

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.8.3>

УДК: 621.396.72

## ОЦЕНКА КАНАЛА БОЛЬШИХ MIMO OFDM СИСТЕМ КАК ВОСПОЛНЕНИЕ СУБДИСКРЕТИЗИРОВАННОГО ТЕНЗОРА: ЧАСТЬ 1

С.В. Дорохин, Д.В. Шувалов, В.А. Ляшев

Московский физико-технический институт (НИУ),  
141701, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д.9

Статья поступила в редакцию 2 мая 2025 г.

**Аннотация.** Ключевой тренд развития современных сетей мобильной связи на основе MIMO OFDM – увеличение числа антенн базовой станции и пользовательских устройств, а также увеличение полосы и числа поднесущих. При использовании классических методов обработки сигналов это приводит к увеличению количества частотно-временных ресурсов на оценку канала. Уменьшение доли пилотов в таких методах ограничено рассеянием задержек в канале и возникающим эффектом наложения. Для преодоления этого ограничения мы предлагаем новый подход к оценке канала, основанный на измерениях тензора канала по перекрестным слоям и дальнейшем восполнении измеренного тензора. Обобщая известный алгоритм восполнения канонического тензора на модели Таккера и ТТ, мы уменьшаем среднюю нормированную ошибку восполнения с 0.22 до уровня ниже 0.1. Для дальнейшего повышения точности восполнения мы предлагаем перемежать расположение слоев с помощью перестановочного полинома. Результаты моделирования на каналах стандарта 38.901 3GPP показывают, что псевдослучайное перемежение повышает точность восполнения в формате Таккера более, чем в 10 раз.

При этом переход от модели Таккера к модели ТТ позволяет существенно ослабить зависимость точности восполнения от расположения слоев: при замене псевдослучайных слоев периодическими ошибка восполнения возрастает менее, чем на 20 %. Предлагаемые алгоритмы позволяют обойти ограничение, вызванное эффектом наложения, и имеют большой потенциал для снижения частотно-временных ресурсов, требуемых для оценки канала. В следующей части работы мы затронем вопросы практической реализации необходимых для восполнения измерений и возможного снижения числа ресурсов при оценке канала.

**Ключевые слова:** MIMO системы, OFDM, оценка канала, восполнение тензора, крестовые приближения.

**Автор для переписки:** Дорохин Семен Владимирович, [dorohin.sv@phystech.edu](mailto:dorohin.sv@phystech.edu)

## Введение

Ключевое место в системах мобильной связи пятого поколения занимают системы с большими антенными решетками (англ. Massive MIMO). Число антенных элементов в современных базовых станциях может достигать 64 [1], а на пользовательских устройствах – от 4 до 8. Главная задача при разработке мобильных сетей следующего, шестого поколения – увеличение пропускной способности соты с 1 до 16 Гб/с [2].

С точки зрения комитета 3GPP, один из способов решения этой проблемы – увеличение частоты несущей и переход в диапазон 7-24 ГГц. Например, спецификации для диапазона 14.8-15.35 ГГц уже включены в 19 версию стандарта [3]. При переходе в этот диапазон возможно существенно увеличить количество поднесущих и расстояние между ними, а значит, и полосу сигнала (до 400 МГц согласно оценкам Nokia Bell Labs [2]). Кроме того, уменьшится длина волны, что позволит разместить большее число антенных элементов в форм-факторе устройств диапазона 1-5 ГГц. В 2024 году на всемирном конгрессе мобильной связи в Барселоне компания Qualcomm представила GigaMIMO – прототип базовой станции шестого поколения с 4096 антенными элементами,

работающий на частоте 13 ГГц. В то же время на пользовательских устройствах в таком диапазоне вполне возможно разместить до 64 антенных элементов [4].

Увеличиваются все размеры тензора канала. При использовании классических методов оценки пропорционально растет и количество частотно-временных ресурсов, требуемых для проведения необходимых измерений. Это, в свою очередь, ограничивает количество поддерживаемых пользовательских устройств (англ. UE – User Equipment). Одна из главных проблем на пути к переходу в диапазон 7-24 ГГц – уменьшение количества частотно-временных ресурсов, затрачиваемых на оценку канала.

Классический подход к оценке OFDM канала заключается в независимой (одномерной) обработке периодически расположенных по частоте сигналов различных антенн передатчика. В системе из  $N_{sc}$  поднесущих измерительный сигнал  $s \in \mathbb{C}^{N_{sc} \times 1}$  располагается по поднесущим в виде «гребенки» с шагом  $comb$  согласно маске  $\Omega_{1D} \in \mathbb{R}^{N_{sc} \times 1}$ :

$$\Omega_{1D}(n) = \begin{cases} 1, n \bmod (comb) = 0 \\ 0, иначе \end{cases} . \quad (1)$$

Принятый сигнал в случае отсутствия шумов будет определяться как

$$y = h \circ s \circ \Omega_{1D},$$

где  $h \in \mathbb{C}^{N_{sc} \times 1}$  – частотная характеристика канала,  $\circ$  – поэлементное умножение (произведение Адамара). На стороне приемника канал на пилотных поднесущих можно оценить, например, методом наименьших квадратов:

$$\hat{h} = h \circ s \circ s^* \circ \Omega_{1D} = h \circ \Omega_{1D}. \quad (2)$$

Оценку канала на всех поднесущих можно получить интерполяцией, например, с помощью ДПФ. Заметим, что согласно теореме о свертке ОДПФ  $\hat{h}_\tau$  вектора измерений (2) может быть выражено как свертка

$$\hat{h}_\tau = h_\tau * \Omega_\tau,$$

где  $h_\tau$  – идеальная импульсная характеристика канала,  $\Omega_\tau$  – ОДПФ маски измерений  $\Omega_{1D}$ .

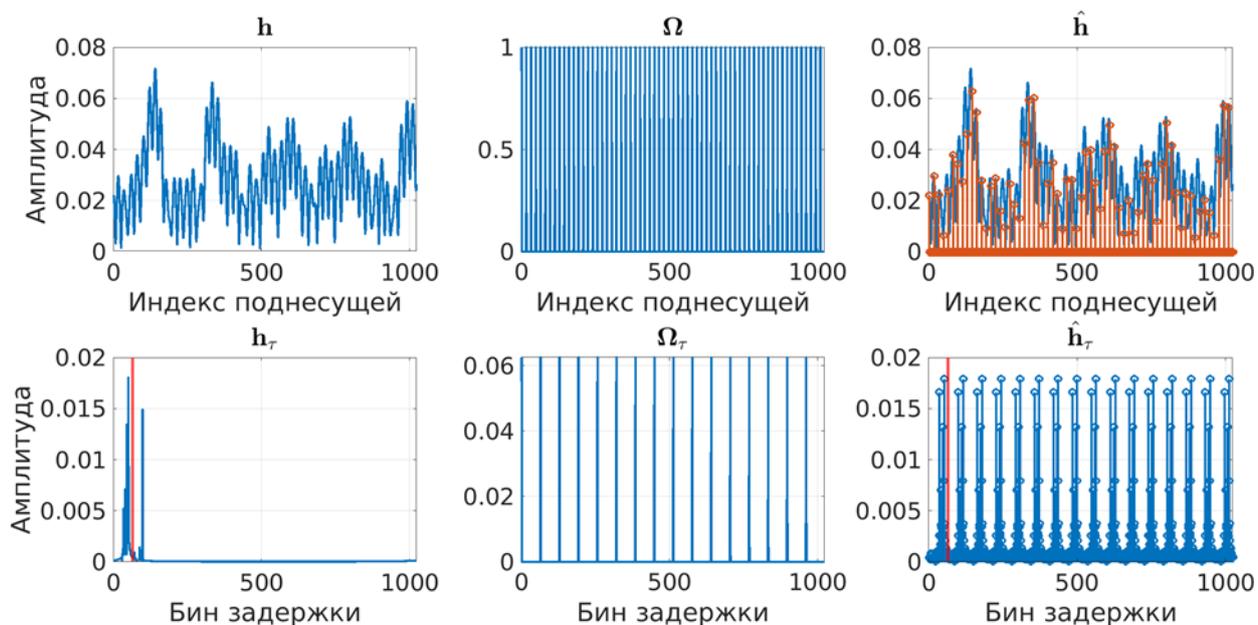


Рис. 1. Иллюстрация эффекта наложения, возникающего при оценке канала периодически расположенным пилотным сигналом.

При таком подходе единственный способ уменьшения количества пилотных поднесущих – увеличение шага гребенки *comb* – неизбежно приводит к эффекту наложения в пространстве задержек и существенно увеличивает ошибку оценки, что иллюстрирует Рис. 1. Максимальное значение *comb* в этом случае определяется величиной рассеяния задержек в канале.

По этой причине для уменьшения количества частотно-временных ресурсов при оценке канала необходимы новые методы обработки сигналов. Помимо нерегулярного (апериодического) расположения измерительных сигналов [5], перспективным даже при периодическом расположении измерительных сигналов выглядит использование тензорных представлений канала для совместной обработки сигналов по размерностям частот и антенн. Например, в работе [6] было показано, что на одной поднесущей матрица канала имеет малый ранг. При специальной блочной структуре сканирования тензор принятого сигнала можно представить в виде суммы прямых произведений троек векторов (каноническое разложение). Нахождение физических параметров канала сводится к вычислению канонического разложения, например, методом переменных наименьших квадратов [6]. В работе [7] аналогичный подход применили к оценке канала в узкой полосе. Несколько позднее в работе [8] было

показано, что при больших размерах антенных решеток или при использовании широкой полосы тензор канала не удовлетворяет канонической модели. Возможность применения разработанных в [6] и [7] методов в работе [8] достигается за счет особой блочно-кадровой структуры измерений. Большая вычислительная сложность нахождения канонического разложения и необходимость дополнительных преобразований в широкополосном случае побудили исследователей использовать другие тензорные представления. Например, в работе [9] использовалась модель Таккера, допускающая дополнительные связи между компонентами антенн и частот. В работе [10] было показано, что при обработке тензора канала в формате ТТ можно снизить время вычисления на 87%, при этом сохраняя структуру факторов разложения, аналогично каноническому представлению.

Основным недостатком существующих тензорных методов оценки канала является объединение передачи измерительных сигналов и оценки физических параметров канала в одну математическую задачу. В результате такого подхода ограничения на измерительные сигналы определяются особенностями тензорной модели и алгоритма разложения. В описанных выше работах измерительные сигналы должны повторяться или по поднесущим, или от символа к символу. Более того, сигналы предполагаются случайными и по своим свойствам сильно отличаются от сигналов стандарта 5G. Внедрение таких методов оценки канала сопряжено с большими проблемами по части обратной совместимости.

По этим причинам на конференции DSPA-2025 [11] нами был предложен новый подход к тензорной оценке канала. В рамках этого подхода выделяется два этапа: оценка элементов тензора и его восполнение. Процесс оценки элементов тензора с точки зрения измерительных сигналов аналогичен классической оценке канала и не зависит от самих измерительных сигналов. Положение известных (измеренных) элементов описывается маской  $\Omega$ , связывающей два этапа.

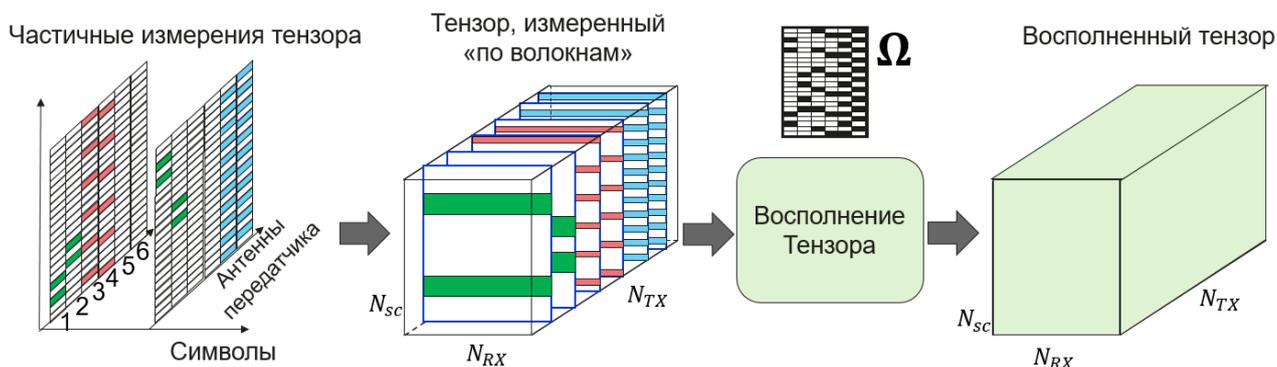


Рис. 2. Общая схема предлагаемого подхода к оценке канала. Первая стадия состоит в измерении элементов тензора канала, вторая стадия состоит в восполнении тензора.

В силу того, что излученный сигнал принимается всеми  $N_{RX}$  антеннами приемника одновременно, бинарная маска  $\Omega$  состоит из «волокон» вдоль размерности приемных антенн. Поэтому достаточно задавать двумерную маску  $\Omega$  для всех  $N_{sc}$  поднесущих и  $N_{TX}$  антенн передатчика, как показано на Рис. 2. В рамках этой работы будем исследовать общие свойства алгоритмов восполнения, полагая элементы тензора  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N_{RX} \times N_{TX} \times N_{sc}}$  уже измеренными с некоторым шумом:  $\mathcal{H}_M = \mathcal{H} \circ \Omega + \mathcal{N}$ . Так как измерительные сигналы стандарта 5G предполагают периодическое расположение по поднесущим, будем рассматривать измерения тензоров по перекрестным слоям. Будем считать, что задан набор «столбцов»  $\mathcal{I}_c \subset \{1, \dots, N_{TX}\}$  и набор «строк»  $\mathcal{J}_r \subset \{1, \dots, N_{sc}\}$ , совместно определяющие положение ненулевых элементов  $\Omega$ .

В сравнении с предыдущей работой [11], в текущей статье представлен ряд новых результатов. Во-первых, в работе [11] рассматривалось только регулярное (периодическое) расположение слоев, в то время как в текущей статье рассматривается также их нерегулярное расположение с качественным теоретическим анализом (раздел 4.2). Во-вторых, в текущей статье приводятся условия восполнения, связывающие ранги тензоров и количество слоев (раздел 3). Наконец, в работе [11] рассматривается представление ТТ только для тензора одного размера, в то время как в текущей статье рассматривается переход от модели Таккера для тензора  $256 \times 32 \times 2304$  к модели ТТ для тензора размера  $16 \times 32 \times 2304 \times 16$ . Более того, вторая часть текущей работы посвящена способам

практической реализации необходимых измерений и численному анализу пропускной способности.

