

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.8.12>

УДК: 621.396.67

КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ МЕЖДУ АНТЕННАМИ КАК РЕШЕНИЕ СКАЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Н.В. Анютин^{1,2}

¹ПАО «НПО «Алмаз»,
125190, Москва, Ленинградский проспект, д. 80, корп. 16

²Московский физико-технический институт,
141700, г. Долгопрудный, Институтский переулок, д. 9

Статья поступила в редакцию 21 октября 2025 г.

Аннотация. В статье показано, что при поступательном перемещении антенн зависимость коэффициента передачи между ними от разности координат фазовых центров удовлетворяет скалярному уравнению Гельмгольца. Получена новая формула для коэффициента передачи, которая отличается от формулы в виде свертки спектров плоских векторных волн пределами интегрирования и наличием весовой функции. Весовая функция осуществляет выбор единственной линейной комбинации из двух распространяющихся навстречу друг другу скалярных плоских волн.

Ключевые слова: диаграмма направленности, формула передачи, коэффициент передачи, взаимная связь, измерение характеристик антенн.

Автор для переписки: Анютин Николай Викторович, anyutin nv@mail.ru

Введение

Расчет передачи сигналов между антеннами может быстро и с хорошей точностью выполняться с помощью формул для коэффициента передачи [1-4]. Среди них особое место занимает формула Кернса, в которой коэффициент

передачи между антеннами выражается в виде свертки спектров плоских векторных волн [3]. Соответствующие спектральные плотности могут быть рассчитаны с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) [5]. В условиях ограниченных вычислительных ресурсов это обусловило первое практическое применение формулы Кернса для вычислений коэффициента передачи [6], а также последующее ее широкое распространение [7].

Для расчета спектральной плотности разложения по плоским векторным волнам с помощью БПФ требуются значения касательных компонент вектора напряженности электрического или магнитного поля в узлах прямоугольной эквидистантной сетки на плоскости [6]. Такая поверхность не является оптимальной с точки зрения количества точек, особенно в случае расчета коэффициента передачи по дальним боковым лепесткам диаграммы направленности (ДН) [8]. Таким образом, актуальным является обобщение формулы Кернса на случай сеток, построенных на замкнутой поверхности вокруг источников электромагнитного излучения. Эта задача является и целью работы. Сначала будет показано, что при определенных условиях зависимость коэффициента передачи от разности координат фазовых центров антенн является решением скалярного уравнения Гельмгольца. Затем это решение будет разложено в спектр скалярных плоских волн во всем пространстве. В конце формула будет апробирована по измеренному коэффициенту передачи между двумя рупорными антеннами.

1. Вывод формулы для коэффициента передачи

Введем декартову систему координат $Oxyz$ с началом в фазовом центре антенны. Напряженность электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ поля в дальней зоне (ДЗ) излучения антенны в этой системе координат разделяется на сферическую $\mathbf{T}$ и радиальные части:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{n} \times \end{pmatrix} \mathbf{T}(\mathbf{n}) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (1)$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор;

$\mathbf{n} = \mathbf{r}/r = \{u, v, w\}$ – проекционные координаты единичного вектора;

$k = 2\pi/\lambda$ – волновое число и длина волны.

Гармонические поля в формуле (1) зависят от времени t как $e^{i\omega t}$, где ω – циклическая частота. Сферическая часть $\mathbf{T}$ напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ является векторной ДН, которая включает в себя амплитудную, фазовую и поляризационную ДН.

Если в одной системе координат при одной и той же подведенной мощности W_0 известны ДН $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ антенны 1 и 2, соответственно, то при поступательном перемещении фазового центра антенны 2 на вектор $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$ ее коэффициент передачи S_{21} с антенной 1 можно вычислить по формуле Кернса [9]:

$$S_{21}(x, y, z) = \frac{ce^{-i\sqrt{1-u^2-v^2}kz}}{2\pi W_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{T}_1(u, v) \cdot \mathbf{T}_2^*(-u, -v) e^{-ik(ux+vy)} \frac{dudv}{\sqrt{1-u^2-v^2}}, \quad (2)$$

где c – скорость света в вакууме.

