009. V. 80. No. 6. P. 065102-1/065102-8. <https://doi.org/10.1063/1.3142486>
5. Bansevicius R., Navickaitė S., Jūrėnas V., Mažeika D., Lučinskis R., Navickas J. Investigation of novel design piezoelectric bending actuators // Journal of Vibroengineering. 2013. V. 15. No. 2. P. 1064–1068.
6. Патент РФ № 2099754. Йелстаун Корпорейшн Н.В. Деформируемое зеркало на основе многослойной активной биморфной структуры. Дата заявки: 17.10.1996. Дата публикации: 20.12.1997. 7 с. URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)

7. Mouhli M. Analysis and shape modeling of thin piezoelectric actuators. Virginia Commonwealth University Publ., 2005. 100 p. <https://scholarscompass.vcu.edu/etd/1552>
8. Yamada H., Sasaki M., Nam Y. Active vibration control of a micro-actuator for hard disk drives using self-sensing actuator // Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 2008. V. 19. No. 1. P. 113–123. <https://doi.org/10.1177/1045389X07083693>
9. El-Sayed A.M., Abo-Ismael A., El-Melegy M.T., Hamzaid N.A., Osman N.A.A. Development of a micro-gripper using piezoelectric bimorphs // Sensors. 2013. V. 13. P. 5826–5840. <https://doi.org/10.3390/s130505826>
10. Zhou J., Dong L., Yang W. A Double-Acting Piezoelectric actuator for helicopter active rotor // Actuators. 2021. No. 10(247). P. 1–15. <https://doi.org/10.3390/act10100247>
11. Abedian B., Cundari M. Resonant frequency of a polyvinylidene flouride piezoelectric bimorph: the effect of surrounding fluid // Proceedings Smart Structures and Materials. 1993. V. 1916: Smart Materials. 23 July 1993. <https://doi.org/10.1117/12.148486>
12. Патент РФ № 2723567. Лопасть воздушного винта с управляемой геометрией профиля / Паньков А.А., Аношкин А.Н., Писарев П.В. Дата заявки: 18.11.2019. Дата публикации: 16.06.2020. 5 с. URL: [https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips\\_servlet](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet)
13. Patent US 2003/0056351 A1. Piezoelectric Macro-Fiber Composite Actuator and Method for Making Same / Wilkie W.K., et al. Application Publ. March 27, 2003.
14. Emad D, Fanni MA, Mohamed AM, Yoshida S. Low-Computational-Cost Technique for Modeling Macro Fiber Composite Piezoelectric Actuators Using Finite Element Method // Materials (Basel). 2021. No. 14(15). P. 4316.
15. Park J.-S., Kim J.-H. Analytical development of single crystal Macro Fiber Composite actuators for active twist rotor blades // Smart Mater. Struct. 2005. No. 14. P. 745–753. doi:10.1088/0964-1726/14/4/033

16. Патент RU № 2803015. Пьезоэлектрический MDS-актюатор / Паньков А.А., опубл.: 05.09.2023 Бюл. № 25, заявка № 2023109123 от 11.04.2023 г.
17. Патент RU № 2801619. Пьезоэлектрический CDS-актюатор / Паньков А.А., опубл.: 11.08.2023 Бюл. № 23, заявка № 2023111440 от 03.05.2023 г.
18. Патент RU № 2818079. Пьезоэлектрический актюатор / Паньков А.А., опубл.: 24.04.2024 Бюл. № 12, заявка № 2023124482 от 22.09.2023 г.
19. Победря Б.Е., Горбачев В.И. О статических задачах упругих композитов // Вестник МГУ. Сер. 1. «Матем. и механ.». 1977. № 5. С. 101–110.
20. Dong X.-J., Meng G. Dynamic analysis of structures with piezoelectric actuators based on thermal analogy method // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2006. V. 27. P. 841–844. doi:10.1007/s00170-004-2290-5

**Для цитирования:**

Паньков А.А. Пьезоэлектрический дисковый актюатор кручения с дискретно-спиральными электродами. // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – № 8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.8.4>