Дальнейшее изложение построено следующим образом:

- В разделе 2 существующий алгоритм восполнения канонического тензора, измеренного по перекрестным слоям, обобщен на тензоры в формате ТТ и, как частный случай, в формате Таккера.
- В разделе 3 исследуются необходимые для точного восполнения условия, связывающие ранги тензора и количество измеренных слоев. Показано, что в случае формата Таккера минимальное количество пилотных поднесущих ограничено не разбросом задержек, как в случае одномерной интерполяции, а рангами тензора. Также показано, что переход к формату ТТ (Tensor Train) позволяет в несколько раз снизить требуемое количество слоев.
- В разделе 4 качественно исследуется влияние расположения слоев на точность восполнения. Отмечается связь с задачей выбора столбцов матрицы с ортогональными строками и задачей построения почти равноугольных жестких фреймов. Предлагается псевдослучайный метод выбора слоев, основанный на перестановочных полиномах. Также показано, что переход от модели Таккера к модели ТТ позволяет снизить зависимость от способа расположения слоев.
- В разделе 5 в результате численных экспериментов на базе модели канала 3GPP 38.901 подтверждены выводы разделов 3 и 4. В случае восполнения в формате Таккера нормированная ошибка возрастает в 2-15 раз при замене псевдослучайного расположения слоев периодическим. В случае восполнения в формате ТТ ошибка при аналогичной замене типа расположения слоев возрастает не более, чем в 1.2 раза.

## 1. Алгебраические алгоритмы выполнения тензоров, измеренных по слоям

Один из основных методов получения малопараметрического описания матрицы – вычисление ее малорангового приближения. Несмотря на то, что оптимальное малоранговое приближение достигается с помощью сингулярного разложения, для матриц большого размера вычислительная сложность при таком подходе может быть чрезвычайно высокой. Более вычислительно эффективной альтернативой в этом случае выступают крестовые приближения. Теория крестовых (скелетных) приближений матриц активно развивается уже более 30 лет [12], [13], [14], [15] и успешно применяется для ускорения расчетов электромагнитных полей [16], обработки видео [17] и оптимизации моделей машинного обучения [18], [19]. Основная идея заключается в приближении матрицы  $A \in \mathbb{C}^{N \times M}$  малого ранга  $r$  с помощью невырожденной подматрицы  $\hat{A} \in \mathbb{C}^{r \times r}$ , а также подматриц столбцов  $C \in \mathbb{C}^{N \times r}$  и строк  $R \in \mathbb{C}^{r \times M}$ , содержащих  $\hat{A}$ :

$$A = CUR, \quad (3)$$

где  $U = \hat{A}^{-1}$ .

Основная проблема при построении приближений вида (3) состоит в выборе подмножества строк и столбцов. При наличии доступа ко всей матрице  $A$  соответствующий выбор следует делать, максимизируя детерминант подматрицы  $\hat{A}$  (алгоритм, известный как `maxvol` [20]). Однако в некоторых приложениях, и в беспроводной связи в частности, выбор столбцов и строк матрицы определяется конфигурацией измерительных сигналов заранее перед процессом измерения. Адаптивные измерения связаны с дополнительными затратами на передачу сигналов обратной связи передающей стороне.

Эти ограничения, безусловно, снижают точность крестовой аппроксимации. Одним из способов увеличения точности является обобщение методов крестовых приближений на случай тензоров. В данном разделе приводится описание существующего обобщения крестовых методов для тензоров канонического формата (раздел 1.1), а также практическая идея

применения этого алгоритма в случае широкополосных каналов, когда каноническая модель не может в точности описать тензор канала (раздел 1.2).

### 1.1. Восполнение тензоров канонического формата, измеренных по слоям

Один из популярных подходов при выборе тензорной модели канала состоит в выборе тензорного разложения на базе приближенной физической модели канала. Если предположить, что в ММО-канале между приемником и передатчиком существует  $L$  путей распространения, то матрица канала для одной частоты несущей может быть записана в виде

$$\mathbf{H} = \sum_{l=0}^{L-1} \alpha_l \left( \mathbf{a}_{RX,X}(\Theta_{1,l}) \otimes \mathbf{a}_{RX,Y}(\Theta_{2,l}) \right) \left( \mathbf{a}_{TX,X}(\Theta_{3,l}) \otimes \mathbf{a}_{TX,Y}(\Theta_{4,l}) \right)^H, \quad (4)$$

где  $\otimes$  – произведение Кронекера  $\left( \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \mathbf{A}_{m,1}\mathbf{B} & \dots & \mathbf{A}_{mm}\mathbf{B} \end{bmatrix} \right)$ ;  $\Theta_{n,l}$  – проекция

волнового вектора на заданное направление. В частности,

$$\Theta_{1,l} = d \sin(v_l^{AoD}) \sin(\psi_l^{AoD}) / \lambda, \quad \Theta_{2,l} = d \cos(v_l^{AoD}) \sin(\psi_l^{AoD}) / \lambda,$$

$$\Theta_{3,l} = d \sin(v_l^{AoA}) \sin(\psi_l^{AoA}) / \lambda, \quad \Theta_{4,l} = d \cos(v_l^{AoA}) \sin(\psi_l^{AoA}) / \lambda,$$

где  $v_l^{AoA}$  и  $\psi_l^{AoA}$  – азимут и угол места направления на  $l$ -тый луч со стороны приемника;  $v_l^{AoD}$  и  $\psi_l^{AoD}$  – азимут и угол места направления на  $l$ -тый луч со стороны передатчика;  $\mathbf{a}(\Theta)$  – направляющий (англ. steering) вектор антенной решетки из  $N$  элементов:

$$\mathbf{a}(\Theta) = \left[ 1, e^{-2\pi j\Theta}, \dots, e^{-2\pi j(N-1)\Theta} \right]^T.$$

Выражение (4) представляет собой сумму  $L$  компонент, каждый из которых задается как прямое произведение векторов. Такое представление тензоров называется каноническим разложением (англ. Canonical Polyadic Decomposition) [21]. Для ММО OFDM-системы модель (4) может быть обобщена [10] как

$$\mathcal{H}_{m_0}(i_1, i_2, i_3, i_4) = \sum_{l=1}^L \alpha_l e^{-2\pi j \cdot \tau_l f_{m_0}} \prod_{n=1}^4 \mathbf{a}_{n,l,m_0}(i_n),$$

где  $f_{m_0} = m_0 \cdot \frac{f_s}{N_{sc}}$  – частотный сдвиг  $m_0$ -той поднесущей относительно центральной частоты,  $\tau_l$  – задержка  $l$ -того луча, а «направляющие» (steering) вектора в многочастотном случае выражаются как

$$\mathbf{a}_{n,l,m_0} = \left[ 1, e^{-2\pi j \left(1 + \frac{f_{m_0}}{f_c}\right) \Theta_{n,l}}, \dots, e^{-2\pi j (N-1) \left(1 + \frac{f_{m_0}}{f_c}\right) \Theta_{n,l}} \right]^T. \quad (5)$$

Примечательно, что в общем случае направляющие вектора связаны с множителем  $\alpha_l e^{-2\pi j \tau_l f_{m_0}}$  по частоте и не могут быть разделены. MIMO OFDM канал строго не соответствует модели канонического тензора. Тем не менее, если величина  $(N-1) \frac{f_{m_0}}{f_c}$  близка к нулю, то в выражении (5) можно пользоваться приближением  $\mathbf{a}_{n,l,m_0} \approx \mathbf{a}_{n,l}$ .

Если тензор  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N \times M \times K}$  допускает разложение вида

$$\mathcal{H}(n, m, k) = \sum_{r=1}^R \mathbf{a}(r, n) \mathbf{b}(r, m) \mathbf{c}(r, k), \quad (6)$$

то минимально возможное число слагаемых  $R$  в такой сумме называется каноническим рангом тензора. В выражении (6) вектора  $\mathbf{a}(r, :)$  можно сгруппировать в матрицу  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{R \times N}$ , вектора  $\mathbf{b}(r, :)$  в матрицу  $\mathbf{B} \in \mathbb{C}^{R \times M}$  и т.д. Для краткости будем обозначать тензор, допускающий каноническое разложение с фактор-матрицами  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  и  $\mathbf{C}$ , как

$$\mathcal{H} = [\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}]. \quad (7)$$

Разверткой тензора  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_D}$  по  $d$ -той размерности называется матрица  $\mathcal{H}^{(d)} \in \mathbb{C}^{N_d \times (N_1 \dots N_{d-1} N_{d+1} \dots N_D)}$ . В случае канонических тензоров развертка легко выражается через фактор-матрицы. Например, для тензора (7)

$$\mathcal{H}^{(2)} = \mathbf{B}(\mathbf{C} \odot \mathbf{A})^T,$$

где  $\odot$  – произведение Хатри-Рао (столбцовое произведение Кронекера). Произведением тензора  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{N_1 \times \dots \times N_D}$  и матрицы  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{N_d \times K}$  вдоль  $d$ -той

размерности называется произведение матрицы  $A$  на развертку  $\mathcal{X}$  по размерности  $d$  с переупорядочением результата в тензор:

$$\mathcal{X} \times_d A = \text{reshape}\left(A \cdot \mathcal{X}^{(d)}\right) \in \mathbb{C}^{(N_1 \times \dots \times N_{d-1}) \times K \times (N_{d+1} \times \dots \times N_D)}$$

Один из алгоритмов восполнения канонических тензоров, измеренных по слоям, описан в работе [22] в контексте обработки изображений магнитно-резонансной томографии. В частности, слои по разным размерностям объединяются в подтензоры

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H} \times_1 P_1 = [P_1 A, B, C] = [A_1, B_1, C_1], \quad (8)$$

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{H} \times_2 P_2 = [A, P_2 B, C] = [A_2, B_2, C_2], \quad (9)$$

где  $P_1$  и  $P_2$  – матрицы выбора строк, определяющие положения слоев.

Из условий единственности канонического разложения для  $\mathcal{H}_2$  из (9) получаем

$$A = A_2 \Pi \Lambda_1, P_2 B = B_2 \Pi \Lambda_2, C = C_2 \Pi \Lambda_3, \quad (10)$$

где  $\Pi$  – произвольная матрица перестановки, а  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  – диагональные масштабирующие матрицы такие, что  $\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = I$ . С учетом (10) для развертки тензора  $\mathcal{H}_1$  по второй размерности можно записать

$$\mathcal{H}_1^{(2)} = B(C \odot P_1 A)^T = B(C_2 \Pi \Lambda_3 \odot P_1 A_2 \Pi \Lambda_1)^T = B \Pi^T \Lambda_3 \Lambda_1 (C_2 \odot P_1 A_2)^T$$

Из этого выражения можем выразить

$$\hat{B} = B \Pi^T \Lambda_3 \Lambda_1 = \mathcal{H}_1^{(2)} \left( (C_2 \odot P_1 A_2)^T \right)^\dagger. \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что фактор-матрицы  $A_2, \hat{B}, C_2$  дают каноническое разложение исходного тензора:

$$\hat{\mathcal{H}} = [A_2, \hat{B}, C_2] = [A \Pi^T \Lambda_1^{-1}, B \Pi^T \Lambda_3 \Lambda_1, C \Pi^T \Lambda_3^{-1}] = [A, B, C] = \mathcal{H}. \quad (12)$$

Аналогичным образом полный тензор может быть восстановлен по факторам разложения подтензора  $\mathcal{H}_1$ :

$$\mathcal{H} = [\hat{A}, B_1, C_1], \quad (13)$$

где 
$$\hat{A} = A \Pi^T \Lambda_2 \Lambda_3 = \mathcal{H}_2^{(1)} \left( (C_1 \odot P_2 B_1)^T \right)^\dagger, \quad (14)$$

а матрицы  $\mathbf{\Pi}, \mathbf{\Lambda}_2, \mathbf{\Lambda}_3$  уже относятся к единственности разложения  $\mathcal{H}_1$ . Основную идею этого подхода иллюстрирует Рис. 3. После восстановления недостающей фактор-матрицы по формуле (11) или (14) на основе полного канонического разложения можно восстановить все элементы тензора.

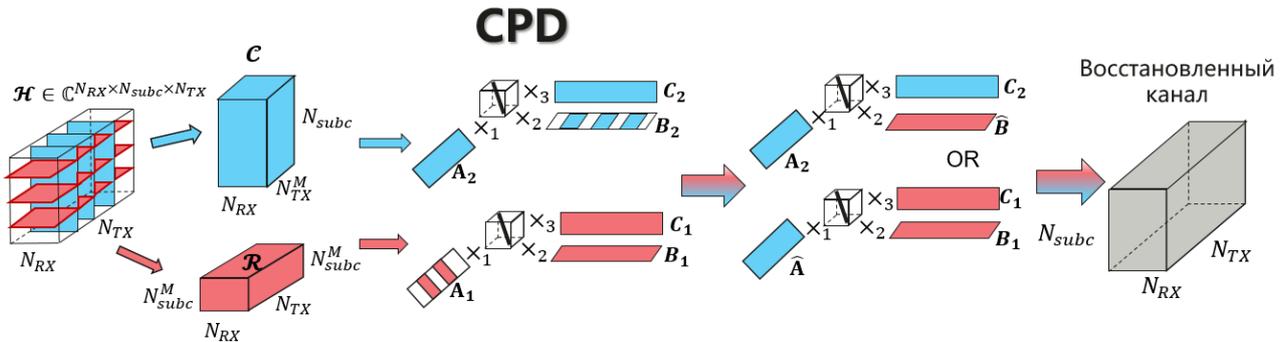


Рис. 3. Восполнение тензора в каноническом формате, измеренного по слоям, как способ оценки MIMO OFDM канала.

## 1.2. Приближение широкополосного тензора узкополосными каноническими тензорами

Если полоса  $B$  канала велика ( $B > \frac{c}{D}$ , где  $D$  – характерные размеры антенны,  $c$  – скорость света), то выражение  $\frac{f_{m_0}}{f_c}$  в уравнении (5) перестает быть пренебрежимо малым, особенно для поднесущих на краях полосы. Это приводит к большой погрешности описания тензора канала канонической моделью. Для избежания этого эффекта весь набор из  $N_{SC}$  поднесущих можно разбить на  $N_{SB}$  подполос и приближать моделью канонического тензора каждый из подтензоров вида

$$\mathcal{H}_{i_{SB}} = \mathcal{H} \left( :, :, 1 + (i_{SB} - 1) \cdot \frac{N_{SC}}{N_{SB}} : i_{SB} \cdot \frac{N_{SC}}{N_{SB}} \right), i_{SB} = 1, \dots, N_{SB}, \quad (15)$$

где  $i_{SB}$  – индекс подполосы. Для простоты будем считать, что все подполосы содержат одинаковое количество поднесущих.

Размеры каждого из таких подтензоров уменьшатся только вдоль третьей размерности – размерности поднесущих. Это значит, что при применении метода

из предыдущего раздела к подтензорам (15) матрица  $P_1$  выбора строк по размерности антенн передатчика остается в том же виде, как и в уравнении (8). Однако количество слоев по поднесущим и их расположение для каждого подтензора будет, вообще говоря, разным (особенно при случайном расположении пилотов). Обозначим это число для подтензора  $i_{SB}$  как  $N_p^{i_{SB}}$ .

