

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.8.2>

УДК: 53.083.2; 53.082.73

ЭЛЕКТРОУПРУГОСТЬ И МОДАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПЬЕЗОВОЛОКОННОГО ДИСКОВОГО FibrCD-АКТЮАТОРА

А.А. Паньков

Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
614990, Пермь, Комсомольский пр-кт, д. 29

Статья поступила в редакцию 26 апреля 2025 г.

Аннотация. Разработана математическая электромеханическая модель пьезоволоконного катушечного дискового (FibrCD) актюатора, в котором множество витков пьезоэлектрического кабеля «жила/пьезоэлектрический слой/экранирующий электрод» скреплены между собой полимерным связующим. В кабеле пьезоэлектрический слой между жилой и внешним экранирующим электродом имеет радиальную поляризацию. Для элементарной составной цилиндрической ячейки «жила/пьезоэлектрический слой/экранирующий электрод/полимерная оболочка» получено точное аналитическое решение связанной краевой задачи электроупругости для деформационных и электрических полей. На основе этого решения получены решения для эффективных характеристик: модулей упругих свойств, пьезоэлектрических коэффициентов линейного расширения и блокирующих напряжений волоконной структуры FibrCD-актюатора; при этом продольная ось составной цилиндрической ячейки является осью симметрии ее эффективных трансверсально-изотропных электроупругих свойств. Далее, найденные эффективные свойства волоконной структуры используются при рассмотрении деформирования дискового FibrCD-актюатора как однородного

диска с криволинейной цилиндрической анизотропией, когда окружная координата – ось симметрии трансверсально-изотропных свойств материала диска в рамках подхода термоанalogии. Подход применим для рассматриваемого случая, когда напряженность электрического поля от действия управляющего электрического напряжения, приложенного к выходам электродов пьезоэлектрического кабеля, существенно превышает составляющую напряженности от прямого пьезоэффекта, т.е. обусловленную деформированием диска. Осуществлен расчет коэффициентов пьезоэлектрического линейного расширения и блокирующих напряжений волоконной структуры диска по полученному аналитическому решению в сравнении с другими аналитическими и методом конечных элементов в пакете ANSYS решениями; подтверждено соответствие и приемлемая точность решений разными методами. Дополнительно, в пакете ANSYS осуществлен модальный анализ: представлены первые шесть собственных форм и частот колебаний дискового и кольцевого FibrCD-актюаторов.

Ключевые слова: пьезоэлектрический актюатор, электроупругость, волокнистый композит, эффективные свойства, полидисперсная модель, численное моделирование.

Финансирование: Работа выполнена при финансовой поддержке Пермского края и Российского научного фонда, проект № 24-21-20026.

Автор для переписки: Паньков Андрей Анатольевич, a_a_pankov@mail.ru

Введение

Математическое моделирование свойств и особенностей поведения пьезоэлектрических сенсоров и актюаторов [1 – 5] приводит к необходимости решения, в общем, динамической связанной краевой задачи электроупругости аналитическими, например, с использованием асимптотических разложений, интегральных преобразований, функций комплексного переменного [6 – 10] или численными методами, например, методом конечных разностей или методом конечных элементов [11 – 14]. Известные точные аналитические решения получены для сравнительно простых задач электроупругости для канонических областей сферической или цилиндрической форм соответственно с центральной или осевой симметрией искомым связанным между собой решений для деформационного и электрического полей. В [15, 16] предложено устройство дискового волоконного FibrCD-актюатора, в котором множество витков тонкого пьезоэлектрического кабеля [17, 18] монолитно скреплены между собой полимерным связующим. Пьезоэлектрический кабель имеет структуру типа «жила/пьезоэлектрический слой/экранирующий электрод», где пьезоэлектрический слой между жилой и внешним экранирующим электродом имеет радиальную поляризацию. При подключении управляющего электрического напряжения U_{con} к выходам электродов пьезоэлектрического кабеля (в виде множества витков внутри диска FibrCD-актюатора) деформируется его пьезоэлектрический слой, что обуславливает деформирование всего диска FibrCD-актюатора. Малый диаметр пьезоэлектрического кабеля и, как следствие, малое расстояние между его жилой и экранирующим электродом приводит к высоким значениям напряженности управляющего электрического поля по толщине пьезоэлектрического слоя и, как результат, к повышенным значениям деформационных характеристик всего FibrCD-актюатора. Отметим, что дисковый FibrCD-актюатор может функционировать как сенсор – преобразователь механического воздействия на диск в информативный

электрический сигнал электрического напряжения U_{inf} , регистрируемый на выходах электродов кабеля.

Цель – определение эффективных деформационных характеристик гомогенизированной волоконной структуры дискового FibrCD-актюатора [15] на основе точного аналитического решения связанной краевой задачи электроупругости для области элементарной составной цилиндрической ячейки «жила/пьезоэлектрический слой/экранирующий электрод/полимерная оболочка» с радиальной поляризацией пьезоэлектрического слоя кабеля; модальный анализ FibrCD-актюатора как однородного диска с окружной анизотропией его эффективных пьезоупругих свойств.

1. Пьезоволоконный дисковый актюатор

Разрабатываемый пьезоволоконный дисковый (FibrCD) актюатор [15] представляют собой круговую катушку (рис. 1,а) пьезоэлектрического кабеля (рис. 1,б) в виде пьезоэлектрического волокна с радиальной поляризацией $\mathbf{p}$ полимерного слоя между центральной жилой и экранирующим электродом (покрытием); витки кабеля скреплены между собой полимерным связующим. Волоконную структуру FibrCD-актюатора (рис. 1,а) можно моделировать в предположении идеальной периодической, например, гексагональной укладки витков кабеля (рис. 2,а) [19, 20] или в рамках полидисперсной модели (рис. 2,б) [21, 22] с целью получения аналитического решения.

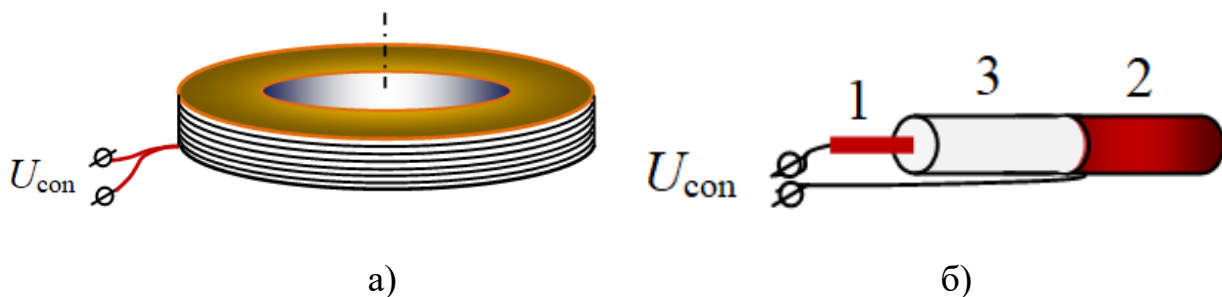


Рис. 1. Катушечный пьезоволоконный FibrCD-актюатор (а) из пьезоэлектрического кабеля (б), где 1,2 – электроды, 3 – радиально поляризованный пьезоэлектрический слой.

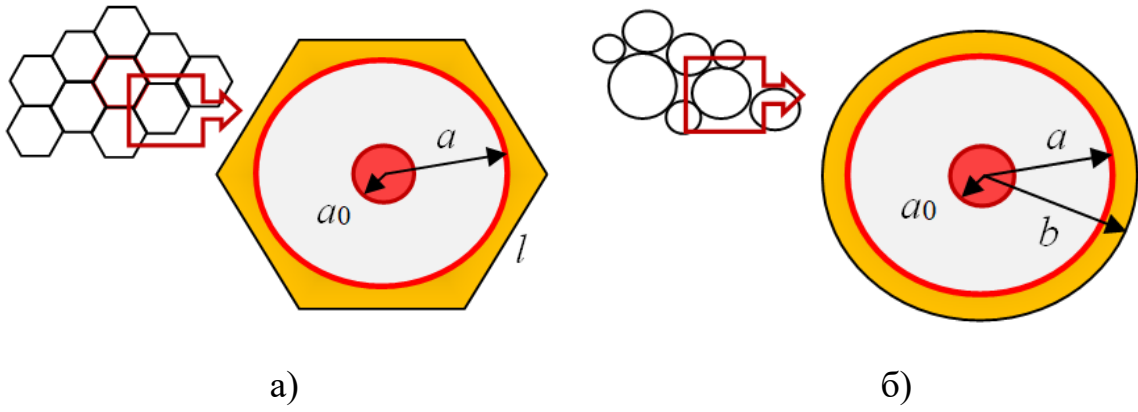


Рис. 2. Составные ячейки периодической (а) и полидисперсной (б) моделей структур.