Под знаками интегралов в формуле (2) находятся скалярные произведения двух ДН $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ – амплитуды скалярных плоских волны. Таким образом, зависимость коэффициента передачи S_{21} является суммой решений скалярного уравнения Гельмгольца, а, значит, и сама является его решением. Это позволяет, с одной стороны, рассчитывать коэффициент передачи S_{21} с помощью интеграла Кирхгофа [10]:

$$S_{21}(\mathbf{r}) = \frac{ik}{4\pi} \oint_S \mathbf{n}' \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R} S_{21}(\mathbf{r}') - \frac{\nabla S_{21}(\mathbf{r}')}{ik} \right) \frac{e^{-ikR}}{R} dS', \quad (3)$$

S – замкнутая вокруг антенны 1 поверхность;

$\mathbf{n}'$ – вектор внешней нормали на поверхности S ;

$\mathbf{r}'$ – радиус-вектор точки на поверхности S ;

$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ – вектор из точки $\mathbf{r}'$ в точку $\mathbf{r}$.

С другой стороны, коэффициент передачи S_{21} можно разложить в спектр скалярных плоских волн во всем пространстве [11]:

$$S_{21}(\mathbf{r}) = \frac{ike^{ikr'}}{4\pi r'} \oint_S (1 + \mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}/r) S_{21}(\mathbf{r}') e^{-ik\mathbf{n}' \cdot \mathbf{r}} dS'. \quad (4)$$

В формуле (4) интегрирование ведется по поверхности сферы в ДЗ, радиус r' которой стремится к бесконечности. Дифференциал площади dS' этой сферы можно выразить через радиус r' и проекционные координаты u , v , и w :

$$dS' = r'^2 du dv / |w|.$$

Подстановка этой формулы в формулу (4) приводит к следующему результату:

$$S_{21}(x, y, z) = \frac{ik}{2\pi} \iint_{u^2+v^2+w^2=1} g(u, v, w, x, y, z) T_{21}(u, v, w) e^{-ik(ux+vy+wz)} \frac{du dv}{|w|}, \quad (5)$$

$$g(u, v, w, x, y, z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{ux + vy + wz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \quad (6)$$

$$S_{21}(x, y, z) = T_{21}(u, v, w) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

В отличие от формулы (2), формула (5) не может быть вычислена с помощью БПФ из-за зависимости весовой функции (6) от координаты z . Еще одно отличие заключается в пределах интегрирования. В формуле (2) интегрирование ведется только в передней полусфере $w > 0$, однако в том числе и по комплексным значениям полярного угла θ . В формуле (5) интегрирование ведется по всей сфере единичного радиуса. Однако, поскольку в формуле (5) каждой паре координат u и v соответствуют две спектральные плотности плоских

волн $T_{21}(u, v, w)$ и $T_{21}(u, v, -w)$, весовая функция (6) осуществляет выбор их линейной комбинации [11]:

$$g(u, v, w, x, y, z)T_{21}(u, v, w) + g(u, v, -w, x, y, z)T_{21}(u, v, -w).$$

Выражение для сферической части T_{21} коэффициента передачи S_{21} получено в работе [12]:

$$T_{21}(u, v, w) = \frac{c}{ikW_0} \mathbf{T}_1(u, v, w) \cdot \mathbf{T}_2^*(-u, -v, -w). \quad (7)$$

Подстановка формулы (7) в формулу (5) позволяет переписать последнюю как функцию от ДН $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$:

$$S_{21}(x, y, z) = \frac{c}{2\pi W_0} \iint_{u^2+v^2+w^2=1} \left(\mathbf{T}_1(u, v, w) \cdot \mathbf{T}_2^*(-u, -v, -w) \times g(u, v, w, x, y, z) e^{-ik(ux+vy+wz)} \right) \frac{du dv}{|w|}. \quad (8)$$

Формула Кернса (2) содержит двойное преобразование Фурье. Если коэффициент передачи требуется рассчитать в точках размещения антенны 2, которые лежат на параллельной Oxy плоскости, то формула (2) может быть вычислена с помощью БПФ. В противном случае формулы (2) и (8) реализуются в алгоритмах с одной и той же вычислительной сложностью.