Вместо матрицы выбора пилотных поднесущих  $P_2 \in \mathbb{C}^{N_p \times N_{sc}}$  из уравнения (9) с точки зрения алгоритма восполнения для каждого подтензора необходимо

задавать отдельную матрицу  $P_2^{i_{SB}} \in \mathbb{C}^{N_p^{i_{SB}} \times \frac{N_{sc}}{N_{SB}}}$ . Уравнения (8)-(9) принимают вид

$$\mathcal{H}_{1,i_{SB}} = \mathcal{H}_{i_{SB}} \times_1 P_1 = [P_1 A_{i_{SB}}, B_{i_{SB}}, C_{i_{SB}}] = [A_{1,i_{SB}}, B_{1,i_{SB}}, C_{1,i_{SB}}],$$

$$\mathcal{H}_{2,i_{SB}} = \mathcal{H}_{i_{SB}} \times_2 P_2^{i_{SB}} = [A_{i_{SB}}, P_2^{i_{SB}} B_{i_{SB}}, C_{i_{SB}}] = [A_{2,i_{SB}}, B_{2,i_{SB}}, C_{2,i_{SB}}],$$

а неизвестные факторы восстанавливаются для каждого подтензора отдельно аналогично (11) и (13). Восстановление же факторов всех подтензоров одновременно затруднительно в силу неоднозначности вида (10) между факторами разложения подтензоров, соответствующих различным подполосам. Заметим также, что разбиение на подполосы накладывает дополнительные ограничения на количество слоев  $N_p$  вдоль поднесущих (выделены красным на Рис. 3). При периодическом расположении таких слоев с периодом  $comb_{sc}$  для того, чтобы в каждой из  $N_{SB}$  подполос была хотя бы одна пилотная поднесущая (чтобы  $N_p^{i_{SB}} \neq 0 \forall i_{SB}$ ), должно выполняться неравенство

$$\frac{N_{sc}}{comb_{sc}} \geq N_{SB}.$$

Более того, при случайном расположении слоев даже при выполнении этого неравенства может возникнуть ситуация, когда в какой-то подполосе не оказывается пилотных поднесущих. Способы разрешения таких ситуаций и методы практической реализации восполнения с разбиением на подполосы выходят за рамки этой работы, но могут быть исследованы в дальнейшем.

Таким образом, разбиение на подполосы с одной стороны может повысить точность аппроксимации тензора канала набором канонических тензоров, причем чем больше подполос, тем точнее будет такое приближение. С другой стороны, увеличение числа подполос  $N_{SB}$  приводит к появлению дополнительных ограничений на количество слоев, что может стать препятствием на пути к достижению главной цели – снижению числа частотно-временных ресурсов, требуемых для оценки канала.

## 2. Предлагаемый алгоритм на основе модели ТТ и модели Таккера

Несмотря на свою простоту, восполнение тензоров по формулам (11)-(12) и (13)-(14) имеет ряд важных нюансов. Во-первых, МИМО OFDM канал соответствует модели канонического разложения только в случае узкополосного канала, что в широкополосном случае потребует применения одного и того же алгоритма для нескольких частотных диапазонов. Во-вторых, модель (4) не учитывает поправок на диаграмму направленности антенного элемента. Более того, отклонения диаграммы направленности от идеальной могут «испортить» каноническую структуру тензора. Наконец, нахождение канонического разложения является сложной вычислительной задачей, сходимость большинства современных методов ухудшается с ростом размеров тензора [23]. Альтернативой каноническому разложению выступают тензорные модели, обобщающие одномерное сингулярное разложение на многомерный случай. Например, при последовательном вычислении сингулярного разложения разверток вдоль каждой размерности [24] можно получить разложение Таккера

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A}_1 \times_2 \mathbf{A}_2 \dots \times_D \mathbf{A}_D, \quad (16)$$

с ортогональными фактор-матрицами  $\mathbf{A}_1 \in \mathbb{C}^{R_1 \times N_1}, \mathbf{A}_2 \in \mathbb{C}^{R_2 \times N_2}, \dots, \mathbf{A}_D \in \mathbb{C}^{R_D \times N_D}$  и ядром  $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{R_1 \times R_2 \times \dots \times R_D}$ . В отличие от канонического разложения с одним (каноническим) рангом, разложение Таккера в общем случае имеет  $D$  рангов  $(R_1, R_2, \dots, R_D)$ . Для удобства будем обозначать разложение (16) как

$$\mathcal{H} = [\mathcal{G}; \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_D].$$

Один из недостатков разложения Таккера – существенный объем памяти, занимаемый тензором-ядром  $\mathcal{C}$  при больших размерностях  $D$  (т.н. «проклятие размерности»). Для устранения этого недостатка в 2010 году была предложена модель ТТ (Tensor Train) [25], использующая тензор-тензорные произведения. Тензорное произведение  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times_{M,1} \mathcal{B}$  двух тензоров  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_M}$  и  $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{N_M \times K_2 \times K_3 \times \dots \times K_L}$  по размерностям  $(M, 1)$  вычисляется как

$$\mathcal{C}(i_1, i_2, \dots, i_{M-1}, j_2, j_3, \dots, j_L) = \sum_{i_M=1}^{N_M} \mathcal{A}(i_1, i_2, \dots, i_M) \mathcal{B}(i_M, j_2, j_3, \dots, j_L),$$

причем результат имеет размерность  $\mathcal{C} \in \mathbb{C}^{N_1 \times N_2 \times \dots \times N_{M-1} \times K_2 \times K_3 \times \dots \times K_L}$ . Эту операцию можно также воспринимать как свертку вдоль размерностей  $(M, 1)$ .

В случае ТТ имеет смысл рассматривать тензоры размерности выше 3. Для четырехмерного тензора  $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{K_x \times N \times M \times K_y}$  разложение ТТ имеет вид

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{B} \times_1 \mathcal{A}) \times_{3,1} (\mathcal{C} \times_3 \mathcal{D}), \quad (17)$$

где  $\mathcal{B} \in \mathbb{C}^{R_1 \times N \times R_2}$  и  $\mathcal{C} \in \mathbb{C}^{R_2 \times M \times R_3}$  – трехмерные ядра разложения, а  $\mathcal{A} \in \mathbb{C}^{K_x \times R_1}$  и  $\mathcal{D} \in \mathbb{C}^{K_y \times R_3}$  – фактор-матрицы разложения. Для удобства будем обозначать ТТ разложение четырехмерного тензора как

$$\mathcal{Y} = [\mathcal{A}; \mathcal{B}; \mathcal{C}; \mathcal{D}].$$

Отметим, что при выборе  $K_y = 1$  неизбежно следует  $R_3 = 1$ , фактор-матрица  $\mathcal{D} \in \mathbb{C}^{K_y \times R_3}$  вырождается в число, тензор-ядро  $\mathcal{C} \in \mathbb{C}^{R_2 \times M \times R_3}$  вырождается в матрицу  $\mathcal{C} \in \mathbb{C}^{R_2 \times M}$ , а выражение (17) совпадает с (16) при  $D = 3$  и  $A_2 = I$ . То есть для трехмерных тензоров ТТ разложение совпадает с разложением Таккера с единичной фактор-матрицей по второй размерности.

Для полноты изложения приведем предложенное нами в [11] обобщение идеи восполнения тензора, измеренного по слоям, с канонического разложения [22] на формат ТТ. Основная идея заключается в разложении одной из размерностей трехмерного тензора  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{N \times M \times K}$  на множители  $K = K_x \cdot K_y$

и преобразовании трехмерного тензора в четырехмерный  $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{K_x \times N \times M \times K_y}$ .

Восстановим полный тензор  $\mathcal{Y}$  по наблюдениям двух его подтензоров

$$\mathcal{Y}_1 = \mathcal{Y} \times_2 \mathbf{P}_2 = [\mathbf{A}, \mathcal{B} \times_2 \mathbf{P}_2, \mathbf{C}, \mathbf{D}] = [\mathbf{A}_1; \mathcal{B}_1, \mathbf{C}_1; \mathbf{D}_1] \in \mathbb{C}^{K_x \times N_p \times M \times K_y}, \quad (18)$$

$$\mathcal{Y}_2 = \mathcal{Y} \times_3 \mathbf{P}_3 = [\mathbf{A}, \mathcal{B}, \mathbf{C} \times_3 \mathbf{P}_3, \mathbf{D}] = [\mathbf{A}_2; \mathcal{B}_2, \mathbf{C}_2; \mathbf{D}_2] \in \mathbb{C}^{K_x \times N \times M_p \times K_y}, \quad (19)$$

где  $N_p$  – количество слоев, измеренных по второй размерности,  $M_p$  – количество слоев, измеренных вдоль третьей размерности. Алгоритм ТТ-SVD дает разложение, единственное с точностью до домножения фактор-матриц и ядер на ортогональные матрицы  $\mathbf{Q}_A \in \mathbb{C}^{R_1 \times R_1}$ ,  $\mathbf{Q}_B \in \mathbb{C}^{R_2 \times R_2}$ ,  $\mathbf{Q}_C \in \mathbb{C}^{R_3 \times R_3}$ :

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 \mathbf{Q}_A, \quad \mathcal{B} \times_2 \mathbf{P}_2 = \mathcal{B}_1 \times_1 \mathbf{Q}_A^H \times_3 \mathbf{Q}_B, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}_1 \times_1 \mathbf{Q}_B^H \times_3 \mathbf{Q}_C, \quad \mathbf{D} = \mathbf{Q}_C^H \mathbf{D}_1. \quad (20)$$

Аналогично случаю восполнения канонического тензора, матрицы, отвечающие за неоднозначность разложения, сокращаются в итоговых формулах восполнения. Обобщенную развертку  $\mathcal{Y}^{(1,2)} \in \mathbb{C}^{N_{RX1} N_{TX} \times N_{sc} N_{RX2}}$  полного тензора по первой и второй размерностям можно найти как

$$\mathcal{Y}^{(1,2)} = \mathcal{Y}_2^{(1,2)} \cdot \left( \mathbf{C}_1^{(1)} (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{P}_3)^T \right)^\dagger \mathbf{C}_1^{(1)} (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{I}_K)^T. \quad (21)$$

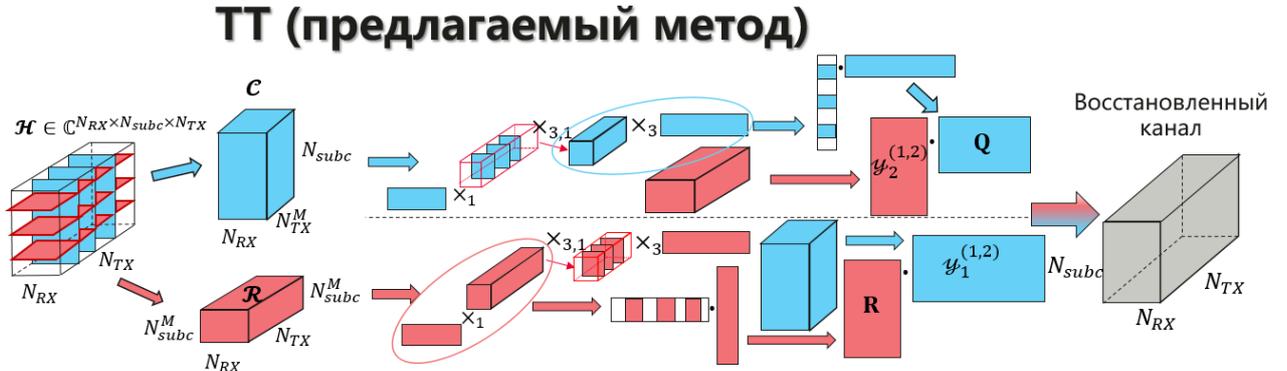


Рис. 4. Схема предлагаемого метода восполнения тензора, оцененного по слоям, с использованием представления ТТ (Tensor Train).

Аналогично выглядит формула восполнения, использующая развертку подтензора  $\mathcal{Y}_1$  и факторы разложения подтензора  $\mathcal{Y}_2$ :

$$\mathcal{Y}^{(1,2)} = (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}_2) (\mathcal{B}_2^{(3)})^T \left( (\mathbf{P}_2 \otimes \mathbf{A}_2) (\mathcal{B}_2^{(3)})^T \right)^\dagger \mathcal{Y}_1^{(1,2)}. \quad (22)$$

Вывод этих формул можно найти в работе [11] в приложении. Схему применения этого метода к оценке MIMO OFDM канала иллюстрирует Рис. 4. В этом случае исполняемый четырехмерный тензор имеет размеры  $\mathcal{H}_{4D} \in \mathbb{C}^{N_{RX1} \times N_{TX} \times N_{sc} \times N_{RX2}}$ ,

где  $N_{RX} = N_{RX1} N_{RX2}$ . Матрицу  $\mathbf{Q} = \left( \mathbf{C}_1^{(1)} (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{P}_3)^T \right)^\dagger \mathbf{C}_1^{(1)} (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{I}_K)^T$  в выражении (21) можно интерпретировать как матрицу некоторого интерполирующего оператора  $\mathcal{Q}: \mathbb{C}^{N_p N_{RX2}} \rightarrow \mathbb{C}^{N_{sc} N_{RX2}}$ , восстанавливающего недостающие элементы развертки  $\mathcal{Y}_2^{(1,2)}$ . Аналогично в уравнении (22) матрицу

$\mathbf{R} = (\mathbf{I}_M \otimes \mathbf{A}_2) (\mathbf{B}_2^{(3)})^T \left( (\mathbf{P}_2 \otimes \mathbf{A}_2) (\mathbf{B}_2^{(3)})^T \right)^\dagger$  можно интерпретировать как матрицу некоторого интерполирующего оператора  $\mathcal{P}: \mathbb{C}^{N_{RX1} N_{TX1}} \rightarrow \mathbb{C}^{N_{RX1} N_{TX}}$ , восстанавливающего недостающие строки  $\mathcal{Y}_1^{(1,2)}$ .

Из этих выражений как частный случай можно получить формулы для восстановления в формате Таккера [26], положив  $N_{RX} = N_{RX1}, N_{RX2} = 1, R_3 = 1$ . В таком случае фактор-матрица  $\mathbf{D} \in \mathbb{C}^{N_{RX2} \times R_3}$  вырождается в скаляр (число) и может быть отнесена к другому фактору разложения, тензор ядра  $\mathcal{C} \in \mathbb{C}^{R_2 \times N_{sc} \times R_3}$  вырождается в матрицу  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{R_2 \times N_{sc}}$  и выражение (21) принимает вид

$$\mathcal{X}^{(1,2)} = \mathcal{X}^{(3)} = \mathcal{X}_2^{(3)} \cdot (\mathbf{C}_1 \mathbf{P}_3^T)^\dagger \mathbf{C}_1. \quad (23)$$

Матрица  $\mathbf{Q}$  оператора интерполяции  $\mathcal{Q}: \mathbb{C}^{N_p} \rightarrow \mathbb{C}^{N_{sc}}$  в таком случае имеет вид

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{C}_1 \mathbf{P}_3^T)^\dagger \mathbf{C}_1. \quad (24)$$

### 3. Необходимые условия точного восстановления

Разумеется, точность восстановления тензора по формулам (21) и (23) сильно зависит от выбранных рангов модели, количества слоев и способа их выбора. Анализ этих связей мы проведем в два этапа. Сначала исследуем необходимые для точного восстановления условия в предположении, что выбранная тензорная модель абсолютно точно описывает исполняемый тензор. Отметим, что эти условия позволяют только качественно оценить влияние рангов и количества

слоев на точность восполнения по нескольким причинам. Во-первых, потому, что для повышения помехоустойчивости на практике имеет смысл использовать ранги, не дающие абсолютно точной аппроксимации тензора канала выбранной тензорной моделью. Из-за ненулевой ошибки аппроксимации ошибка восполнения не может быть нулевой даже при выполнении описанных ниже условий. Приведенные условия являются только необходимыми, но не достаточными. Во-вторых, при использовании стохастической модели канала ранги тензора канала могут меняться от реализации к реализации. При фиксированных параметрах алгоритма для одних реализаций условия могут быть выполнены, для других – нет. Анализ влияния ошибки аппроксимации полного тензора выбранной тензорной моделью на точность описанных алгоритмов восполнения представляется более сложной задачей и выходит за рамки данной работы. Исследование может быть продолжено в этом направлении совместно с добавлением алгоритмов адаптивного выбора ранга. На втором этапе для случая, когда тензорная модель не описывает тензор абсолютно точно, приведем некоторые теоремы из задачи о дискретизации ортогональной системы, позволяющие качественно понять характер зависимости. Для простоты изложения полагаем, что шум при оценке элементов тензора отсутствует. Анализ устойчивости предложенных алгоритмов к шуму является более сложной задачей и выходит за рамки данной работы. Будем исследовать тензоры MIMO OFDM  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N_{RX} \times N_{TX} \times N_{sc}}$  или  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N_{RX_1} \times N_{TX} \times N_{sc} \times N_{RX_2}}$ , где  $N_{RX_1} \cdot N_{RX_2} = N_{RX}$ .