Используем цилиндрическую систему координат r, θ, z и известные соотношения [1, 2]

$$\sigma_{ij} = c_{ijmn} \varepsilon_{mn} - e_{nij} \hat{E}_n, \quad \hat{D}_i = e_{imn} \varepsilon_{mn} + \lambda_{in} \hat{E}_n \quad (1)$$

связи напряжений σ , индукции $\hat{D}$ электрического поля с деформациями ε и напряженностью $\hat{E}$ электрического поля посредством известных электроупругих констант c, e, λ пьезокерамики с матрицей пьезомодулей [1, 2]

$$\|e_{ij}\| = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{113} & 0 & 0 \\ e_{311} & e_{311} & e_{333} & 0 & 0 & 0 \end{Bmatrix} \quad (2)$$

в главных осях $\xi_{1,2,3}$ с учетом соответствий: $r \equiv \xi_3, \theta \equiv \xi_2, z \equiv \xi_1$, где r – ось поляризации трансверсально-изотропного пьезоэлектрического слоя, z – продольная ось кабеля для элементарной составной цилиндрической ячейки (рис. 1,б). Рассмотрим нахождение компонент $\alpha_{ij}^*, \beta_{ij}^* = c_{ijmn}^* \alpha_{mn}^*$ тензоров эффективных коэффициентов α^* линейного пьезоэлектрического расширения и пьезоэлектрических напряжений β^* , входящие в соотношения

$$\langle \sigma_{ij} \rangle = c_{ijmn}^* \langle \varepsilon_{mn} \rangle - \beta_{mn}^* U_{\text{con}} \quad (3)$$

подхода термоанalogии [23], для рассмотрения деформирования гомогенизированного диска FibrCD-актюатора при действии U_{con} , где c^* – тензор эффективных упругих свойств волоконной структуры, $\langle \dots \rangle$ – оператор осреднения по области составной ячейки (рис. 2).

2. Математическая модель составной цилиндрической ячейки

2.1 Постановка и общее решение краевой задачи электроупругости для пьезоэлектрического слоя

Цилиндрическую составную ячейку (рис. 2,б) считаем неограниченной по оси z и каждое ее поперечное сечение при осесимметричном электро-механическом нагружении (U_{con} , σ_z или u_z) и последующем деформировании ячейки остается плоским (т.к. лежит в плоскости симметрии рассматриваемой задачи) и имеет перемещение по оси z

$$u_z = \varepsilon_{zz} z, \quad (4)$$

где $\varepsilon_{zz} = \text{const}$ – продольная деформация для каждого из слоев ячейки. Отметим, что рассматриваемую неограниченную по оси z цилиндрическую составную ячейку можно наглядно представить в виде замкнутого протяженного кольца – витка FibrCD-актюатора на рис. 1,а) с бесконечным радиусом кривизны, каждое поперечное сечение (рис. 2,б) кольца лежит в плоскости симметрии (для электроупругих свойств, условий нагружения и возникающих деформационного и электрического полей) и остается плоским при рассматриваемом электромеханическом нагружении. Рассматриваемая задача является осесимметричной, что обуславливает равенства нулю окружных компонент, в частности, напряжений и индукции:

$$\sigma_{r\theta} = \sigma_{\theta r} = \sigma_{rz} = \sigma_{zr} = \sigma_{\theta z} = \sigma_{z\theta} = 0, \quad \hat{D}_z = \hat{D}_\theta = 0,$$

а отличные от нуля искомые компоненты радиального перемещения u_r , радиальных и окружных деформаций ε_{rr} , $\varepsilon_{\theta\theta}$, напряжений σ_{rr} , $\sigma_{\theta\theta}$ и также электрический потенциал ϕ , радиальные компоненты индукции $\hat{D}_r$ и напряженности $\hat{E}_r$ электрического поля являются функциями лишь радиальной координаты r . Соотношения (1) примут вид

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= c_{3333}\varepsilon_{rr} + c_{1133}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) - e_{333}\hat{E}_r, \\ \sigma_{\theta\theta} &= c_{1133}\varepsilon_{rr} + c_{1111}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{1122}\varepsilon_{zz} - e_{311}\hat{E}_r, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\sigma_{zz} = c_{1133}\varepsilon_{rr} + c_{1122}\varepsilon_{\theta\theta} + c_{1111}\varepsilon_{zz} - e_{311}\hat{E}_r,$$

$$\hat{D}_r = e_{333}\varepsilon_{rr} + e_{311}(\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + \lambda_{33}\hat{E}_r,$$

уравнения равновесия

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0, \quad (6)$$

геометрические соотношения малых деформаций

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du_r}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r}, \quad (7)$$

уравнение непрерывности

$$\frac{d\hat{D}_r}{dr} + \frac{\hat{D}_r}{r} = 0. \quad (8)$$

После подстановки выражений (5) в (6)

$$c_{3333} \frac{d}{dr} \varepsilon_{rr} + c_{1133} \frac{d}{dr} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) - e_{333} \frac{d}{dr} \hat{E}_r +$$

$$+ \frac{1}{r} \left((c_{3333} - c_{1133}) \varepsilon_{rr} + (c_{1133} - c_{1111}) \varepsilon_{\theta\theta} + (c_{1133} - c_{1122}) \varepsilon_{zz} - (e_{333} - e_{311}) \hat{E}_r \right) = 0 \quad (9)$$

и, далее, уравнение (9) преобразуем к виду

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{du_r}{r dr} - \frac{u_r}{r^2} \frac{c_{1111}}{c_{3333}} +$$

$$+ \frac{c_{1133} - c_{1122}}{c_{3333}} \frac{\varepsilon_{zz}}{r} + \frac{e_{333}}{c_{3333}} \frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{e_{333} - e_{311}}{c_{3333}} \frac{d\phi}{r dr} = 0 \quad (10)$$

Аналогично, после подстановки выражения (5) в (8) получим

$$\frac{d}{dr} \left(e_{333} \varepsilon_{rr} + e_{311} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + \lambda_{33} \hat{E}_r \right) +$$

$$+ \frac{1}{r} \left(e_{333} \varepsilon_{rr} + e_{311} (\varepsilon_{\theta\theta} + \varepsilon_{zz}) + \lambda_{33} \hat{E}_r \right) = 0$$

или с учетом равенства (4) в виде

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{du_r}{r dr} \left(\frac{e_{311}}{e_{333}} + 1 \right) + \frac{e_{311}}{e_{333}} \frac{\varepsilon_{zz}}{r} -$$

$$- \frac{\lambda_{33}}{e_{333}} \frac{d^2 \phi}{dr^2} - \frac{\lambda_{33}}{e_{333}} \frac{d\phi}{r dr} = 0 \quad (11)$$

Таким образом, необходимо решить систему двух дифференциальных уравнений (10), (11)

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{du_r}{rdr} - \frac{c_{1111}}{c_{3333}} \frac{u_r}{r^2} + \\ & + \frac{c_{1133} - c_{1122}}{c_{3333}} \frac{\varepsilon_{zz}}{r} + \frac{e_{333}}{c_{3333}} \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{rdr} \right) - \frac{e_{311}}{c_{3333}} \frac{d\phi}{rdr} = 0 \\ & \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \left(1 + \frac{e_{311}}{e_{333}} \right) \frac{du_r}{rdr} + \frac{e_{311}}{e_{333}} \frac{\varepsilon_{zz}}{r} - \\ & - \frac{\lambda_{33}}{e_{333}} \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{rdr} \right) = 0 \end{aligned}$$