2. Апробация формулы для коэффициента передачи

Апробация полученной формулы (8) была проведена по экспериментально измеренному коэффициенту передачи S_{21} между двумя рупорными антеннами на частоте 30 ГГц. В качестве передающей антенны 1 использовался пирамидальный рупор П6-132. Его основание (апертура) размером $6,8\lambda \times 5,4\lambda$ ($x \times y$) лежало в плоскости Oxy (рис. 1). Большая сторона апертуры была направлена параллельно оси Ox , меньшая – оси Oy , а ось Oz перпендикулярна плоскости основания. В качестве приемной антенны 2 использовался небольшой пирамидальный рупор. Его основание (апертура) размером $3,3\lambda \times 2,0\lambda$ ($x \times y$) также лежало в плоскости Oxy . Большая сторона апертуры была направлена параллельно

оси Ox , меньшая – оси Oy , а сам рупор – против оси Oz . За точку $\mathbf{r}$ в измерениях и при расчете коэффициента передачи по формуле (8) принимался радиус-вектор из центра апертуры рупорной антенны П6-132 в центр апертуры небольшой рупорной антенны.

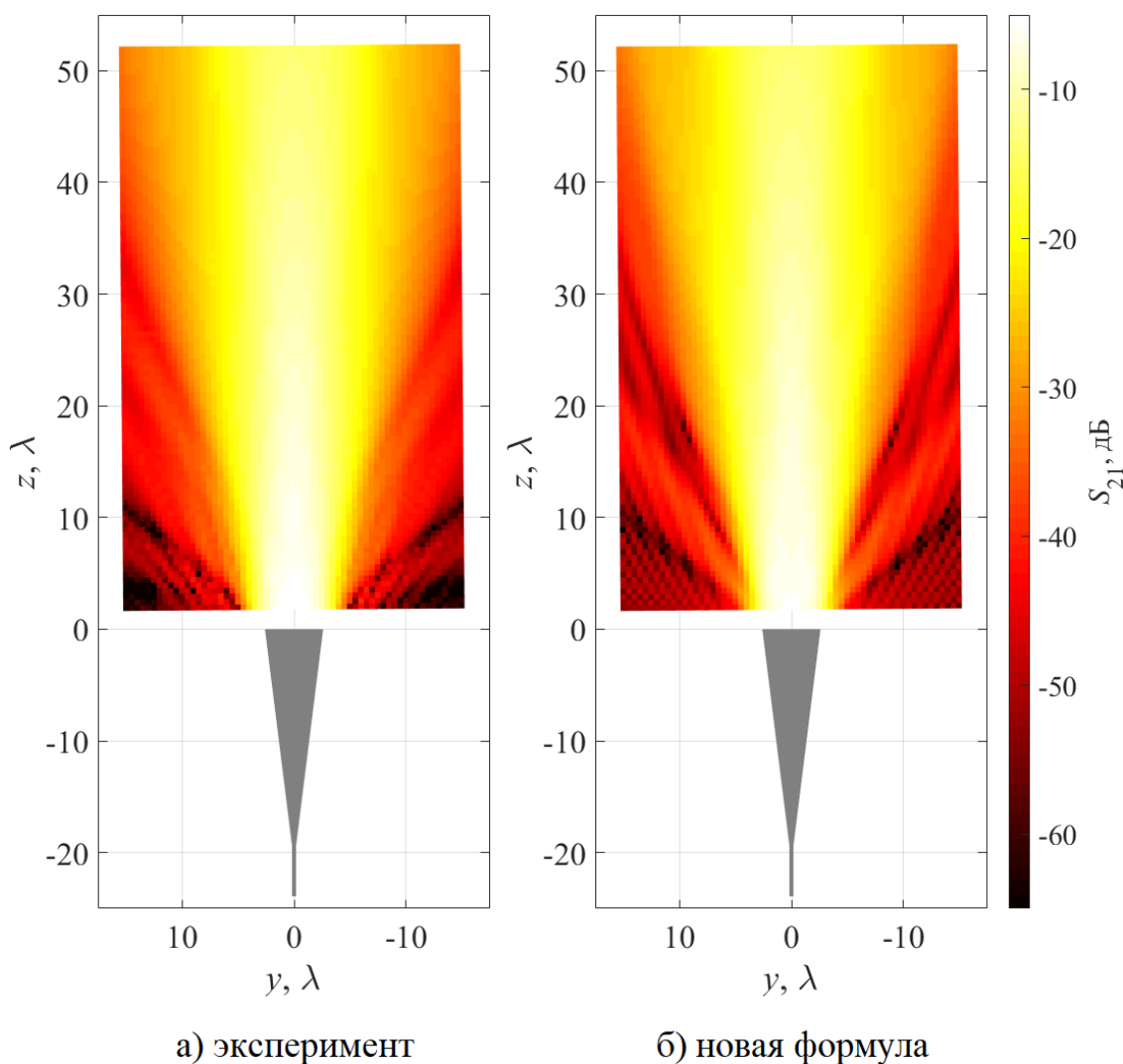


Рис. 1. Коэффициент передачи в плоскости Oyz .

Коэффициент передачи S_{21} между рупорными антеннами был измерен на прямоугольной поверхности в плоскости Oyz с центром в точке $\{0, 0, 27\lambda\}$, на которой было взято 61×101 точек ($y \times z$) в узлах прямоугольной