Исследуем связь между числом слоев в предлагаемых алгоритмах восполнения и рангами выбранных тензорных моделей. Для простоты изложения начнем с восполнения в формате Таккера по формуле (23). Для вычисления правой псевдообратной матрицы к матрице  $\mathbf{Z} = \mathbf{C}_1 \mathbf{P}_3^T \in \mathbb{C}^{R_2 \times N_p}$  необходимо, чтобы  $\mathbf{Z}$  имела полный строчной ранг, т.е. чтобы

$$R_2 \leq N_p, \quad (25)$$

где  $N_p$  – число измеренных слоев вдоль размерности поднесущих. Кроме того, чтобы разложение подтензора  $\mathcal{X} \in \mathbb{C}^{N_{RX} \times N_{TX_1} \times N_{sc}}$  (где  $N_{TX_1}$  – количество антенн, использующих широкополосные слои) можно было вычислить с помощью алгоритма HOSVD [27], необходимо, чтобы

$$R_1 \leq \min(N_{RX_1}, N_{TX_1} N_{sc}),$$

$$R_2 \leq \min(R_1 N_{TX_1}, N_{sc}).$$

В рассматриваемых сценариях  $N_{sc} > N_{RX}$  и  $N_{sc} > R_1 N_p$ , поэтому:

$$R_1 \leq N_{RX}, \quad (26)$$

$$R_2 \leq R_{RX} N_{TX_1}. \quad (27)$$

Поясним физический смысл ограничения (25). В формуле (23) оператор интерполяции  $\mathcal{Q}: \mathbb{C}^{N_p} \rightarrow \mathbb{C}^{N_{sc}}$  действует на каждый столбец  $\mathcal{H}_2^{(3)} \in \mathbb{C}^{N_{TX} N_{RX} \times N_p}$  и восстанавливает по измерениям на пилотах полную частотную характеристику канала для всех пар антенн передатчика и приемника.  $R_2$  при этом описывает количество независимых компонент, которыми могут быть описаны все импульсные характеристики канала. В этом и проявляется преимущество тензорных методов над одномерной интерполяцией. Если в случае одномерной интерполяции минимальное количество пилотных поднесущих  $N_p$  ограничено рассеянием задержки (см. Рис. 1) и никак не учитывает пустые промежутки между соседними компонентами импульсной характеристики, то в случае восполнения тензора число пилотных поднесущих ограничено именно количеством независимых компонент всех импульсных характеристик и не зависит от длины промежутков между этими компонентами в пространстве задержек. Эти рассуждения иллюстрирует Рис. 5, где показана идеальная импульсная характеристика канала  $\mathbf{h}_\tau$ . Канал измеряется в частотной области пилотными поднесущими через каждые  $comb_{sc} = 24$  поднесущие. Такой большой шаг вызывает эффект наложения, импульсная характеристика  $\mathbf{h}_\tau^p$ , полученная с помощью ОДПФ измерений, не совпадает с истинной. Несмотря на эффект

наложения, интерполирующий оператор (24) дает хорошую оценку частотной  $\tilde{h}_f = \mathbf{h}^p \mathbf{Q}$  и импульсной  $\tilde{h}_\tau = \mathbf{h}^p \mathbf{Q} \mathbf{F}^H$  характеристик канала.

В случае выполнения в формате ТТ (21) размерность антенн приемника разлагается на множители как  $N_{RX} = N_{RX_1} N_{RX_2}$ . Аналогично (25) одно из ограничений связано со взятием правой псевдообратной матрицы от матрицы  $\mathbf{M} = \mathbf{C}_1^{(1)} (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{P}_3)^T \in \mathbb{C}^{R_2 \times N_p N_{RX_2}}$ . Для этого необходимо, чтобы  $\mathbf{M}$  имела полный строчной ранг, т.е. чтобы

$$R_2 \leq N_p N_{RX_2}. \quad (28)$$

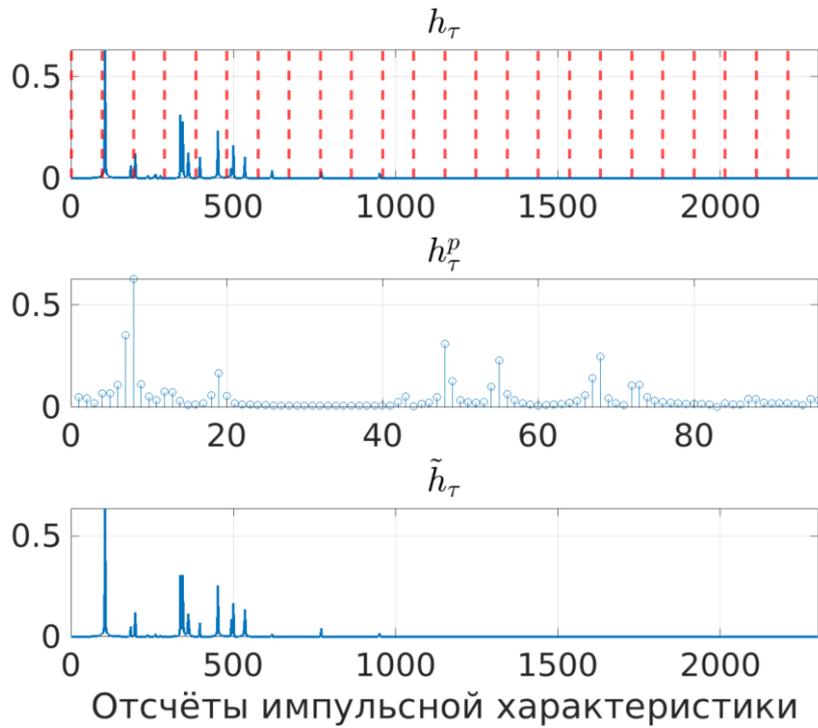


Рис. 5. Пример восстановления импульсной характеристики канала с помощью интерполирующего оператора (31) при периодических измерениях частотной характеристики, приводящих к эффекту наложения. Красными линиями на верхнем графике отмечены зоны Найквиста.

Чтобы с помощью алгоритма ТТ-SVD можно было вычислить разложение подтензора  $\mathcal{Y}_1 \in \mathbb{C}^{N_{RX_1} \times N_{TX_1} \times N_{sc} \times N_{RX_2}}$ , необходимо выполнение условий

$$R_1 \leq \min(N_{RX_1}, N_{TX_1} N_{sc} N_{RX_2}),$$

$$R_2 \leq \min(R_1 N_{TX_1}, N_{sc} N_{RX_2}),$$

$$R_3 \leq \min(R_2 N_{sc}, N_{RX_2}).$$

Учитывая, что в практических сценариях можно считать  $N_{TX_1} N_{sc} N_{RX_2} > N_{RX_1}$ ,  $N_{sc} N_{RX_2} > R_1 N_{TX_1}$ ,  $R_2 N_{sc} > N_{RX_2}$ , получаем

$$R_1 \leq N_{RX_1}, \quad (29)$$

$$R_2 \leq R_1 N_{TX_1}, \quad (30)$$

$$R_3 \leq N_{RX_2}. \quad (31)$$

Заметим, что условия (29)-(30) для выполнения ТТ совпадают с условиями (26)-(27) для выполнения тензора в формате Таккера. Условие (31) при этом не носит принципиального характера.

Основное отличие между алгоритмами выполнения для тензоров в формате Таккера и в формате ТТ иллюстрируют ограничения (25) и (28): в случае ТТ верхняя граница выше в  $N_{RX_2}$  раз. При этом ранги  $R_2$  Таккера ( $N_{RX_2} = 1$ ) и  $R_2$  ТТ различны. Однако, если при переходе к ТТ  $R_2$  растет медленнее, чем  $N_{RX_2}$ , то можно выполнять тензоры при меньшем количестве слоев, чем в случае Таккера. Как мы покажем далее, это условие выполняется для тензоров ММО OFDM канала. Каждая строка матрицы  $\mathcal{H}^{(1,2)} \in \mathbb{C}^{N_{RX_1} N_{TX} \times N_{RX_2} N_p}$  при этом состоит из сгруппированных по блокам измерений частотных характеристик канала, соответствующих различным  $N_{RX_2}$  антеннам приемника.

#### 4. Анализ влияния выбора слоев на точность выполнения

##### 4.1. Построение почти равноугольных гармонических жестких фреймов с помощью перестановочных полиномов

Так как по своей природе в базисе из столбцов матрицы ДПФ канал имеет разреженное представление (содержит много нулевых или близких к нулю элементов), то ключевое место при анализе выбора позиций для измерений канала занимают равноугольные гармонические жесткие фреймы и близкие к ним конструкции. Например, при нерегулярном расположении пилотных сигналов в одоантенной OFDM-системе с  $N$  поднесущими измерения на  $N_p$

пилотных поднесущих и идеальная импульсная характеристика связаны матрицей  $M = PF \in \mathbb{C}^{N_p \times N}$ , где  $F$  – матрица ДПФ, а  $P$  – матрица выбора строк, зависящая от расположения пилотов (см. [5]). Точность восстановления импульсной характеристики будет зависеть от свойств матрицы  $M$ .

Для фрейма как системы из  $N$  векторов  $m_i \in \mathbb{C}^{N_p}, i=1, \dots, N, N_p < N$  единичной нормы вводится понятие взаимной неортогональности (англ. mutual incoherence):

$$\mu = \max_{i \neq j} |m_i; m_j|, \quad (32)$$

где  $a; b$  обозначает скалярное произведение. Жесткий фрейм называется равноугольным, если  $m_i; m_j = c \forall i \neq j$ . При  $N_p > \sqrt{N}$  жесткий фрейм равноуголен тогда и только тогда, когда он достигает границы Велша [28]:

$$\mu \geq \mu_{WB} = \sqrt{\frac{N - N_p}{N_p(N - 1)}}. \quad (33)$$

Такие системы также характеризуются свойством ограниченной изометрии матрицы  $M = [m_1, m_2, \dots, m_N] \in \mathbb{C}^{N_p \times N}$ . Говорят, что матрица  $M$  удовлетворяет свойству ограниченной изометрии порядка  $m$ , если существует константа  $0 < \delta_m < 1$  такая, что неравенство

$$(1 - \delta_m) x_{mF}^2 \leq \sqrt{\frac{N}{N_p}} M x_{mF}^2 \leq (1 + \delta_m) x_{mF}^2. \quad (34)$$

Выполнено для всех векторов  $x$  с  $m$  ненулевыми элементами. При этом если столбцы матрицы  $M$  имеют одинаковую норму, то

$$\delta_m \leq (m - 1) \mu_{WB} \leq (m - 1) \mu.$$

Чем меньше  $\mu$  или  $\delta_m$ , тем «лучше» матрица  $M$  с точки зрения дальнейшего восстановления сигналов [29].

Фреймы называются гармоническими, если матрица  $M$  содержит только строки ДПФ матрицы размера  $N \times N$ . При этом для задания гармонического фрейма достаточно указать индексы строк соответствующей ДПФ матрицы.

Гармонические фреймы достигают границы Велша (являются равноугольными), если набор индексов строк ДПФ-матрицы образует циклическое разностное множество. Несмотря на оптимальность циклических разностных множеств, они существуют для весьма ограниченного числа пар  $(N, N_p)$  [30]. В контексте данной статьи параметры  $(N, N_p)$  соответствуют количеству поднесущих и пилотов. Поэтому логично рассмотреть конструкции, не достигающие границы (33) в точности, но доступные для большего числа значений  $(N, N_p)$ .

Например, в работе [31] было показано, что если строки ДПФ-матрицы выбираются с помощью полинома:

$$\pi(i) = (a_d i^d + a_{d-1} i^{d-1} + \dots + a_1 i) \bmod N, \quad i = 0, \dots, N_p - 1, \quad (35)$$

то получаемые таким образом матрицы  $M$  обладают «хорошей» константой ограниченной изометрии. Такие свойства следуют из результатов теории чисел по оценке тригонометрических сумм (более конкретно, сумм Вейля). Например, в книге [32] для полиномов степени  $d > 2$  приводятся оценки с использованием рационального приближения старшего коэффициента  $a_d = \frac{\alpha}{q} + \frac{\theta}{q^2}, |\theta| < 1,$

$\text{НОД}(a, q) = 1$ . Для любого натурального  $P: P \leq q \leq P^{d-1}$  справедлива [32] оценка

$$\frac{1}{P} \left| \sum_{x=1}^P e^{2\pi j \cdot \pi(x)} \right| \leq e^{3d} P^{\frac{-1}{9d^2 \log(d)}}. \quad (36)$$

Аналогичная оценка для полиномов степени  $d \geq 2$  имеет более сложный вид и по этой причине здесь не приводится.

В работе [31] отображение (35) не было биективным, возможные повторения в явном виде учитывались при анализе. Это неудобно с практической точки зрения, так как означает, что количество используемых поднесущих не контролируется. Использование же других типов псевдослучайных последовательностей не позволит эффективно использовать частотные ресурсы нескольким передающим устройствам. При задании расположения слоев по поднесущим (выделены красным на Рис. 4) оставшиеся поднесущие в целях

экономии ресурсов необходимо использовать для оценки аналогичных слоев, принадлежащих другим передающим устройствам. В этом смысле задание расположения слоев, например, с помощью последовательности Соболя [33], возможно только для одного пользовательского устройства. При задании расположения слоев другого пользовательского устройства с помощью такой же (возможно, циклически сдвинутой) последовательности у двух пользовательских устройств возникнут слои, использующие одни и те же поднесущие. Это приведет к практическим проблемам при реализации, обсуждение которых мы приведем во второй части статьи.