или после преобразований в виде

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{du_r}{rdr} - \kappa_1 \frac{u_r}{r^2} + \\ & + (\kappa_3 - \kappa_2) \frac{\varepsilon_{zz}}{r} + \kappa_4 \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{rdr} \right) - \kappa_5 \frac{d\phi}{rdr} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 u_r}{dr^2} + (1 + \kappa_6) \frac{du_r}{rdr} + \kappa_6 \frac{\varepsilon_{zz}}{r} + \\ & + \kappa_7 \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{rdr} \right) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

с учетом обозначений

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= c_{1111} / c_{3333}, \quad \kappa_2 = c_{1122} / c_{3333}, \quad \kappa_3 = c_{1133} / c_{3333}, \\ \kappa_4 &= e_{333} / c_{3333}, \quad \kappa_5 = e_{311} / c_{3333}, \\ \kappa_6 &= e_{311} / e_{333}, \quad \kappa_7 = -\lambda_{33} / e_{333}. \end{aligned} \quad (14)$$

В результате умножения на κ_7 левой и правой частей уравнения (12), аналогичного умножения на κ_4 уравнения (13) и вычитания из полученного первого уравнения второе получим

$$\begin{aligned} & (\kappa_7 - \kappa_4) \frac{d^2 u_r}{dr^2} + [\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6)] \frac{du_r}{rdr} - \kappa_1 \kappa_7 \frac{u_r}{r^2} + \\ & + [\kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6] \frac{\varepsilon_{zz}}{r} - \kappa_5 \kappa_7 \frac{d\phi}{rdr} = 0 \end{aligned}$$

ИЛИ

$$\kappa_5 \kappa_7 \frac{d\phi}{dr} = (\kappa_7 - \kappa_4) r \frac{d^2 u_r}{dr^2} + [\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6)] \frac{du_r}{dr} - \kappa_1 \kappa_7 \frac{u_r}{r} +$$

$$+ [\kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6] \varepsilon_{zz} \quad (15)$$

После дифференцирования уравнения (15) по r получим

$$\kappa_5 \kappa_7 \frac{d^2 \phi}{dr^2} = (\kappa_7 - \kappa_4) r \frac{d^3 u_r}{dr^3} + [2\kappa_7 - 2\kappa_4 - \kappa_4 \kappa_6] \frac{d^2 u_r}{dr^2} - \kappa_1 \kappa_7 \frac{du_r}{r dr} + \kappa_1 \kappa_7 \frac{u_r}{r^2}. \quad (16)$$

Поделим на r уравнение (15) и сложим его с уравнением (16), что дает

$$\kappa_5 \kappa_7 \left(\frac{d^2 \phi}{dr^2} + \frac{d\phi}{r dr} \right) = (\kappa_7 - \kappa_4) r \frac{d^3 u_r}{dr^3} + [3\kappa_7 - 3\kappa_4 - \kappa_4 \kappa_6] \frac{d^2 u_r}{dr^2} +$$

$$+ [\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6) - \kappa_1 \kappa_7] \frac{du_r}{r dr} + [\kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6] \frac{\varepsilon_{zz}}{r}$$

или в виде

$$(\kappa_7 - \kappa_4) r \frac{d^3 u_r}{dr^3} + [3\kappa_7 - 3\kappa_4 - \kappa_4 \kappa_6 + \kappa_5] \frac{d^2 u_r}{dr^2} +$$

$$+ [\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6) - \kappa_1 \kappa_7 + \kappa_5 (1 + \kappa_6)] \frac{du_r}{r dr} + [\kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6 + \kappa_5 \kappa_6] \frac{\varepsilon_{zz}}{r} = 0$$

с учетом выражения (13).

Таким образом, имеем результирующий вид дифференциального уравнения

$$\frac{d^3 u_r}{dr^3} + \frac{A}{r} \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{B}{r^2} \frac{du_r}{dr} + F \frac{\varepsilon_{zz}}{r^2} = 0. \quad (17)$$

для искомого поля перемещений, где коэффициенты

$$A = \frac{3(\kappa_7 - \kappa_4) - \kappa_4 \kappa_6 + \kappa_5}{\kappa_7 - \kappa_4} = 3 + \frac{\kappa_5 - \kappa_4 \kappa_6}{\kappa_7 - \kappa_4},$$

$$B = \frac{\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6) - \kappa_1 \kappa_7 + \kappa_5 (1 + \kappa_6)}{\kappa_7 - \kappa_4},$$

$$F = \frac{\kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6 + \kappa_5 \kappa_6}{\kappa_7 - \kappa_4}$$

или в виде

$$A=3, \quad B = \frac{\kappa_7(1-\kappa_1) + (\kappa_5 - \kappa_4)(1 + \kappa_6)}{\kappa_7 - \kappa_4}, \quad F = \frac{\kappa_7(\kappa_3 - \kappa_2) + (\kappa_5 - \kappa_4)\kappa_6}{\kappa_7 - \kappa_4}. \quad (18)$$

Неоднородное дифференциальное уравнение (17) имеет общее решение

$$u_r = C_1 r^{n_2} + C_2 r^{n_3} + C_3 - \varepsilon_{zz} \frac{F}{B} r, \quad (19)$$

где действительные корни

$$n_1 = 0, \quad n_{2,3} = \pm \sqrt{1-B} \quad (20)$$

характеристического уравнения.

Далее, из уравнения (15) с учетом найденного решения (19) получим выражение

$$\begin{aligned} \kappa_5 \kappa_7 \frac{d\phi}{dr} = & (\kappa_7 - \kappa_4) r \frac{d^2 u_r}{dr^2} + [\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6)] \frac{du_r}{dr} - \kappa_1 \kappa_7 \frac{u_r}{r} + \\ & + [\kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6] \varepsilon_{zz} \end{aligned}$$

которое преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \kappa_5 \kappa_7 \frac{d\phi}{dr} = & (\kappa_7 - \kappa_4) [n_2 (n_2 - 1) C_1 r^{n_2-1} + n_3 (n_3 - 1) C_2 r^{n_3-1}] + \\ & + [\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6)] \left(n_2 C_1 r^{n_2-1} + n_3 C_2 r^{n_3-1} - \varepsilon_{zz} \frac{F}{B} \right) - \\ & - \kappa_1 \kappa_7 [C_1 r^{n_2-1} + C_2 r^{n_3-1} + C_3 r^{-1} - \varepsilon_{zz} \frac{F}{B}] + [\kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6] \varepsilon_{zz} \end{aligned}$$

с учетом

$$\begin{aligned} \frac{du_r}{dr} = & n_2 C_1 r^{n_2-1} + n_3 C_2 r^{n_3-1} - \varepsilon_{zz} \frac{F}{B} \\ \frac{d^2 u_r}{dr^2} = & n_2 (n_2 - 1) C_1 r^{n_2-2} + n_3 (n_3 - 1) C_2 r^{n_3-2}. \end{aligned}$$

В результате, имеем дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned} \kappa_5 \kappa_7 \frac{d\phi}{dr} = & C_1 r^{n_2-1} [(\kappa_7 - \kappa_4) n_2 (n_2 - 1) + n_2 (\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6)) - \kappa_1 \kappa_7] + \\ & + C_2 r^{n_3-1} [(\kappa_7 - \kappa_4) n_3 (n_3 - 1) + n_3 (\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6)) - \kappa_1 \kappa_7] - \kappa_1 \kappa_7 C_3 r^{-1} + \\ & + \varepsilon_{zz} \left(\kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6 + \frac{F}{B} [\kappa_1 \kappa_7 - \kappa_7 + \kappa_4 (1 + \kappa_6)] \right) \end{aligned} \quad (21)$$

или

$$\frac{d\phi}{dr} = A' C_1 r^{n_2-1} + B' C_2 r^{n_3-1} + D' C_3 r^{-1} + F' \varepsilon_{zz},$$