эквидистантной сетки с шагом $\Delta x = \Delta y = \lambda/2$ (рис. 1). Для расчета коэффициента передачи S_{21} по формуле (8) использовались значения ДН рупорных антенн на сфере, которая была разбита на $2 + 179 \times 180$ точек ($\theta \times \varphi$) в узлах эквидистантной сетки с шагом $\Delta\theta = 1^\circ$ и $\Delta\varphi = 2^\circ$. Сами ДН были рассчитаны с помощью строгого решения задачи излучения электромагнитного поля методом интегральных

уравнений [13]. С целью избегания столкновений небольшой рупорной антенны с антенной П6-132 и ее опорой, измерения коэффициента передачи S_{21} были проведены только в области $z > 2\lambda$ (рис. 1).

На рис. 1 приведены результаты измерений коэффициента передачи S_{21} между двумя рупорными антеннами и его расчета по формуле (8) в сечении Oyz . Отличия наблюдаются при значениях ниже -40 дБ, что соответствует области формирующихся второго и последующих боковых лепестков.

С целью более детального сравнения на рис. 2 и рис. 3 приведены распределения коэффициента передачи S_{21} с рис. 1 в отдельных сечениях. Разность результатов расчета и измерений позволяет оценить все составляющие ошибки, в том числе обусловленные областью применимости формулы (8), несовпадением истинных координат с расчетными на рис. 1, а также пренебрежением переотражениями электромагнитных волн [14].