В качестве решения описанной проблемы мы предлагаем наложить на коэффициенты полинома (35) условия, гарантирующие биективность. Для полиномов второй и третьей степени такие условия [34] зависят от разложения  $N$  на простые множители:

$$N = p_1^{n_{p1}} p_2^{n_{p2}} \cdot \dots \cdot p_T^{n_{pT}}.$$

В частности, для полиномов второй степени необходимо и достаточно [5], чтобы

$$a_1 \neq 0 \pmod{p_t} \quad \forall t = 1, \dots, T, \quad (37)$$

$$a_2 = 0 \pmod{p_t} \quad \forall t = 1, \dots, T. \quad (38)$$

Из (36) следует, что лучший с точки зрения взаимной неортогональности  $\mu$  старший коэффициент, гарантирующий биективность – это

$$a_2 = p_1 \cdot \dots \cdot p_T. \quad (39)$$

## 4.2. Связь с задачей выбора столбцов матрицы с ортогональными строками

Заметим, что в случае восполнения тензора в формате Таккера (24) действие интерполирующего оператора можно разбить на две части  $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 \mathbf{Q}_2$ : преобразование из подпространства пилотных поднесущих  $\mathbb{C}^{N_p} \subset \mathbb{C}^{N_{sc}}$  в подпространство собственных векторов с помощью матрицы

$$\mathbf{Q}_1 = (\mathbf{C}_1 \mathbf{P}_3^T)^\dagger \in \mathbb{C}^{N_p \times R_2} \quad (40)$$

и преобразование из подпространства собственных векторов в пространство всех доступных поднесущих  $\mathbb{C}^{N_{sc}}$ :

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{C}_1.$$

Так как  $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{C}^{R_2 \times N_{sc}}$  состоит из собственных векторов матрицы  $\mathcal{H}_1^{(3)} \in \mathbb{C}^{N_{RX} N_{TX_1} \times N_{sc}}$ , являющейся подматрицей развертки полного тензора  $\mathcal{H}^{(3)} \in \mathbb{C}^{N_{RX} N_{TX} \times N_{sc}}$ , то количество «широкополосных» слоев  $N_{TX_1}$  влияет на качество оценки собственных векторов. Для простоты изложения этот эффект будет исследоваться только экспериментально в разделе 5.2, здесь же предположим, что собственные вектора оценены идеально.

При таком предположении влияние на точность «интерполяции» оказывает матрица  $\mathbf{P}_3 \in \mathbb{C}^{N_p \times N_{sc}}$  в уравнении (40). Матрица  $\mathbf{P}_3$  состоит из строк единичной матрицы размера  $N_{sc} \times N_{sc}$ , причем содержит только строки, соответствующие  $\mathcal{J}_r$  – индексам расположения  $N_p < N_{sc}$  частотных слоев (выделены красным на Рис. 4). Подражая нотации пакета программ MatLab, эту матрицу можно записать как  $\mathbf{P}_3 = \mathbf{I}_{N_{sc}}(\mathcal{J}_r, :)$ . Домножение произвольной матрицы  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{N_{sc} \times L}$  слева на матрицу  $\mathbf{P}_3$  эквивалентно выбору  $N_p$  строк матрицы  $\mathbf{X}$ , соответствующих индексам  $\mathcal{J}_r$ . Матрица  $\mathbf{P}_3^T \in \mathbb{C}^{N_{sc} \times N_p}$  в выражении (40) представляет собой столбцы единичной матрицы, также соответствующие индексам из  $\mathcal{J}_r$ :  $\mathbf{P}_3^T = \mathbf{I}_{N_{sc}}(:, \mathcal{J}_r)$ . Домножение произвольной матрицы  $\mathbf{X} \in \mathbb{C}^{L \times N_{sc}}$  справа на матрицу  $\mathbf{P}_3^T$  означает выбор  $N_p$  столбцов матрицы  $\mathbf{X}$ , соответствующих индексам  $\mathcal{J}_r$ . Заметим теперь, что матрица  $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{C}^{R_2 \times N_{sc}}$  по построению состоит из ортогональных строк, так как была получена в результате сингулярного разложения как части алгоритма HOSVD.  $\mathbf{C}_1 \mathbf{P}_3^T$  в данном случае означает выбор  $N_p$  из  $N_{sc}$  столбцов матрицы с ортогональными строками.

Впервые эта проблема была затронута в работе [35] Кашиным и Цаффрири для действительных матриц со столбцами одинаковой нормы. Несколько

позднее в работе [36] оценка была уточнена для столбцов ограниченной нормы. В частности, показано, что если нормы столбцов матрицы  $C_1$  ограничены как

$$\sqrt{\frac{N_{sc}}{R_2}} C_1(:, j)_F \leq t,$$

то  $\forall \varepsilon > 0 \exists$  набор индексов  $I \subset \{1, \dots, N_{sc}\}$ :

$$|I| \leq C \cdot \frac{t^2}{\varepsilon^2} \cdot R_2 \cdot \log\left(\frac{R_2 t^2}{\varepsilon^2}\right) \quad (41)$$

и  $\forall \mathbf{x}$  выполнено

$$(1 - \varepsilon) \cdot \mathbf{x} \leq \sqrt{\frac{N_{sc}}{|I|}} \cdot P_3 C_1^T \mathbf{x} \leq (1 + \varepsilon) \cdot \mathbf{x}, \quad (42)$$

где  $|I| = N_p$  – количество столбцов (мощность  $I$ ). Из (42) следует

$$I - \frac{N_{sc}}{N_p} C_1 P_3^T P_3 C_1^T \leq K \cdot \varepsilon, \quad (43)$$

т.е. столбцы матрицы  $C_1$  остаются близкими к ортогональным. Стоит отметить, однако, что работа [36] не содержит конструктивного алгоритма или правила выбора индексов таких столбцов. Адаптивные алгоритмы, обеспечивающие выбор «хорошего» в смысле (42) набора столбцов предлагались в работах [37] и [38]. В контексте задачи оценки MIMO OFDM канала результаты этих работ не применимы, так как предложенные в них алгоритмы предполагают доступ ко всем элементам матрицы  $C_1$  или полагают известными нормы столбцов матрицы  $C_1$ . Тем не менее, на практике случайный выбор столбцов [39] дает может и не удовлетворяющие (41), но приемлемые результаты. В контексте оценки канала случайный выбор столбцов не удобен с практической точки зрения, так как подразумевает наличие синхронизированных генераторов случайных чисел на сторонах приемника и передатчика. В случае же предвычисленных таблиц индексов при таком подходе придется тратить много памяти для хранения и много ресурсов служебных каналов для передачи индексов в таблице.

Мы предлагаем перемежать слои вдоль антенн передатчика (красные на Рис. 4) с помощью квадратичного полинома с коэффициентами,

удовлетворяющими правилам (37) и (39). Связь с гармоническими фреймами можно установить, если рассмотреть представление  $C_1^T \in \mathbb{C}^{N_{sc} \times R_2}$  в виде  $C_1^T = F\tilde{C}$ , где  $F \in \mathbb{C}^{N_{sc} \times N_{sc}}$  – матрица ДПФ. Каждый столбец  $C_1^T$  по построению содержит линейную комбинацию частотных характеристик канала  $h_f$ . Каждая из частотных характеристик в базисе ДПФ имеет  $m$ -разреженное представление (содержит только  $m \ll N_{sc}$  ненулевых элементов). Более того, для импульсных характеристик всех пар антенн приемника и передатчика можно выделить общий носитель  $S = \text{supp}(h_\tau)$  (множество, содержащие индексы ненулевых элементов). Заметим теперь, что линейная комбинация столбцов  $h_f$  может изменить значения компонент, соответствующих  $S$ , но не может изменить самого носителя  $S$ . По этой причине носитель каждого из столбцов матрицы  $\tilde{C} \in \mathbb{C}^{N_{sc} \times R_2}$  будет совпадать с  $S$ . Домножение же матрицы  $\tilde{C}$  справа на произвольный вектор  $x \in \mathbb{C}^{R_2 \times 1}$  означает взятие линейной комбинации столбцов  $\tilde{C}$  и также не может изменить носитель  $x_m = \tilde{C}x$ , т.е. вектор  $x_m$  остается  $m$ -разреженным.

Представляя в выражении (34)  $M = P_3 F$ , получим

$$(1 - \delta_m) x_{mF}^2 \leq \sqrt{\frac{N}{N_p}} P_3 F x_{mF}^2 \leq (1 + \delta_m) x_{mF}^2.$$

Ограничиваясь  $m$ -разреженными векторами вида  $x_m = \tilde{C}x$ , получим:

$$(1 - \delta_m) x_{mF}^2 \leq \sqrt{\frac{N}{N_p}} P_3 F \tilde{C} x_F^2 \leq (1 + \delta_m) x_{mF}^2,$$

Откуда, наконец, приходим к

$$(1 - \delta_m) x_{mF}^2 \leq \sqrt{\frac{N}{N_p}} P_3 C_1^T x_F^2 \leq (1 + \delta_m) x_{mF}^2, \quad (44)$$

что аналогично (42) гарантирует близость строк  $C_1 P_3^T$  к ортогональным.

Подобные рассуждения справедливы для ТТ и интерполяции матрицей  $\mathbf{Q} = \left( \mathbf{C}_1^{(1)} (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{P}_3)^T \right)^\dagger \mathbf{C}_1^{(1)} (\mathbf{D}_1 \times \mathbf{I}_K)^T \in \mathbb{C}^{N_{RX1} N_{TX} \times N_p N_{RX2}}$ , только в этом случае происходит выбор  $N_p$  столбцов в каждом из  $N_{RX2}$  блоков длины  $N_{sc}$ .

В заключение отметим, что взаимная неортогональность  $\mu$  также ограничивает собственные числа матрицы  $\mathbf{P}\mathbf{C}_1^T$  как

$$1 - (s-1)\mu \leq \lambda_{min} \leq \lambda_{max} \leq 1 + (s-1)\mu,$$

а поэтому уменьшение  $\mu$  также приводит к уменьшению числа обусловленности

$\kappa = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$  и, следовательно, повышает устойчивость решения к шуму.

## 5. Результаты

Предложенные методы оценки канала содержат большое количество гиперпараметров, которые нужно задать при итоговом сравнении точности восстановления канала. К числу таких гиперпараметров относятся ранги тензорной модели и количество слоев по двум размерностям. Их аналитическое нахождение крайне затруднительно и не является целью данной работы. Однако вполне возможно дать качественные рекомендации и оценить возможности уменьшения затрат частотно-временных ресурсов на оценку канала.

Изложение этого раздела построено следующим образом: в подразделе 5.1 экспериментально сравнивается эффективность представления канала различными тензорными моделями, даются качественные рекомендации по выбору рангов тензорных моделей, а также исследуется влияние пережевания слоев на число обусловленности матриц, обращаемых в методах (21) и (23). На основе выбранных рангов в подразделе 5.2 исследуется влияние количества измеренных слоев по каждой из размерности при наложении АБГШ на весь тензор с небольшим ОСШ = 30 дБ.

При численном моделировании используется платформа QuaDRiGa [40] и модель канала 3GPP 38.901 UMa NLoS (отсутствие прямой видимости между передатчиком и приемником). Размер антенной решетки базовой станции

$N_{BS} = 16 \cdot 16 = 256$  антенных элементов, размер антенной решетки пользовательского устройства  $N_{UE} = 4 \cdot 8 = 32$  антенных элемента. Используется  $N_{sc} = 2304$  поднесущих с расстоянием между ними  $SCS = 30$  кГц, тем самым общая полоса сигнала составляет  $B = N_{sc} \cdot SCS = 69.12$  МГц. Частота несущей составляет  $f_c = 12$  ГГц. Оценка производится в восходящем канале, то есть передатчиком выступает пользовательское устройство ( $N_{TX} \equiv N_{UE}$ ), приемником – базовая станция ( $N_{RX} \equiv N_{BS}$ ). Предложенные методы, тем не менее, могут применяться и в нисходящем канале. Помимо спектральной эффективности, основной метрикой выступает нормированная средняя ошибка

$$NME = \frac{\mathcal{H} - \hat{\mathcal{H}}_F}{\mathcal{H}_F}, \quad (45)$$

где  $\mathcal{H}$  – идеальный тензор,  $\hat{\mathcal{H}}$  – оценка или малоранговая аппроксимация  $\mathcal{H}$ .

### 5.1. Сравнение эффективности тензорных представлений и выбор рангов

Главными гиперпараметрами предлагаемых методов являются ранги тензорных моделей, аппроксимирующих тензоры канала  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N_{BS} \times N_{UE} \times N_{sc}}$ . При использовании метода (23) – это два ранга  $R_1$  и  $R_2$  в разложении Таккера:

$$\mathcal{H} = \mathcal{G} \times_1 \mathbf{A} \times_3 \mathbf{C},$$

где  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{R_1 \times N_{BS}}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{C}^{R_2 \times N_{sc}}$ ,  $\mathcal{G} \in \mathbb{C}^{R_1 \times N_{UE} \times R_2}$ . В случае использования метода (21) – это три ранга  $(R_1, R_2, R_3)$  разложения тензора  $\mathcal{Y} \in \mathbb{C}^{N_{BS}^x \times N_{UE} \times N_{sc} \times N_{BS}^y}$  в формат ТТ (17).

В случае канонического разложения тензора (12) необходимо выбрать только один (канонический) ранг  $R$ .

В случае ТТ или разложения Таккера мы будем использовать алгоритмы разложения, основанные на сингулярном разложении (HOSVD и ТТ-SVD соответственно). На  $k$ -том шаге этих алгоритмов можно рассмотреть полное сингулярное разложение некоторой развертки

$$\mathcal{H}^{(k)} = \mathbf{U}_k \mathbf{\Sigma}_k \mathbf{V}_k^H = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{U}}_k & \tilde{\mathbf{U}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Sigma}}_k & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{\Sigma}}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{V}}_k^H \\ \tilde{\mathbf{V}}_k^H \end{bmatrix}, \quad (46)$$

где  $\bar{\Sigma}_k$  – диагональная матрица, содержащая первые  $R_k$  сингулярных чисел.

На основе (46) вычисляется  $R_k$ -ранговое приближение:

$$\bar{\mathcal{H}}^{(k)} = \bar{U}_k \bar{\Sigma}_k \bar{V}_k^H,$$

причем ошибка аппроксимации определяется отброшенными сингулярными числами:

$$\mathcal{H}^{(k)} - \bar{\mathcal{H}}_F^{(k)2} = \tilde{\Sigma}_F^2 = \sigma_{R_{k+1}}^2 + \dots + \sigma_{R_{max}}^2.$$

Ошибка аппроксимации всего тензора ограничена сверху как:

$$\frac{\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}_F^2}{\mathcal{H}_F^2} \leq \frac{\tilde{\Sigma}_F^2}{\Sigma_{1F}^2} + \frac{\tilde{\Sigma}_E^2}{\Sigma_{2F}^2} + \dots + \frac{\tilde{\Sigma}_\#^2}{\Sigma_{dF}^2},$$

где  $d$  – количество шагов разложения ( $d=2$  для Таккера,  $d=3$  для ТТ).