решение которого

$$\phi = C_1 \frac{A'}{n_2} r^{n_2} + C_2 \frac{B'}{n_3} r^{n_3} + C_3 D' \ln r + C_4 + F' \varepsilon_{zz} r, \quad (22)$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} A' &= \frac{(\kappa_7 - \kappa_4) n_2 (n_2 - 1) + n_2 [\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6)] - \kappa_1 \kappa_7}{\kappa_5 \kappa_7}, \\ B' &= \frac{(\kappa_7 - \kappa_4) n_3 (n_3 - 1) + n_3 [\kappa_7 - \kappa_4 (1 + \kappa_6)] - \kappa_1 \kappa_7}{\kappa_5 \kappa_7}, \\ D' &= -\frac{\kappa_1}{\kappa_5}, \\ F' &= \frac{\kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6 + \frac{F}{B} [\kappa_1 \kappa_7 - \kappa_7 + \kappa_4 (1 + \kappa_6)]}{\kappa_5 \kappa_7} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} A' &= \frac{\kappa_7 - \kappa_4}{\kappa_5 \kappa_7} n_2^2 - \frac{\kappa_4 \kappa_6}{\kappa_5 \kappa_7} n_2 - \frac{\kappa_1}{\kappa_5}, \\ B' &= \frac{\kappa_7 - \kappa_4}{\kappa_5 \kappa_7} n_3^2 - \frac{\kappa_4 \kappa_6}{\kappa_5 \kappa_7} n_3 - \frac{\kappa_1}{\kappa_5}, \\ D' &= -\frac{\kappa_1}{\kappa_5}, \\ F' &= \frac{\frac{F}{B} [\kappa_7 (\kappa_1 - 1) + \kappa_4 (1 + \kappa_6)] + \kappa_7 (\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6}{\kappa_5 \kappa_7}; \end{aligned}$$

в результате имеем

$$\begin{aligned}
A' &= \frac{\kappa_7 - \kappa_4}{\kappa_5 \kappa_7} n_2^2 - \frac{1}{\kappa_7} n_2 - \frac{\kappa_1}{\kappa_5} \\
B' &= \frac{\kappa_7 - \kappa_4}{\kappa_5 \kappa_7} n_3^2 - \frac{1}{\kappa_7} n_3 - \frac{\kappa_1}{\kappa_5} \\
D' &= -\frac{\kappa_1}{\kappa_5} \\
F' &= \frac{\kappa_7(\kappa_3 - \kappa_2) - \kappa_4 \kappa_6 + \frac{F}{B} [\kappa_7(\kappa_1 - 1) + \kappa_4(1 + \kappa_6)]}{\kappa_5 \kappa_7}
\end{aligned} \tag{23}$$

где $C_1, \dots, C_4$ – константы интегрирования.

Таким образом, общим решением системы уравнений (12), (13) являются найденные функции u_r , ϕ (19), (22), по которым найдем общие решения для компонент деформаций (7)

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= C_1 n_2 r^{n_2-1} + C_2 n_3 r^{n_3-1} - \varepsilon_{zz} \frac{F}{B} \\
\varepsilon_{\theta\theta} &= C_1 r^{n_2-1} + C_2 r^{n_3-1} + C_3 r^{-1} - \varepsilon_{zz} \frac{F}{B}
\end{aligned} \tag{24}$$

и электрической напряженности

$$-\hat{E}_r = C_1 A' r^{n_2-1} + C_2 B' r^{n_3-1} + C_3 D' r^{-1} + F' \varepsilon_{zz} \tag{25}$$

и, далее, для напряжений (5)

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr} &= C_1 r^{n_2-1} (c_{13} + n_2 c_{33} + A' e_{33}) + C_2 r^{n_3-1} (c_{13} + n_3 c_{33} + B' e_{33}) + \\
&+ C_3 r^{-1} (c_{13} + D' e_{33}) + [c_{1133} - \frac{F}{B} (c_{3333} + c_{1133}) + e_{333} F'] \varepsilon_{zz}
\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{\theta\theta} &= C_1 r^{n_2-1} (c_{11} + n_2 c_{13} + A' e_{31}) + C_2 r^{n_3-1} (c_{11} + n_3 c_{13} + B' e_{31}) + \\
&+ C_3 r^{-1} (c_{11} + D' e_{31}) + [c_{1122} - \frac{F}{B} (c_{1133} + c_{1111}) + e_{311} F'] \varepsilon_{zz}
\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{zz} &= C_1 r^{n_2-1} (c_{12} + n_2 c_{13} + A' e_{31}) + C_2 r^{n_3-1} (c_{12} + n_3 c_{13} + B' e_{31}) + \\
&+ C_3 r^{-1} (c_{12} + D' e_{31}) + [c_{1111} - \frac{F}{B} (c_{1133} + c_{1122}) + e_{311} F'] \varepsilon_{zz}
\end{aligned} \tag{28}$$

и электрической индукции

$$\begin{aligned}\hat{D}_r = & C_1 r^{n_2-1} (e_{31} + n_2 e_{33} - A' \lambda_3) + C_2 r^{n_3-1} (e_{31} + n_3 e_{33} - B' \lambda_3) + \\ & + C_3 r^{-1} (e_{31} - D' \lambda_3) + [e_{311} - \frac{F}{B} (e_{333} + e_{311}) - \lambda_{33} F'] \varepsilon_{zz}\end{aligned}\quad (29)$$

2.2. Общие решения для жилы и внешнего полимерного слоя

Для частного случая упругого слоя с радиальной анизотропией, но без пьезоэффекта общее решение для поля перемещений

$$u_r = C_1 r^{n_2} + C_2 r^{n_3} + C_3 - \varepsilon_{zz} \frac{F}{B} r \quad (30)$$

является решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{du_r}{r dr} - \frac{c_{1111}}{c_{3333}} \frac{u_r}{r^2} + \frac{c_{1133} - c_{1122}}{c_{3333}} \frac{\varepsilon_{zz}}{r} = 0$$

где корни $n_1 = 0$, $n_{2,3} = \pm \sqrt{1-B}$ характеристического уравнения, коэффициенты

$$A=3, \quad B=1-\kappa_1=1-c_{1111}/c_{3333}, \quad F=\kappa_3-\kappa_2=(c_{1133}-c_{1122})/c_{3333}$$

с учетом

$$\kappa_1 = c_{1111}/c_{3333}, \quad \kappa_2 = c_{1122}/c_{3333}, \quad \kappa_3 = c_{1133}/c_{3333}$$

для рассматриваемого случая.

В частности, для электропроводной изотропной ($B=F=0$, $n_{2,3}=\pm 1$)

жилы в области $0 < r < a_0$ имеем

$$\begin{aligned}u_{(e)r} &= C_{(e)1} r \\ \varepsilon_{(e)rr} &= \varepsilon_{(e)\theta\theta} = C_{(e)1} \\ \sigma_{(e)rr} &= \sigma_{(e)\theta\theta} = 2k_{(e)} C_{(e)1} + (k_{(e)} - G_{(e)}) \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{(e)zz} &= 2(k_{(e)} - G_{(e)}) C_{(e)1} + (k_{(e)} + G_{(e)}) \varepsilon_{zz}\end{aligned}\quad (30)$$

и для внешнего изотропного полимерного слоя (матрицы) в области $a < r < b$

$$\begin{aligned}u_{(m)r} &= C_{(m)1} r + C_{(m)2} r^{-1} \\ \varepsilon_{(m)rr} &= C_{(m)1} - C_{(m)2} r^{-2}, \quad \varepsilon_{(m)\theta\theta} = C_{(m)1} + C_{(m)2} r^{-2}\end{aligned}\quad (31)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{(m)rr} &= 2k_{(m)}C_{(m)1} - 2G_{(m)}C_{(m)2}r^{-2} + (k_{(m)} - G_{(m)})\varepsilon_{zz} \\
\sigma_{(m)\theta\theta} &= 2k_{(m)}C_{(m)1} + 2G_{(m)}C_{(m)2}r^{-2} + (k_{(m)} - G_{(m)})\varepsilon_{zz} \\
\sigma_{(m)zz} &= 2(k_{(m)} - G_{(m)})C_{(m)1} + (k_{(m)} + G_{(m)})\varepsilon_{zz}
\end{aligned} \tag{32}$$

с учетом выполнения равенств: $c_{1111} + c_{1122} = 2k$, $c_{1111} - c_{1122} = 2G$, $c_{1122} = k - G$, где k – объемный модуль при плоской деформации, G – модуль сдвига изотропного материала.

2.3. Константы интегрирования

Семь констант интегрирования: $C_1, \dots, C_4$ (19) – (29), $C_{(e)1}$ (30), $C_{(m)1}, C_{(m)2}$ (31), (32) определим из трех условий электромеханического нагружения и четырех условий идеального контакта на межфазных поверхностях. В частности, из условия $\sigma_{(e)rr} = \sigma_{rr}$ при $r = a_0$ с учетом решений (26), (30) следует равенство

$$\begin{aligned}
&-2k_{(e)}C_{(e)1} + C_1a_0^{n_2-1}(c_{13} + n_2c_{33} + A'e_{33}) + C_2a_0^{n_3-1}(c_{13} + n_3c_{33} + B'e_{33}) + \\
&+ C_3a_0^{-1}(c_{13} + D'e_{33}) = (k_{(e)} - G_{(e)})\varepsilon_{zz} - [c_{1133} - \frac{F}{B}(c_{3333} + c_{1133}) + e_{333}F']\varepsilon_{zz}
\end{aligned} \tag{33}$$

из условия $u_{(e)r} = u_r$ с учетом (19), (30) при $r = a_0$ -

$$-C_{(e)1}a_0 + C_1a_0^{n_2} + C_2a_0^{n_3} + C_3 = \frac{F}{B}a_0\varepsilon_{zz} \tag{34}$$

из условия $\sigma_{rr} = \sigma_{(m)rr}$ с учетом (26), (32) при $r = a$ -

$$\begin{aligned}
&C_1a^{n_2-1}(c_{13} + n_2c_{33} + A'e_{33}) + C_2a^{n_3-1}(c_{13} + n_3c_{33} + B'e_{33}) + \\
&+ C_3a^{-1}(c_{13} + D'e_{33}) - 2k_{(m)}C_{(m)1} + 2G_{(m)}C_{(m)2}a^{-2} = \\
&= (k_{(m)} - G_{(m)})\varepsilon_{zz} - [c_{1133} - \frac{F}{B}(c_{3333} + c_{1133}) + e_{333}F']\varepsilon_{zz}
\end{aligned} \tag{35}$$

из условия $u_r = u_{(m)r}$ с учетом (30), (31) при $r = a$ -

$$C_1a^{n_2} + C_2a^{n_3} + C_3 - C_{(m)1}a - C_{(m)2}a^{-1} = \frac{F}{B}a\varepsilon_{zz} \tag{36}$$

из условия $\phi = U_{\text{con}}$ с учетом (22) при $r = a_0$ -

$$C_1 \frac{A'}{n_2} a_0^{n_2} + C_2 \frac{B'}{n_3} a_0^{n_3} + C_3 D' \ln a_0 + C_4 = U_{\text{con}} - F' a_0 \varepsilon_{zz} \quad (37)$$

из условия $\phi = 0$ с учетом (22) при $r = a$ -

$$C_1 \frac{A'}{n_2} a^{n_2} + C_2 \frac{B'}{n_3} a^{n_3} + C_3 D' \ln a + C_4 = -F' a \varepsilon_{zz} \quad (38)$$

из условия $\sigma_{(m)rr} = \sigma_*$ с учетом (32) при $r = b$ -

$$2k_{(m)} C_{(m)1} - 2G_{(m)} b^{-2} C_{(m)2} = \sigma_* - (k_{(m)} - G_{(m)}) \varepsilon_{zz} \quad (39)$$

или из условия $u_{(m)r|r=b} = u_*$ с учетом (31) -

$$C_{(m)1} b + C_{(m)2} b^{-1} = u_* . \quad (40)$$

Константы интегрирования: $C_1, \dots, C_4$, $C_{(e)1}$, $C_{(m)1}$, $C_{(m)2}$ определим из системы семи линейных алгебраических уравнений (33) – (40)

$$\begin{cases} a_{11} C_{(e)1} + a_{12} C_1 + a_{13} C_2 + a_{14} C_3 + a_{15} C_4 + a_{16} C_{(m)1} + a_{17} C_{(m)2} = b_1 \\ \dots \\ a_{71} C_{(e)1} + a_{72} C_1 + a_{73} C_2 + a_{74} C_3 + a_{75} C_4 + a_{76} C_{(m)1} + a_{77} C_{(m)2} = b_7 \end{cases} \quad (41)$$

где отличные от нуля компоненты матрицы $[a]$ и вектор-столбца $\{b\}$:

$$\begin{aligned} a_{11} &= -2k_{(e)}, \quad a_{12} = a_0^{n_2-1} (c_{13} + n_2 c_{33} + A' e_{33}), \\ a_{13} &= a_0^{n_3-1} (c_{13} + n_3 c_{33} + B' e_{33}), \quad a_{14} = a_0^{-1} (c_{13} + D' e_{33}), \\ b_1 &= (k_{(e)} - G_{(e)}) \varepsilon_{zz} - [c_{1133} - \frac{F}{B} (c_{3333} + c_{1133}) + e_{333} F'] \varepsilon_{zz}, \\ a_{21} &= -a_0, \quad a_{22} = a_0^{n_2}, \quad a_{23} = a_0^{n_3}, \quad a_{24} = 1, \quad b_2 = \frac{F}{B} a_0 \varepsilon_{zz}, \\ a_{32} &= a_0^{n_2-1} (c_{13} + n_2 c_{33} + A' e_{33}), \quad a_{33} = a_0^{n_3-1} (c_{13} + n_3 c_{33} + B' e_{33}), \\ a_{34} &= a_0^{-1} (c_{13} + D' e_{33}), \quad a_{36} = -2k_{(m)}, \quad a_{37} = 2G_{(m)} a^{-2}, \\ b_3 &= (k_{(m)} - G_{(m)}) \varepsilon_{zz} - [c_{1133} - \frac{F}{B} (c_{3333} + c_{1133}) + e_{333} F'] \varepsilon_{zz}, \\ a_{42} &= a^{n_2}, \quad a_{43} = a^{n_3}, \quad a_{44} = 1, \quad a_{46} = -a, \quad a_{47} = -a^{-1}, \quad b_4 = \frac{F}{B} a \varepsilon_{zz}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$a_{52} = \frac{A'}{n_2} a_0^{n_2}, a_{53} = \frac{B'}{n_3} a_0^{n_3}, a_{54} = D' \ln a_0, a_{55} = 1, b_5 = U_{\text{con}} - F' a_0 \varepsilon_{zz},$$

$$a_{62} = \frac{A'}{n_2} a^{n_2}, a_{63} = \frac{B'}{n_3} a^{n_3}, a_{64} = D' \ln a, a_{65} = 1, b_6 = -F' a \varepsilon_{zz},$$

седьмая строка для случая $\sigma_{(m)rr}|_{r=b} = \sigma_*$ (39) -

$$a_{76} = 2k_{(m)}, a_{77} = -2G_{(m)} b^{-2}, b_7 = \sigma_* - (k_{(m)} - G_{(m)}) \varepsilon_{zz} \quad (43)$$

или для случая $u_{(m)r}|_{r=b} = u_*$ (40) -

$$a_{76} = b, a_{77} = b^{-1}, b_7 = u_* \quad (44)$$

«Макроскопические», т.е. осредненные по поперечному сечению составной ячейки продольные напряжения

$$\langle \sigma_{zz} \rangle = v_{\text{electr}} \sigma_{(e)zz} + v_{\text{piezo}} \bar{\sigma}_{zz} + v_{\text{matrix}} \sigma_{(m)zz} \quad (45)$$

вычисляем с учетом решений (30), (32)

$$\sigma_{(e)zz} = 2(k_{(e)} - G_{(e)}) C_{(e)1} + (k_{(e)} + G_{(e)}) \varepsilon_{zz}, \sigma_{(m)zz} = 2(k_{(m)} - G_{(m)}) C_{(m)1} + (k_{(m)} + G_{(m)}) \varepsilon_{zz}$$

и осредненного по области пьезоэлектрического слоя ($a_0 < r < a$) напряжения

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{zz} = & C_1 \zeta_1 (c_{12} + n_2 c_{13} + A' e_{31}) + C_2 \zeta_2 (c_{12} + n_3 c_{13} + B' e_{31}) + \\ & + C_3 \zeta_3 (c_{12} + D' e_{31}) + [c_{1111} - \frac{F}{B} (c_{1133} + c_{1122}) + e_{311} F'] \varepsilon_{zz} \end{aligned} \quad (46)$$