Для нормированной средней ошибки аппроксимации получаем

$$NME = \frac{\mathcal{H} - \bar{\mathcal{H}}_F}{\mathcal{H}_F} \leq \frac{\tilde{\Sigma}_F}{\Sigma_{1F}} + \frac{\tilde{\Sigma}_E}{\Sigma_{2F}} + \dots + \frac{\tilde{\Sigma}_\#}{\Sigma_{dF}}.$$

Для определения рангов изучим распределение нормированной средней ошибки малоранговой аппроксимации  $\tilde{\Sigma}_F / \Sigma_{kF}$  на каждом этапе разложения. В случае разложения Таккера соответствующие распределения иллюстрирует Рис. 6. Черная линия соответствует общей ошибке аппроксимации  $NME_{MAX} = 0.1$ , красная линия – ошибке  $NME_{MAX} = 0.01$ . Наибольшее уменьшение числа параметров достигается вдоль размерности поднесущих: при общем количестве поднесущих  $N_{sc} = 2304$  для описания с ошибкой не более  $NME_{MAX} = 0.01$  достаточно  $R_2 = 45$ .

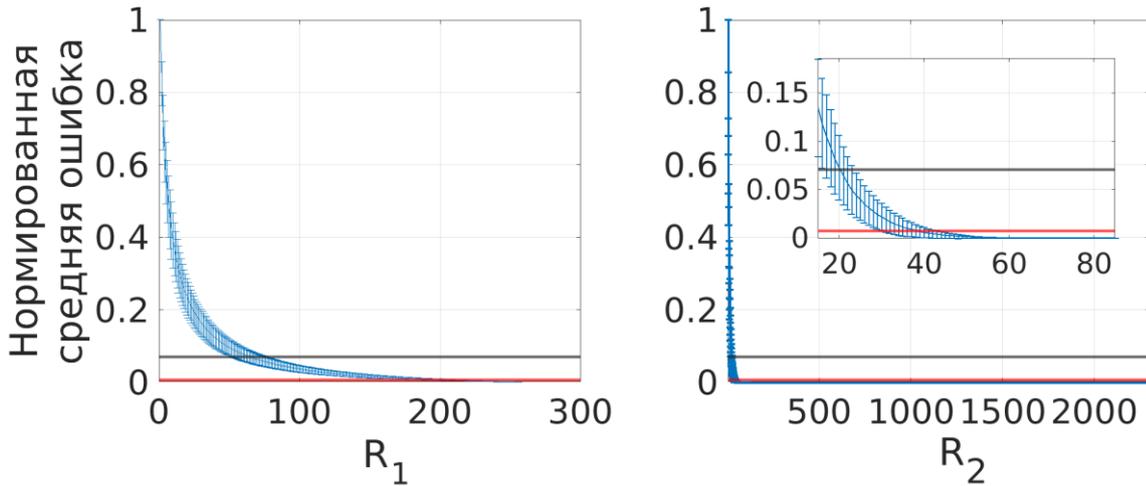


Рис. 6. Зависимость ошибки малоранговой аппроксимации на каждом шаге разложения Таккера от ранга.  $R_1$  – ранг вдоль размерности антенн приёмника (базовой станции),  $R_2$  – ранг вдоль размерности поднесущих.

Исследуем теперь, как меняется ошибка аппроксимации на каждом шаге ТТ-SVD при переходе от разложения Таккера к ТТ разложению. Переход будем осуществлять факторизацией размерности  $N_{BS} = N_{BS_1} N_{BS_2}$  и переупорядочиванием трехмерного тензора  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N_{BS} \times N_{UE} \times N_{sc}}$  в четырехмерный  $\mathcal{H}_{4D} \in \mathbb{C}^{N_{BS_1} \times N_{UE} \times N_{sc} \times N_{BS_2}}$ , постепенно увеличивая  $N_{BS_2}$ . Результаты численного эксперимента представлены на Рис. 7. При увеличении  $N_{BS_2}$  и уменьшении  $N_{BS_1}$  возрастает  $R_2$ , соответствующий совмещенной размерности поднесущих и части антенн приемника (базовой станции). При этом также уменьшается возможность сжатия вдоль первой размерности  $N_{BS_1}$ .

Рассмотрим две стратегии выбора рангов – при первой стратегии ранги выбираются так, чтобы гарантировать ошибку аппроксимации не выше  $NME_{MAX} = 0.1$  (малые ранги), во втором случае ранги выбираются так, чтобы ошибка аппроксимации не превышала  $NME_{MAX} = 0.01$  (высокие ранги). Прямые, соответствующие этим ограничениям, представлены на Рис. 7 в предположении одинаковой ошибки на первом и втором шаге и нулевой ошибки на третьем шаге (черная прямая соответствует малым рангам, красная – высоким). Ранги, соответствующие таким ошибкам аппроксимации, представлены в таблице 1.

Основные особенности выбора рангов на примере разложения Таккера иллюстрирует Рис. 8. На Рис. 8 приведена оценка функции распределения ошибки выполнения тензора по расположенным слоям с  $comb_{TX} = 2$  и  $comb_{sc} = 24$ . При выполнении по периодически расположенным слоям успешное выполнение тензора возможно только для половины реализаций канала при выборе как больших, так и малых рангов. Псевдослучайная перестановка слоев с помощью полинома (35) существенно улучшает ситуацию: в этом случае успешное выполнение происходит для всех реализаций канала.

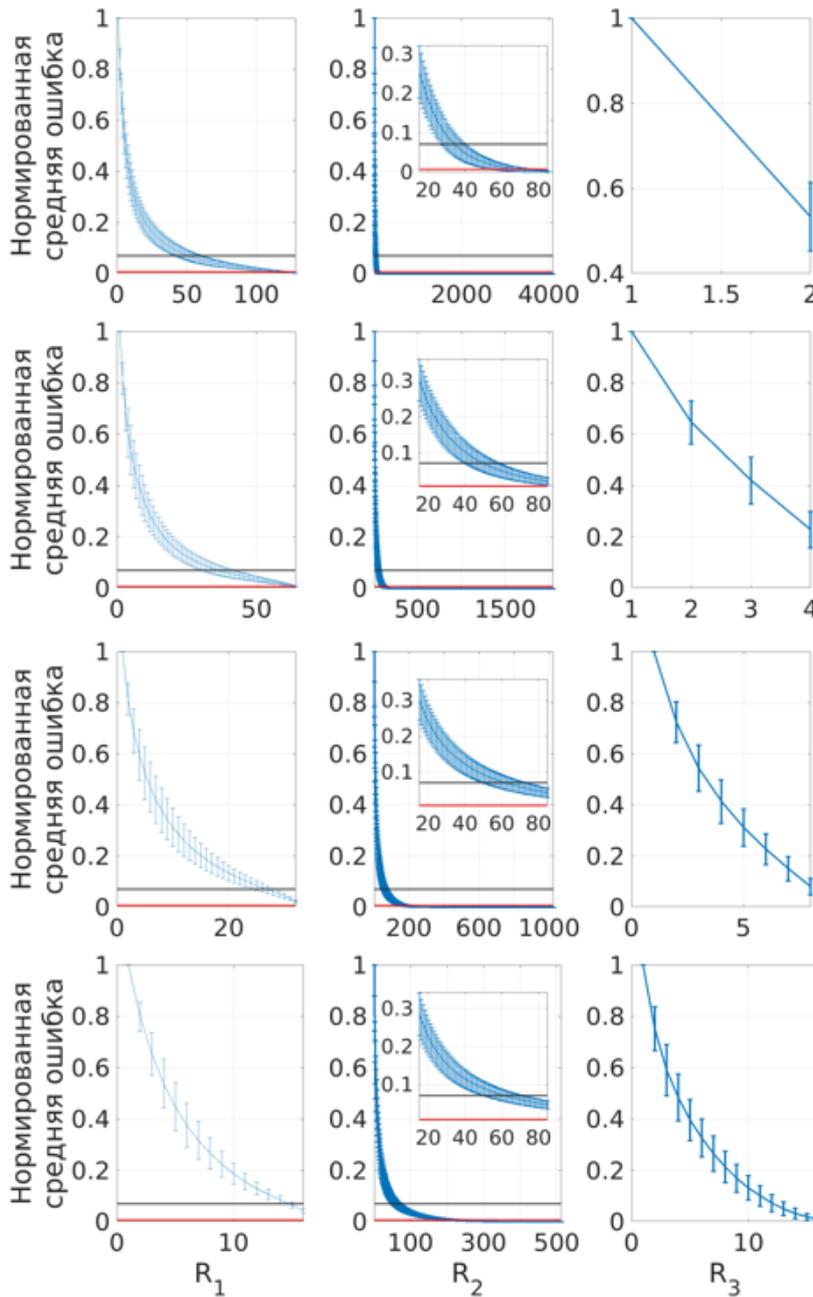


Рис. 7. Распределение ошибок аппроксимации на каждом шаге алгоритма ТТ-SVD. Четвёртая размерность (сверху вниз по графикам):  $N_{BS_2} = 2, 4, 8, 16$ .

Таблица 1. Ранги ТТ.

NME	256x1	128x2	64x4	32x8	16x16
0.1	$R_1 = 85$	$R_1 = 67$	$R_1 = 42$	$R_1 = 26$	$R_1 = 16$
	$R_2 = 25$	$R_2 = 43$	$R_2 = 63$	$R_2 = 70$	$R_2 = 75$
0.01	$R_1 = 200$	$R_1 = 117$	$R_1 = 62$	$R_1 = 32$	$R_1 = 16$
	$R_2 = 45$	$R_2 = 82$	$R_2 = 138$	$R_2 = 211$	$R_2 = 260$

Отметим, однако, что в случае отсутствия шума точность выполнения при выборе больших рангов существенно превосходит точность выполнения при выборе малых рангов (примерно в 10 раз). Ситуация, однако, меняется, если выполнение происходит по зашумленным слоям. Как показывает Рис. 8, при наложении на весь тензор АБГШ с ОСШ 10 дБ, средняя нормированная ошибка (45) выполнения возрастает в среднем до 0.28. В случае же малых рангов ошибка выполнения увеличивается с 0.05 до 0.2.

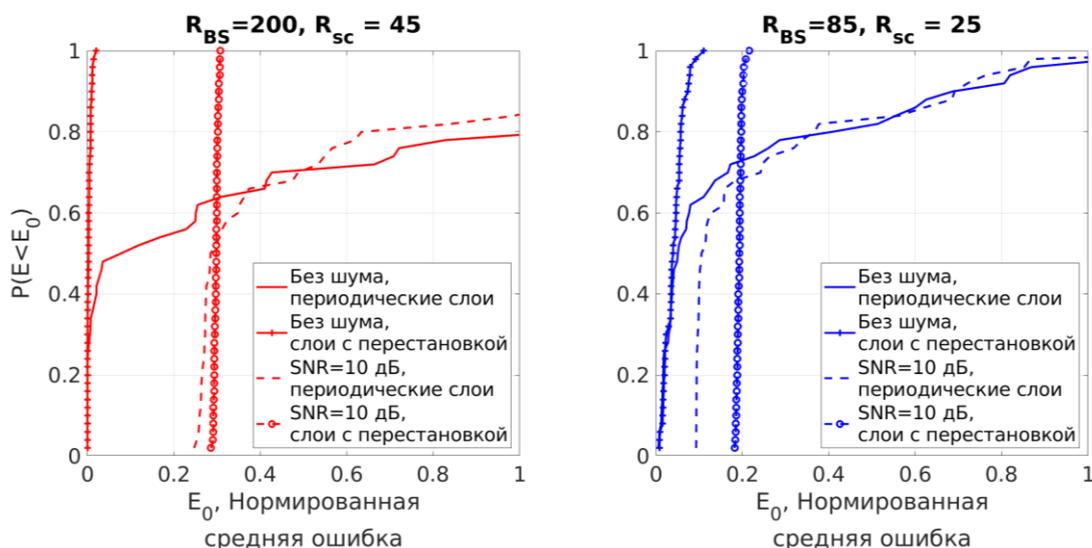


Рис. 8. Влияние псевдослучайного перемежения на распределение нормированной средней ошибки при выполнении.

Таким образом, при выборе рангов приходится искать компромисс: при слишком низких рангах выполнение дает высокую ошибку при высоких ОСШ, однако устойчиво к шуму. При высоких рангах получается низкая ошибка выполнения при высоких ОСШ, но значительно увеличивается чувствительность к шуму. Ранги тензоров можно подбирать адаптивно в

зависимости от свойств тензора и текущего ОСШ, однако исследование подобных алгоритмов находится за рамками данной работы. В нашем исследовании мы ограничимся выбором рангов из таблицы 1, гарантирующим ошибку аппроксимации не выше 0.1.

Исследуем теперь эффективность приближения тензора канала  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N_{BS} \times N_{UE} \times N_{sc}}$  канонической моделью тензора. Каноническое разложение будем вычислять с помощью функции `cpd` пакета программ «Tensorlab» [41], включающей в себя снижение размерности с помощью HOSVD, инициализацию с помощью обобщенного спектрального разложения и решение нелинейной задачи наименьших квадратов с совмещенного алгоритма Гаусса-Ньютона и градиентного спуска с явной доверительной областью. Канонические ранги, использованные при моделировании, представлены в таблице 2.

Таблица 2. Канонические ранги для анализа эффективности аппроксимации.

№	1	2	3	4	5	6
$R$	2	10	20	32	48	64

Так как каноническое разложение имеет только один гиперпараметр – канонический ранг  $R$ . – то вместо него для корректности сравнения с другими моделями будем рассматривать достигаемую степень сжатия  $CR = \frac{P}{N_{total}}$ , определяемую как отношение числа элементов тензорной модели  $P$  к общему числу элементов тензора  $N_{total} = N_{BS} N_{UE} N_{sc}$ . Для канонического разложения

$$P = (N_{BS} + N_{UE} + N_{sc})R$$

Так как широкополосная модель может не соответствовать в точности каноническому формату тензора, для сравнения рассмотрим также разбиение тензора на  $N_{SB}$  подполос согласно (15) с применением канонического разложения к каждому из получившихся подтензоров. Будем рассматривать  $N_{SB} = 1, 4, 16, 32$ , т.к. при больших значениях  $N_{SB}$  размерность поднесущих каждого подтензора может оказаться меньше ранга  $R$ , что усложнит задачу

нахождения разложения. Количество параметров в этом случае определяется выражением

$$P = \left( N_{BS} + N_{UE} + \frac{N_{sc}}{N_{SB}} \right) N_{SB} R.$$

Для сравнения эффективности представления тензора канала будем также менять  $R_1$  и  $R_2$  в модели Таккера и ТТ относительно значений из таблицы 1.

Количество параметров в этом случае определяется выражением

$$P = N_{BS_x} R_1 + R_1 N_{UE} R_2 + R_2 N_{sc} R_3 + R_3 N_{BS_y},$$

где для модели Таккера  $N_{BS_y} = 0, R_3 = 1$ .