с учетом решения (28) для σ_{zz} , где коэффициенты

$$\zeta_1 \equiv \overline{r^{n_2-1}} = \frac{2(a^{n_2+1} - a_0^{n_2+1})}{(a^2 - a_0^2)(n_2 + 1)}, \zeta_2 \equiv \overline{r^{n_3-1}} = \frac{2(a^{n_3+1} - a_0^{n_3+1})}{(a^2 - a_0^2)(n_3 + 1)}, \zeta_3 \equiv \overline{1/r} = \frac{2}{a + a_0}, \quad (47)$$

относительные объемные доли

$$v_{\text{electr}} = \left(\frac{a_0}{b} \right)^2, v_{\text{piezo}} = \frac{a^2 - a_0^2}{b^2}, v_{\text{matrix}} = 1 - \left(\frac{a}{b} \right)^2 \quad (48)$$

элементов структуры составной ячейки (рис. 3). Отметим, что для осредненного по области пьезоэлектрического слоя ($a_0 < r < a$) значения электрической напряженности (25) имеем

$$\bar{E}_r = -C_1 \zeta_1 A' - C_2 \zeta_2 B' - C_3 \zeta_3 D' - F' \varepsilon_{zz} \neq \frac{U_{\text{con}}}{a - a_0};$$

равенство выполняется лишь для осредненного «по радиусу» значения электрической напряженности

$$\frac{1}{a-a_0} \int_{a_0}^a \hat{E}_r dr = \frac{U_{\text{con}}}{a-a_0},$$

т.е. имеем

$$\int_{a_0}^a \hat{E}_r dr = U_{\text{con}}.$$

Макроскопические напряжения σ_* , $\langle \sigma_{zz} \rangle$ допускают разложения

$$\sigma_* = \beta^* U_{\text{con}} + k_\varepsilon \varepsilon_* + k_{\varepsilon zz} \varepsilon_{zz}, \quad \langle \sigma_{zz} \rangle = \beta_{zz}^* U_{\text{con}} + \bar{k}_\varepsilon \varepsilon_* + \bar{k}_{\varepsilon zz} \varepsilon_{zz}, \quad (49)$$

при этом коэффициенты разложений макродеформаций

$$\varepsilon_* = \alpha^* U_{\text{con}} + k_\sigma \sigma_* + k_{\sigma zz} \langle \sigma_{zz} \rangle, \quad \varepsilon_{zz} = \alpha_{zz}^* U_{\text{con}} + \bar{k}_\sigma \sigma_* + \bar{k}_{\sigma zz} \langle \sigma_{zz} \rangle \quad (50)$$

выражаются

$$\begin{aligned} \alpha^* &= \frac{k_{\varepsilon zz} \beta_{zz}^* - \bar{k}_{\varepsilon zz} \beta^*}{k_0}, \quad k_\sigma = \frac{\bar{k}_{\varepsilon zz}}{k_0}, \quad k_{\sigma zz} = -\frac{k_{\varepsilon zz}}{k_0}, \\ \alpha_{zz}^* &= \frac{\bar{k}_\varepsilon \beta^* - k_\varepsilon \beta_{zz}^*}{k_0}, \quad \bar{k}_\sigma = -\frac{\bar{k}_\varepsilon}{k_0}, \quad \bar{k}_{\sigma zz} = \frac{k_\varepsilon}{k_0}, \\ k_0 &= k_\varepsilon \bar{k}_{\varepsilon zz} - k_{\varepsilon zz} \bar{k}_\varepsilon \end{aligned} \quad (51)$$

через коэффициенты разложений (49), где $\varepsilon_* = u_* / b$ – осевая деформация в плоскости изотропии составной ячейки, эффективные коэффициенты (3) линейного пьезоэлектрического расширения $\alpha^* \equiv \alpha_{rr}^*$, α_{zz}^* и пьезоэлектрических блокирующих напряжений $\beta^* \equiv \beta_{rr}^*$, β_{zz}^* композитной волоконной структуры FibrCD-актюатора (рис. 1,а). Отметим, что $k^* = k_\varepsilon / 2$ – эффективный объемный модуль плоской деформации в плоскости изотропии, выполняются равенства: $c_{rrzz}^* = k_{\varepsilon zz}$, $c_{zzzz}^* = \bar{k}_{\varepsilon zz}$, $c_{rrrr}^* + c_{rr\theta\theta}^* = k_\varepsilon$ для компонент тензора $\mathbf{c}^*$ эффективных упругих свойств.

3. Результаты численного моделирования

3.1 Расчет эффективных пьезоэлектрических коэффициентов

На этапе вычисления эффективных свойств волоконной структуры FibrCD-актюатора были заданы изотропные упругие свойства жилы: $E_{(e)} = 80$ ГПа, $\nu_{(e)} = 0.37$ (серебро) и эпоксидного связующего: $E_{(m)} = 20$ ГПа, $\nu_{(m)} = 0.35$ через соответствующие значения модуля Юнга E и коэффициента Пуассона ν . Электроупругие постоянные радиально поляризованного пьезоэлектрического слоя (PZT-5) приведены в табл.1 [1, 2], где индекс «3» соответствует радиальному направлению поляризации, «2» – окружному направлению, «1» – продольному направлению z цилиндрического пьезоэлектрического слоя.

Таблица 1. Электроупругие свойства пьезокерамики PZT-5.

Упругие постоянные, ГПа					Относительные диэлектрические постоянные		Пьезоэлектрические постоянные, Кл/м ²		
C_{1111}	C_{1122}	C_{1133}	C_{3333}	C_{1313}	λ_{11} / λ_0	λ_{33} / λ_0	$e_{311} = e_{322}$	e_{333}	$e_{113} = e_{223}$
121	75.4	75.2	111	21.1	916	830	-5.4	15.8	12.3

Рассматриваем две геометрические модели волоконной структуры (рис. 2), т.е. укладки витков пьезоэлектрического кабеля внутри FibrCD-актюатора: полидисперсная модель с элементарной составной ячейкой (рис. 2,б) и идеальная периодическая гексагональная укладка (рис. 2,а) с численными значениями радиусов жилы $a_0 = 0.1$ мм, экранирующего электрода $a = 0.15$ мм. Численное значение внешнего радиуса слоя связующего и, в целом, ячейки $b = 0.182$ мм (рис. 2,б) задано из условия равенства относительной объемной доли связующего в обеих моделях структуры (рис. 2) при значении длины $l = 0.2$ мм стороны гексагональной ячейки в виде правильного шестиугольника (рис. 2,а). Электрический потенциал на жиле равен $U_{\text{con}} = 1000$ В, а на экранирующем электроде – 0 В, где U_{con} – управляющее электрическое напряжение. Для периодической модели структуры использована расчетная область в виде параллелепипеда с шириной

0.6 мм, высотой 0.68 мм и длиной 1.2 мм, включающая в себя фрагмент из гексагональных ячеек (рис. 2,а). Эффективные коэффициенты пьезоэлектрических напряжений $\beta_{11}^* = \beta_{22}^*, \beta_{33}^*$ [23] находим по формулам

$$\beta_{11}^* = -\frac{\bar{\sigma}_{11}}{U_{\text{con}}}, \beta_{22}^* = -\frac{\bar{\sigma}_{22}}{U_{\text{con}}}, \beta_{33}^* = -\frac{\bar{\sigma}_{33}}{U_{\text{con}}}$$

из рассмотрения задачи стесненного деформирования, т.е. когда на всех гранях параллелепипеда заданы условия симметрии и равенство нулю нормальных перемещений с учетом, что «касательные» перемещения в плоскости граней, в общем, присутствуют при равенстве нулю касательных напряжений, где $\bar{\sigma}_{11}, \bar{\sigma}_{22}, \bar{\sigma}_{33}$ – осредненные по соответствующим граням параллелепипеда нормальные напряжения. В табл.2, табл.3 даны в сравнении результаты вычислений эффективных коэффициентов пьезоэлектрического линейного расширения (табл.2) и пьезоэлектрических напряжений (табл.3), где численные значения пьезоэлектрических коэффициентов по полученному решению (4) – (51) для полидисперсной структуры (рис. 2,б) выделены красным (полужирным) цветом.

Таблица 2. Эффективные коэффициенты пьезоэлектрического линейного расширения.

Модели структуры		$\alpha_{11}^* = \alpha_{22}^*, \text{мкВ}^{-1}$	$\alpha_{33}^*, \text{мкВ}^{-1}$
полидисперсная (аналитическое решение)	для цилиндрической составной ячейки с учетом продольной деформации ε_{zz}	0.777	-1.379
	для предельно тонкой цилиндрической составной ячейки со свободными торцами при $\sigma_{zz} = 0$	0.835	-1.373
периодическая гексагональная (ANSYS)	непосредственный расчет при $\sigma^* = 0$	0.769	-1.414
	расчет через эффективные коэффициенты напряжений β^* и упругие константы c^*	0.740	-1.373

Таблица 3. Эффективные коэффициенты пьезоэлектрических напряжений.

Модели структуры	$\beta_{11}^* = \beta_{22}^*$, МПа/В	β_{33}^* , МПа/В
полидисперсная (аналитическое решение)	0.0284	-0.0530
периодическая гексагональная (ANSYS)	0.0247	-0.0559

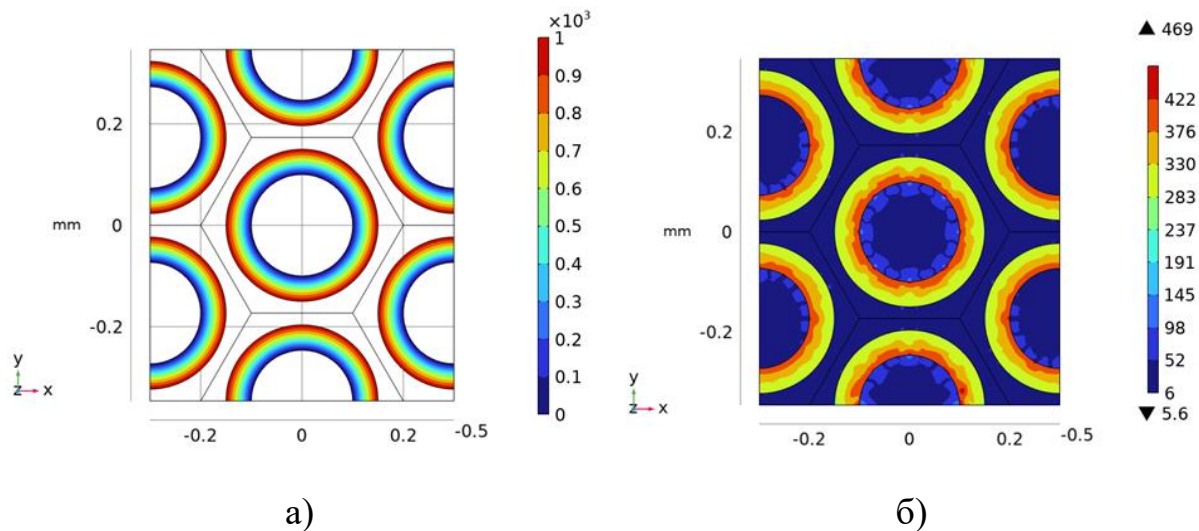


Рис. 3. Распределение электрического потенциала (а) и напряжений Мизеса (б) по поперечному сечению при стесненном деформировании фрагмента, $U_{\text{con}} = 1000$ В.

Дополнительно в табл.2 приведены численные значения коэффициентов $\alpha_{11}^* = \alpha_{22}^*, \alpha_{33}^*$, полученные по аналогичному (4) – (51) точному аналитическому решению для свободно деформируемой предельно тонкой цилиндрической составной ячейки (рис. 2,б) со свободными торцами ($\sigma_{zz} = 0$), когда толщина – размер по оси z ячейки стремится к нулю. В нижней строке табл.2 приведены численные значения коэффициентов α_{ij}^* , найденные как решение системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} (c_{1111}^* + c_{1122}^*)\alpha_{11}^* + c_{1133}^*\alpha_{33}^* = \beta_{11}^* \\ 2c_{1133}^*\alpha_{11}^* + c_{3333}^*\alpha_{33}^* = \beta_{33}^* \end{cases}$$

через найденные в пакете ANSYS независимые эффективные упругие константы c_{ijmn}^* и коэффициенты пьезоэлектрических напряжений β_{ij}^* с учетом выражения $\beta_{ij}^* = c_{ijmn}^* \alpha_{mn}^*$. На рис. 3 изображено распределение электрического потенциала (рис. 3,а) и напряжений по Мизесу (рис. 3,б) по поперечному сечению расчетной области при $U_{\text{con}} = 1000$ В.

3.2 Модальный анализ дискового и кольцевого FibrCD-актюаторов

Определены первые шесть собственных форм и частот (табл.4, рис. 4) колебаний FibrCD-актюаторов толщиной 5 мм, внешним $R = 20$ мм и внутренним $r_0 = 0$ мм (диск), 5 мм, 10 мм, 15 мм (кольцо) радиусами. Ось симметрии трансверсально-изотропных свойств однородного анизотропного материала – вдоль окружной координаты диска (кольца) FibrCD-актюатора.

Таблица 4. Первые шесть собственных частот колебаний $f_1, \dots, f_6$ дискового и кольцевых FibrCD-актюаторов.

r_0/R	Собственные частоты колебаний, Гц					
	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6
0	17758	33924	38404	62116	65152	67044
0.25	16483	30873	38014	62016	53793	48061
0.5	14089	32488	35466	60143	45217	28584
0.75	10680	42382	29317	52403	49995	12488