Экспериментальная зависимость средней нормированной ошибки от степени сжатия представлена на Рис. 9. Как следует из результатов численных экспериментов, каноническое разложение всего тензора ( $N_{SB} = 1$ ) позволяет получить хорошее грубое приближение, однако при увеличении ранга добиться такой же точности, как в случае ТТ или Таккера, затруднительно. Разбиение на подтензоры по частоте (15) позволяет добиться улучшения точности, однако по мере увеличения  $N_{SB}$  растёт также и число параметров модели. При  $N_{SB} = 16$  кривая для канонического разложения практически совпадает с кривой ТТ  $64 \times 4$  при  $NME < 0.15$ . При увеличении параметра  $N_{BS_2}$  и переходе к моделям ТТ  $32 \times 8$  и  $16 \times 16$  число параметров увеличивается в несколько раз и такие модели становятся менее эффективными, чем каноническое разложение с  $N_{SB} = 32$ . В то же время при уменьшении  $N_{BS_2}$  и переходе к модели Таккера число параметров уменьшается без увеличения ошибки аппроксимации. По результатам экспериментов модель Таккера представляется наиболее эффективной с точки зрения баланса между ошибкой аппроксимации и компактностью представления тензора канала. Стоит отдельно отметить, что результаты для канонической модели, возможно, могут быть улучшены за счет

использования более точных алгоритмов разложения, однако этот вопрос выходит за рамки данной работы.

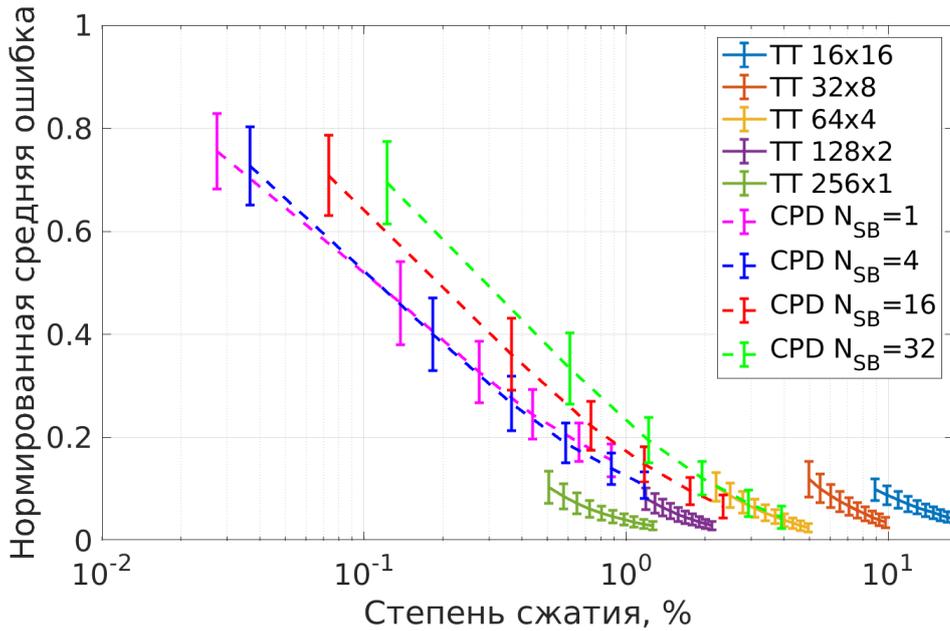


Рис. 9. Сравнение эффективности аппроксимации тензора канала различными тензорными форматами.

### 5.2. Влияние числа слоев на точность восполнения

Исследуем теперь влияние количества слоев по размерности антенн передатчика (пользовательского устройства) и размерности поднесущих на точность восполнения в отсутствие шума. В случае периодического расположения слоев их положение характеризуется шагом  $comb_{TX}$  или  $comb_{sc}$ . В случае псевдослучайного расположения слоев по поднесущим с помощью квадратичного перестановочного полинома (35) (quadratic permutation polynomial, QPP) под  $comb_{sc}$  понимается эквивалентный период расположения слоев, равный отношению числа поднесущих к числу таких слоев:  $comb_{sc} = N_{sc}/N_p$ . В случае восполнения канонического тензора с разбиением на подполосы (15) параметр  $N_{SB}$  выбирался равным 18 с тем, чтобы при наибольшем рассматриваемом периоде  $comb_{sc} = 128$  при регулярном расположении слоев в каждом подтензоре содержался один измеренный слой по поднесущим. При нерегулярном расположении слоев и значениях  $48 < comb_{sc} \leq 128$  гарантировать наличие хотя бы одного слоя в каждом

подтензоре затруднительно. При возникновении таких ситуаций восполнение признавалось неудачным и нормированная ошибка восполнения приравнивалась к единице.

Результаты восполнения при представлении всего тензора в каноническом формате демонстрирует Рис. 10. Точность восполнения слабо меняется с увеличением  $comb_{sc}$ . Псевдослучайное перемежение слоев приводит к незначительному повышению точности только при  $comb_{sc} \geq 96$ . В то же время даже при  $comb_{Tx} = 2$  ошибка восполнения остается высокой (выше 0.2), что связано с высокой ошибкой приближения тензора канонической моделью и влиянием ошибки аппроксимации на работу самого алгоритма.

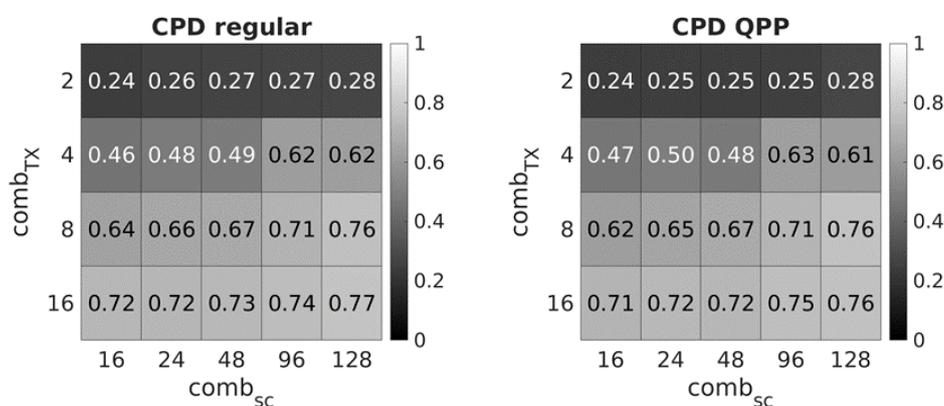


Рис. 10. Зависимость средней нормированной ошибки (50) восполнения канонического тензора (11) от числа слоёв в случае их периодического (regular) и псевдослучайного расположения.

Аналогичные результаты при разбиении тензора на подтензоры малой полосы (15) представлены на Рис. 11. На Рис. 11 в случае нерегулярного расположения слоев также представлена зависимость числа подтензоров (15), на которые не приходится ни одного измеренного частотного слоя (выделены красным на Рис. 4), от параметра  $comb_{sc}$ . При задании расположения слоев случайным образом в среднем хотя бы один такой подтензор находится уже для  $comb_{sc} = 48$ . При задании расположения слоев с помощью квадратичного перестановочного полинома (QPP) такие подтензоры возникают только при  $comb_{sc} \geq 96$ . Высокая ошибка восполнения при  $comb_{sc} \geq 48$  как раз объясняется чрезвычайно малым количеством измеренных частотных слоев в подтензорах.

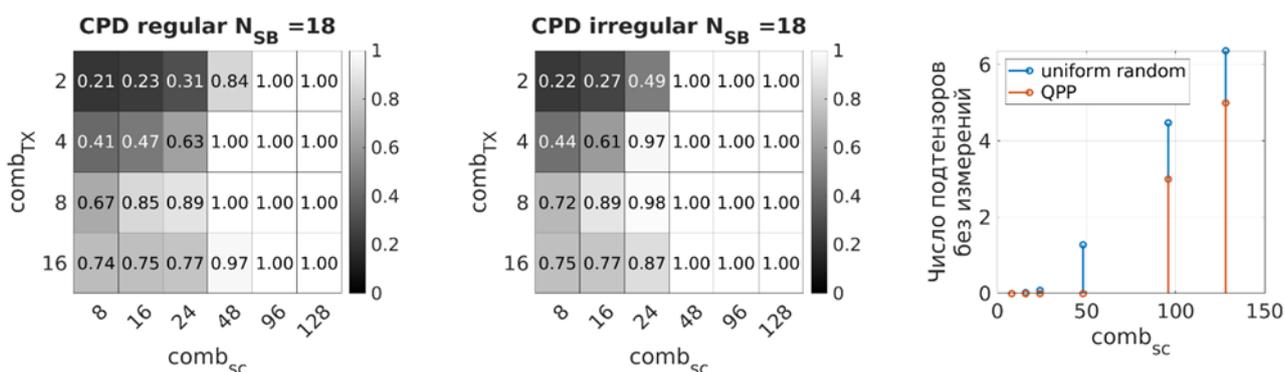


Рис. 11. Восполнение в каноническом формате при разбиении полосы на подполосы (15). Слева и по центру – ошибка восполнения (50) при регулярном и нерегулярном расположении частотных слоёв. Справа – среднее количество подтензоров (15), не содержащих измерений частотных слоёв, при случайном и полиномиальном задании расположения слоёв.

При  $comb_{sc} \leq 16$  и при всех значениях  $comb_{TX}$  результаты восполнения практически совпадают с результатами, полученными при обработке широкополосного тензора, при  $comb_{sc} = 24$  ошибка восполнения увеличивается. Таким образом, разбиение тензора на меньшие подтензоры по размерности частот хотя и улучшает точность аппроксимации тензора, на алгоритм восполнения оказывает негативный эффект. Это связано с тем, что достижение высокой точности аппроксимации требует разбиения на довольно большое количество подтензоров, что, в свою очередь, снижает число измеренных слоев, доступных внутри каждого из подтензоров и накладывает ограничения на максимально допустимый эквивалентный период измерений  $comb_{sc}$  по поднесущим. Авторы не исключают, что результаты Рис. 11 могут быть улучшены за счет использования более точных алгоритмов нахождения канонического разложения, однако эти исследования выходят за рамки данной работы.

Как показывает Рис. 12, в случае восполнения тензора в формате Таккера (23) точность восполнения при случайном выборе практически не отличается от точности восполнения при перестановке слоев полиномом. Без псевдослучайной перестановки слоев низкая (ниже 0.1) ошибка восполнения возможна только при  $comb_{sc} \leq 16$  и практически не зависит от  $comb_{TX}$ . Отсутствие выраженной зависимости от  $comb_{TX}$  объясняется тем, что в условии (27) при данной конфигурации  $R_1 N_{TX_1}$  меняется в пределах от 170 до 1360, что существенно больше  $R_2 = 25$ . В то же время при увеличении  $comb_{sc}$  число слоев  $N_p = N_{sc} / comb_{sc}$  уменьшается и приближается к  $R_2 = 25$  в необходимом условии (25). При  $N_p \gg R_2$  правило выбора столбцов не играет существенной роли, однако, при приближении  $N_p$  к  $R_2$  правило выбора столбцов начинает оказывать существенное влияние на точность восполнения. Например, при  $comb_{sc} = 48$  псевдослучайное расположение слоев снижает ошибку восполнения более чем в 10 раз. При  $comb_{sc} = 96$  наблюдается резкий скачок ошибки восполнения. Это связано с тем, что в этой конфигурации число слоев  $N_p = N_{sc} / comb_{sc} = 24$  становится меньше, чем  $R_2 = 25$ , условие (25) нарушается и вычисление псевдообратной матрицы в выражении (24) выполняется не строкам  $A^\dagger = A^H (AA^H)^{-1}$ , а по столбцам  $A^\dagger = (AA^H)^{-1} A^H$ , среди которых довольно часто оказываются линейно зависимые.

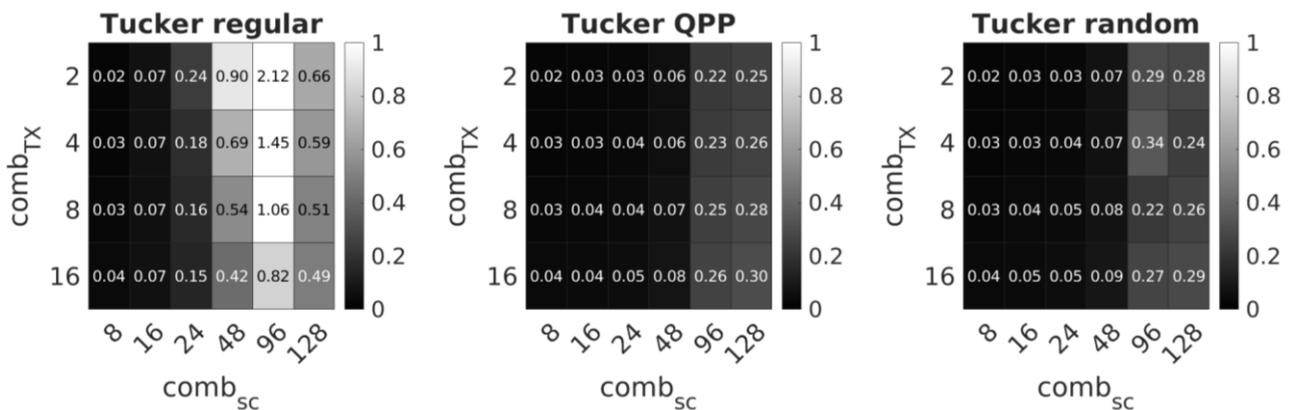


Рис. 12. Зависимость средней нормированной ошибки (53) восполнения тензора в формате Таккера (31) от числа слоёв в случае их периодического (regular) и псевдослучайного расположения.

Рассмотрим теперь, как изменяется зависимость точности восполнения от числа и метода выбора слоев при переходе от восполнения трехмерного тензора  $\mathcal{H} \in \mathbb{C}^{N_{BS} \times N_{UE} \times N_{sc}}$  по формуле (23) к восполнению четырехмерного тензора  $\mathcal{H}_{4D} \in \mathbb{C}^{N_{BS_1} \times N_{UE} \times N_{sc} \times N_{BS_2}}$  за счет увеличения  $N_{BS_2}$ . Результаты представлены на Рис. 13, числа в заголовке каждого графика соответствуют разложению  $N_{BS} = N_{BS_1} \cdot N_{BS_2}$ . Заметим, что и случайное расположение слоев, и перемежение с помощью полинома (35) дают одинаковый результат.

Заметим также, что при увеличении  $N_{BS_2}$  и уменьшении  $N_{BS_1}$  зависимость точности восполнения от  $comb_{TX}$  проявляется более отчетливо. Это связано с тем, что  $R_1$  при таких изменениях уменьшается, как следует из таблицы 1 и ограничения (29).  $R_2$  при этом увеличивается, что следует из таблицы 1 и Рис. 7. Это означает, что ограничению (30) становится труднее удовлетворить. Как следует из Рис. 13, уже при размере тензора  $\mathcal{H}_{4D} \in \mathbb{C}^{32 \times 32 \times 2304 \times 8}$  и  $comb_{TX} = 16$  условие (30) нарушается и восполнение ТТ невозможно. Для  $\mathcal{H}_{4D} \in \mathbb{C}^{16 \times 32 \times 2304 \times 16}$  это условие нарушается при  $comb_{TX} \geq 8$ .