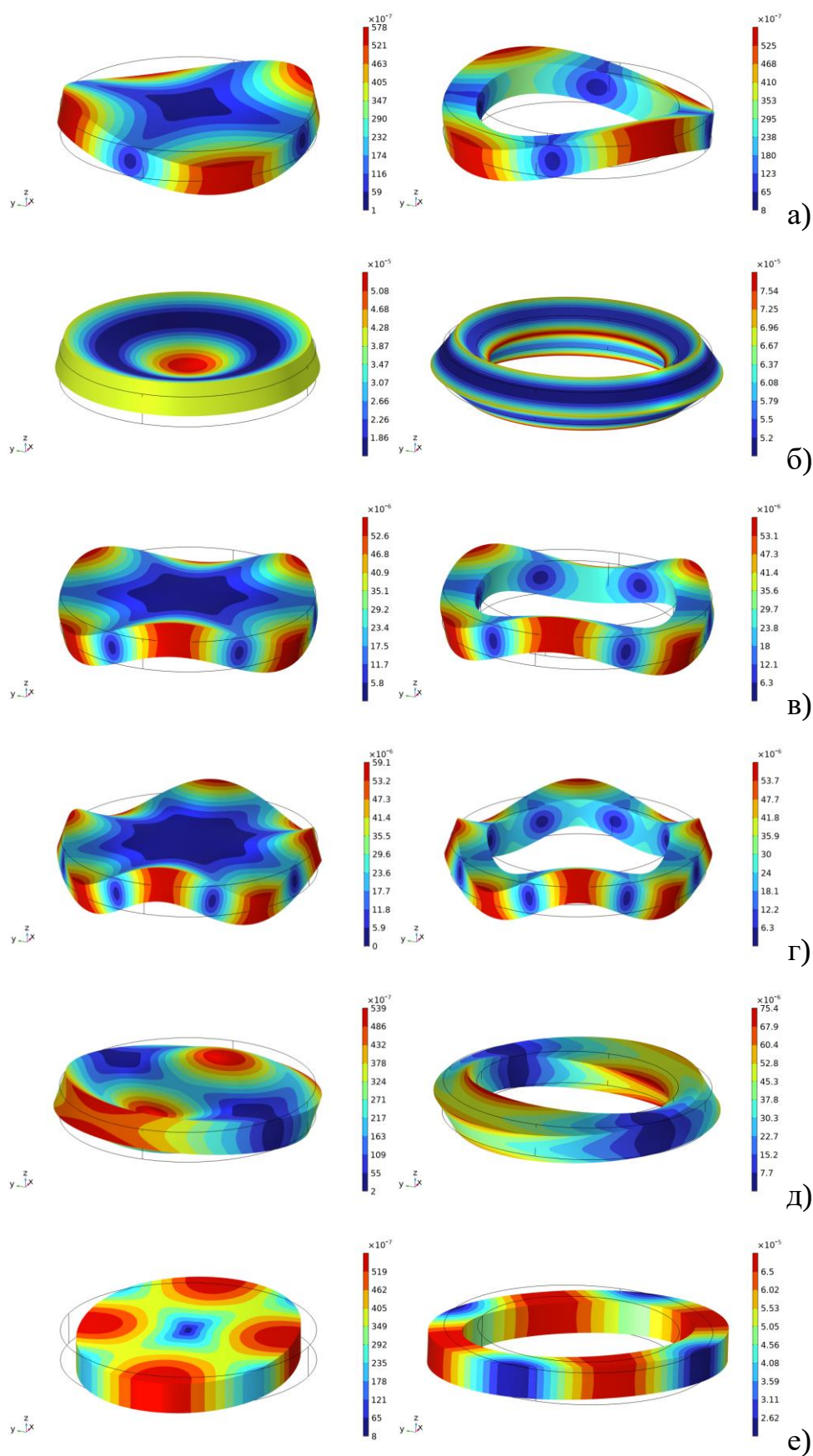


Рис. 4. Первые шесть собственных форм колебаний дискового и кольцевого FibrCD-актюаторов.

Заключение

Разработана математическая электромеханическая модель дискового FibrCD-актюатора (рис. 1,а), в котором множество витков пьезоэлектрического кабеля «жила/пьезоэлектрический слой/экранирующий электрод» (рис. 1,б) скреплены между собой полимерным связующим. Получено точное аналитическое решение связанной краевой задачи электроупругости для деформационных и электрических полей в области составной цилиндрической ячейки полидисперсной волоконной структуры (рис. 2,б) и, на его основе, получены решения для ее эффективных характеристик: модулей упругих свойств c^* , пьезоэлектрических коэффициентов линейного расширения α^* (табл.2) и блокирующих напряжений β^* (табл.3). Для подтверждения достоверности полученных аналитических решений осуществлен расчет в пакете ANSYS методом конечных элементов аналогичных эффективных характеристик идеальной периодической структуры с гексагональной укладкой витков пьезоэлектрического кабеля (рис. 2,а); подтверждена согласованность решений, полученных разными методами (табл.2, табл.3). Дополнительно, в пакете ANSYS найдено распределение электрического потенциала (рис. 3,а) и напряжений по Мизесу (рис. 3,б) по центральному поперечному сечению расчетной области и осуществлен модальный анализ, представлены первые шесть собственных форм (рис. 4) и частот (табл.4) колебаний дискового и кольцевого FibrCD-актюаторов.

Финансирование: Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Пермского края в рамках научного проекта № 20-41-596010.

Литература

1. Берлинкур Д., Керран Д., Жаффе Г. Пьезоэлектрические и пьезомагнитные материалы и их применение в преобразователях. Физическая акустика. Т.1. Методы и приборы ультразвуковых исследований. Часть А. Москва, Мир. 1966. С.204-326.
2. Мэзон У. Пьезоэлектрические кристаллы и их применения в ультраакустике. Москва, Изд-во иностр. лит. 1952. 448 с.
3. Панич А.Е. Пьезокерамические актюаторы. Ростов-на-Дону, Изд-во Рост. гос. ун-та. 2008. 160 с.
4. Паньков А.А. Пьезокомпозиты и датчики: монография в 3-х частях / Часть 3. Пьезолюминесцентные датчики, покрытия и актюаторы. Пермь, Изд-во Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. 2024. 347 с.
5. Park J.-S., Kim J.-H. Analytical development of single crystal Macro Fiber Composite actuators for active twist rotor blades // Smart Materials and Structures. 2005. № 14. P. 745-753. <https://doi.org/10.1088/0964-1726/14/4/033>
6. Ватульян А.О., Кирютенко А.Ю., Наседкин А.В. Плоские волны и фундаментальные решения в линейной термоэлектروупругости // Прикладная механика и техническая физика. 1996. Т. 37. № 5. С. 135-142. <https://doi.org/10.1007/BF02369312>
7. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 73-81. <https://doi.org/10.3103/S0025654409010063>
8. He T., Tian X., Shen Y. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder // European Journal of Mechanics – A/Solids. 2005. V. 24. № 2. P. 349-359. <https://doi.org/10.1016/j.euromechsol.2004.12.001>
9. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Динамическая задача термоэлектроупругости для функционально-градиентного слоя // Вычислительная механика сплошных сред. 2017. Т. 10. № 2. С. 117-126. <https://doi.org/10.7242/1999-6691/2017.10.2.10>

10. Шляхин Д.А., Кальмова М.А. Связанная нестационарная задача термоэлектроупругости для длинного полого цилиндра // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 24. № 4. С. 677-691. <https://doi.org/10.14498/vsgtu1781>
11. Белоконь А.В., Скалиух А.С. Математическое моделирование необратимых процессов поляризации. Москва, Изд-во Физматлит. 2010. 328 с.
12. Nasedkin A.V., Nasedkina A.A., Nassar M.E. Homogenization of porous piezocomposites with extreme properties at pore boundaries by effective moduli method // Mechanics of Solids. 2020. V. 55. P 827-836. <https://doi.org/10.3103/S0025654420050131>
13. Emad D, Fanni M.A, Mohamed A.M, Yoshida S. Low-Computational-Cost Technique for Modeling Macro Fiber Composite Piezoelectric Actuators Using Finite Element Method // Materials (Basel). 2021. № 14(15). P. 4316. <https://doi.org/10.3390/ma14154316>
14. Паньков А.А., Писарев П.В. Численное моделирование в ANSYS электроупругих полей в пьезоэлектролюминесцентном оптоволоконном датчике диагностирования объемного деформированного состояния композита. Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета // Механика. 2017. № 3. С. 153-166. <https://doi.org/10.15593/perm.mech/2017.3.09>
15. Патент RU № 2827058. Паньков А.А. Пьезоэлектрический актюатор. Дата заявки: 30.01.2024. Дата публикации: 23.09.2024. 7 с. URL: <https://patenton.ru/patent/RU2827058C1.pdf>
16. Патент RU № 2832857. Паньков А.А. Пьезоэлектрический актюатор. Дата заявки: 05.08.2024. Дата публикации: 09.01.2025. 8 с. URL: https://i.moscow/patents/ru2832857c1_20250109
17. Patent US № 4629925. Booth M., Penneck R.J. Piezoelectric coaxial cable. Application Date: 20.11.1984. Publication Date: 16.12.1986. 8 p. URL: <https://patents.google.com/patent/US4629925A/en>

18. Patent US № 4609845. Soni P.L., Farrar N.R. Stretched piezoelectric polymer coaxial cable. Application Date: 06.07.1984. Publication Date: 02.09.1986. 7 p. URL: <https://insight.rpxcorp.com/patent/US4609845A>
19. Победря Б.Е. Механика композиционных материалов. Москва, Изд-во Моск. ун-та. 1984. 336 с.
20. Гетман И.П., Мольков В.А. Об эффективных характеристиках пьезоактивных композитов с цилиндрическими включениями // Прикладная математика и механика. 1992. Т. 35. № 3. С. 501-509.
21. Паньков А.А. Пьезокомпозиты и датчики: монография в 3-х частях / Часть 1. Статистическая механика пьезокомпозитов. Пермь, Изд-во Перм. нац. иссл. политехн. ун-та. 2022. 234 с.
22. Кристенсен Р. Введение в механику композитов. Москва, Изд-во Мир. 1982. 334 с.
23. Dong X.-J., Meng G. Dynamic analysis of structures with piezoelectric actuators based on thermal analogy method // International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2006. V. 27. P. 841-844. <https://doi.org/10.1007/s00170-004-2290-5>

Для цитирования:

Паньков А.А. Электроупругость и модальный анализ пьезоволоконного дискового FibrCD-актюатора // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – №. 8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.8.2>