Противоположный эффект увеличение  $N_{BS_2}$  оказывает на зависимость от  $comb_{sc}$ . В самом деле, как следует из таблицы 1 и Рис. 7,  $R_2$  растет медленнее, чем  $N_{BS_2}$ . Например, при увеличении  $N_{BS_2}$  в два раза (с 4 до 8)  $R_2$  увеличивается лишь в  $\sim 1.1$  раз (с 63 до 70). Это означает, что с увеличением  $N_{BS_2}$  для удовлетворения условия (28) требуется все меньше слоев по поднесущим  $N_p$ . Так, при восполнении тензора  $\mathcal{H}_{4D} \in \mathbb{C}^{32 \times 32 \times 2304 \times 8}$  и  $comb_{sc} = 128$  получаем  $R_2 = 70 \ll N_p N_{BS_2} = 72 \cdot 8 = 576$ , т.е. ограничение на максимальное значение  $comb_{sc}$  значительно ослабляется в сравнении с восполнением в формате Таккера ( $N_{BS_2} = 1$ ). При этих значениях параметров возможно восполнение с точностью 0.14 в среднем при  $comb_{TX} = 2$ , как следует из Рис. 13.

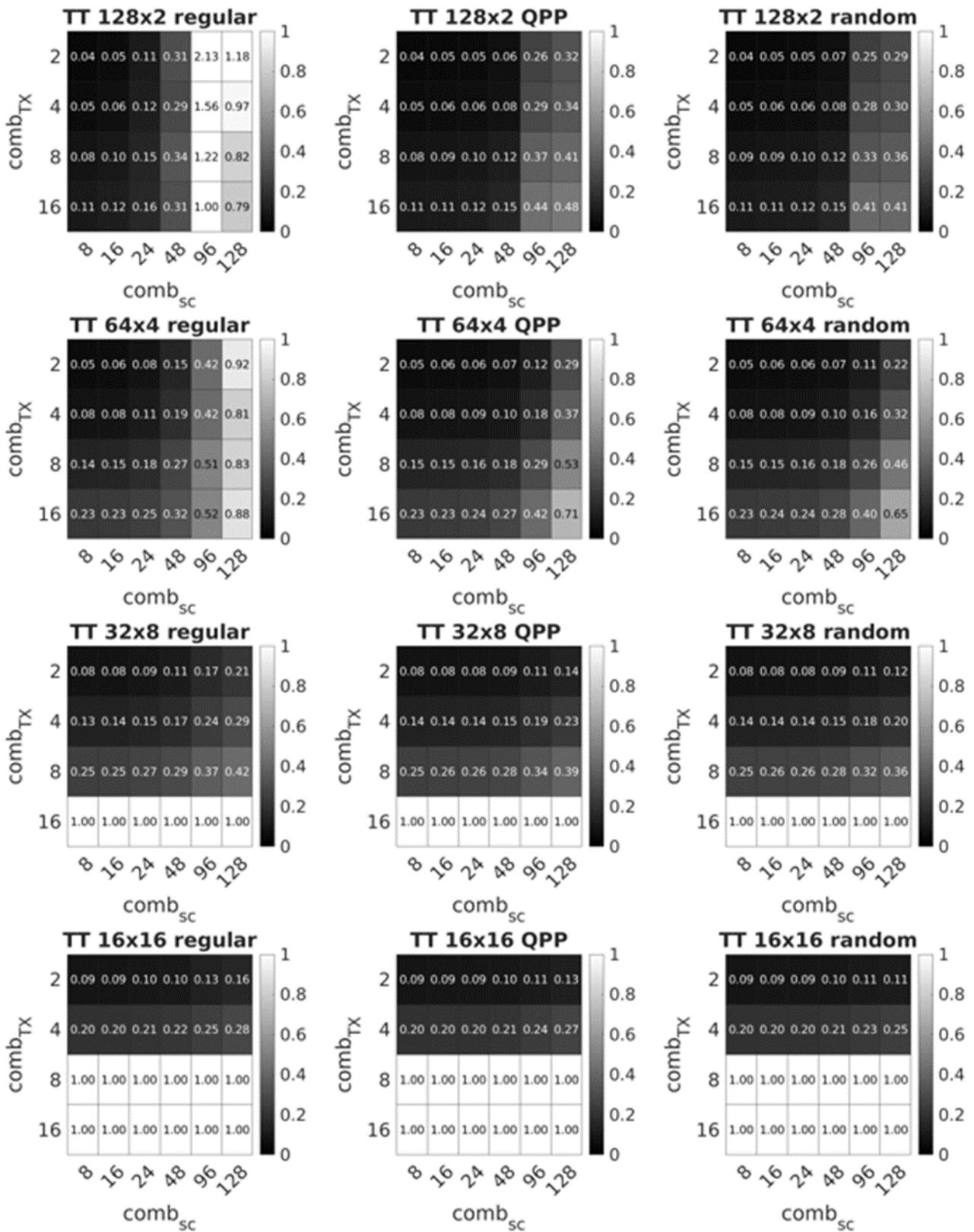


Рис. 13. Изменение зависимости точности выполнения тензора от количества слоёв при переходе от формата Таккера к формату ТТ с постепенным увеличением четвёртой размерности.

Наконец, для тензора  $\mathcal{H}_{4D} \in \mathbb{C}^{32 \times 32 \times 2304 \times 8}$  условие (28) уже практически перестает ограничивать параметр  $comb_{sc} \leq 128$ , общее число столбцов в матрице  $\mathbf{M} = \mathcal{C}_1^{(1)} (\mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{P}_3)^T \in \mathbb{C}^{R_2 \times N_p N_{BS2}}$  из (21) становится настолько большим, что порядок выбора  $N_p$  столбцов имеет гораздо меньшее значение. В результате для тензора  $\mathcal{H}_{4D} \in \mathbb{C}^{16 \times 32 \times 2304 \times 16}$  псевдослучайное расположение слоев почти не улучшает точность в сравнении с периодическим.

## Заключение

В рамках данной работы был предложен новый подход к оценке канала, заключающийся в оценке перекрестных слоев тензора и дальнейшем восполнении этого тензора. В силу того, что широкополосные каналы плохо описываются канонической моделью тензора, мы предлагаем обобщение известного алгоритма восполнения в каноническом формате на формат Таккера и ТТ. Для повышения точности восполнения мы также предлагаем перемежать слои с помощью квадратичного перестановочного полинома. Результаты моделирования на модели канала стандарта 38.901 3GPP показывают, что при восполнении в формате Таккера предлагаемая перестановка слоев позволяет в два раза снизить число слоев, допустимое для восполнения. Минимальное количество слоев по размерности поднесущих при этом ограничено количеством независимых компонент частотных характеристик всех пар антенн приемника и передатчика (рангом тензора). Число слоев по размерности антенн передатчика при этом слабо влияет на точность восполнения: при уменьшении количества слоев в 8 раз ошибка восполнения возрастает только в 2 раза. При переходе от модели Таккера к модели ТТ получается снизить необходимое для восполнения число слоев по размерности поднесущих, при этом ужесточаются требования к количеству слоев по размерности антенн передатчика. Кроме того, переход к модели ТТ позволяет существенно снизить зависимость от способа расположения слоев. Так, при восполнении тензора  $\mathcal{H}_{4D} \in \mathbb{C}^{16 \times 32 \times 2304 \times 16}$  при замене псевдослучайных слоев периодическими повышение ошибки восполнения

составляет порядка 20 %, в то время как для модели Таккера этот показатель может превышать 200 %.

### Литература

1. Yu J. et al. Field Test of 5G FDD Massive MIMO // 2022 5th International Conference on Information Communication and Signal Processing (ICICSP). – IEEE, 2022. – С. 355-359
2. Wang C.X. et al. On the road to 6G: Visions, requirements, key technologies, and testbeds // IEEE Communications Surveys & Tutorials. – 2023. – Т. 25. – №. 2. – С. 905-974.
3. Lin X. The bridge toward 6G: 5G-Advanced evolution in 3GPP Release 19 // IEEE Communications Standards Magazine. – 2025. – Т. 9. – №. 1. – С. 28-35.
4. Alhamed A., Gültepe G., Rebeiz G.M. 64-element 16–52-GHz transmit and receive phased arrays for multiband 5G-NR FR2 operation // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. – 2022. – Т. 71. – №. 1. – С. 360-372.
5. Дорохин С.В. и др. Измерительные сигналы на основе перестановочных полиномов для восполнения тензоров канала OFDM MIMO // T Comm. – 2025. – Т. 19. – №. 5.
6. Zhou Z. et al. Channel estimation for millimeter-wave multiuser MIMO systems via PARAFAC decomposition // IEEE Transactions on Wireless Communications. – 2016. – Т. 15. – №. 11. – С. 7501-7516.
7. Zhou Z. et al. Low-rank tensor decomposition-aided channel estimation for millimeter wave MIMO-OFDM systems // IEEE Journal on Selected Areas in Communications. – 2017. – Т. 35. – №. 7. – С. 1524-1538.
8. Lin Y. et al. Tensor-based channel estimation for millimeter wave MIMO-OFDM with dual-wideband effects // IEEE Transactions on Communications. – 2020. – Т. 68. – №. 7. – С. 4218-4232.
9. Ruble M., Güvenç İ. Multilinear singular value decomposition for millimeter wave channel parameter estimation // IEEE Access. – 2020. – Т. 8. – С. 75592-75606.

10. Gong X. et al. An ESPRIT-based supervised channel estimation method using tensor train decomposition for mmWave 3-D MIMO-OFDM systems // IEEE Transactions on Signal Processing. – 2023. – Т. 71. – С. 555-570.
11. Dorokhin S., Lyashev V., Makurin M. 6G XL-MIMO Channel Estimation with Sub-Nyquist Tensor Completion // 2025 27th International Conference on Digital Signal Processing and its Applications (DSPA). – IEEE, 2025. – С. 1-6.
12. Goreinov S.A., Tyrtyshnikov E.E., Zamarashkin N.L. A theory of pseudoskeleton approximations // Linear algebra and its applications. – 1997. – Т. 261. – №. 1-3. – С. 1-21.
13. Tyrtyshnikov E. Incomplete cross approximation in the mosaic-skeleton method // Computing. – 2000. – Т. 64. – №. 4. – С. 367-380.
14. Goreinov S.A., Tyrtyshnikov E.E. Quasioptimality of skeleton approximation of a matrix in the Chebyshev norm // Doklady Mathematics. – Dordrecht : SP MAIK Nauka/Interperiodica, 2011. – Т. 83. – №. 3. – С. 374-375.
15. Osinsky A.I., Zamarashkin N.L. Pseudo-skeleton approximations with better accuracy estimates // Linear Algebra and its Applications. – 2018. – Т. 537. – С. 221-249.
16. Zhu X., Lin W. Randomised pseudo-skeleton approximation and its application in electromagnetics // Electronics Letters. – 2011. – Т. 47. – №. 10. – С. 590-592.
17. Cai H.Q. et al. Robust CUR decomposition: Theory and imaging applications // SIAM Journal on Imaging Sciences. – 2021. – Т. 14. – №. 4. – С. 1472-1503.
18. Du K.L. et al. Matrix factorization techniques in machine learning, signal processing, and statistics // Mathematics. – 2023. – Т. 11. – №. 12. – С. 2674.
19. Flynn M. et al. Stat: Shrinking transformers after training // arXiv preprint arXiv:2406.00061. – 2024.
20. Goreinov S.A. et al. How to find a good submatrix // Matrix Methods: Theory, Algorithms And Applications: Dedicated to the Memory of Gene Golub. – 2010. – С. 247-256.

21. Sorber L., Van Barel M., De Lathauwer L. Optimization-based algorithms for tensor decompositions: Canonical polyadic decomposition, decomposition in rank- $(L_r, L_r, 1)$  terms, and a new generalization // *SIAM Journal on Optimization*. – 2013. – Т. 23. – №. 2. – С. 695-720.
22. Kanatsoulis C.I. et al. Tensor completion from regular sub-Nyquist samples // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 2019. – Т. 68. – С. 1-16.
23. Vandecappelle M., Vervliet N., De Lathauwer L. A second-order method for fitting the canonical polyadic decomposition with non-least-squares cost // *IEEE Transactions on Signal Processing*. – 2020. – Т. 68. – С. 4454-4465.
24. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A multilinear singular value decomposition // *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2000. – Т. 21. – №. 4. – С. 1253-1278.
25. Oseledets I.V. Tensor-train decomposition // *SIAM Journal on Scientific Computing*. – 2011. – Т. 33. – №. 5. – С. 2295-2317.
26. Дорохин С.В., Ляшев В.А. Восстановление тензоров при структурных ограничениях на оператор измерений // *ББК 22.18 Л75*. – 2023. – Т. 4. – С. 121.
27. De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A multilinear singular value decomposition // *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*. – 2000. – Т. 21. – №. 4. – С. 1253-1278.
28. Welch L.R. Lower bounds on the maximum cross correlation os signals // *IEEE Trans. Inf. Theory*. – 1967. – Т. 13. – С. 619-621.
29. Foucart S. Flavors of compressive sensing // *International Conference Approximation Theory*. – Cham : Springer International Publishing, 2016. – С. 61-104.
30. Sustik M.A. et al. On the existence of equiangular tight frames // *Linear Algebra and its applications*. – 2007. – Т. 426. – №. 2-3. – С. 619-635.
31. Haupt J., Applebaum L., Nowak R. On the restricted isometry of deterministically subsampled Fourier matrices // *2010 44th Annual Conference on Information Sciences and Systems (CISS)*. – IEEE, 2010. – С. 1-6.

32. Коробов Н.М. Тригонометрические суммы и их приложения. – М.: Наука, 1989. – 240 с.
33. da Silva F.B. Discrepancy-Based Analysis of Measurement Sampling Points in Compressive Sensing : дис. – The University of Texas at El Paso, 2021.
34. Jarali V., Poojary P., Bhatta V.G.R. Construction of Permutation Polynomials Using Additive and Multiplicative Characters // Symmetry. – 2022. – Т. 14. – №. 8. – С. 1539.
35. Kashin B., Tzafriri L. Some remarks on the restrictions of operators to coordinate subspaces // preprint. – 1993. – Т. 6. – №. 9. – С. 38.
36. Rudelson M. Almost orthogonal submatrices of an orthogonal matrix // Israel Journal of Mathematics. – 1999. – Т. 111. – №. 1. – С. 143-155.
37. Tropp J.A. Column subset selection, matrix factorization, and eigenvalue optimization // Proceedings of the twentieth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2009. – С. 978-986.
38. Civril A., Magdon-Ismael M. On selecting a maximum volume sub-matrix of a matrix and related problems // Theoretical Computer Science. – 2009. – Т. 410. – №. 47-49. – С. 4801-4811.
39. Akchen Y.C., Mišić V.V. Column-randomized linear programs: Performance guarantees and applications // Operations Research. – 2025. – Т. 73. – №. 3. – С. 1366-1383.
40. Jaeckel S. et al. QuaDRiGa: A 3-D multi-cell channel model with time evolution for enabling virtual field trials // IEEE transactions on antennas and propagation. – 2014. – Т. 62. – №. 6. – С. 3242-3256.
41. Tensorlab | A Matlab package for computations // URL: <https://www.tensorlab.net/> (дата обращения: 15.07.2025)

**Для цитирования:**

Дорохин С.В., Шувалов Д.В., Ляшев В.А. Оценка канала больших ММО OFDM систем как восполнение субдискретизированного тензора: Часть 1 // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – №. 8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.8.3>