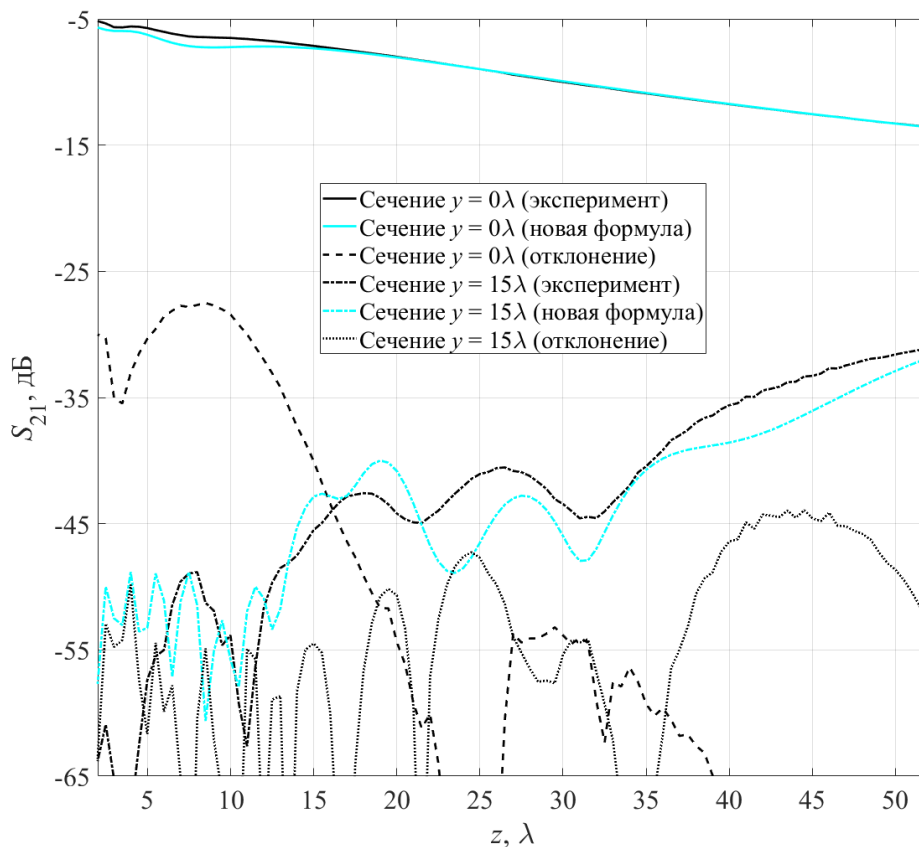


Рис. 2. Коэффициент передачи S_{21} в z -сечениях в эксперименте и по формуле (8).

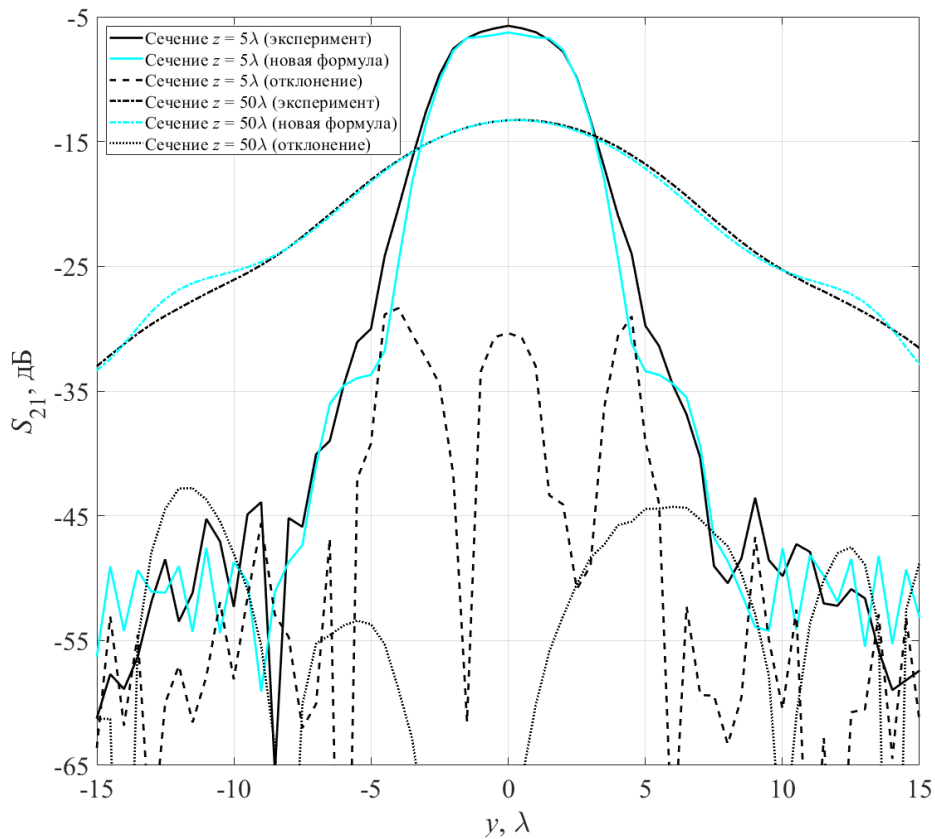


Рис. 3. Коэффициент передачи S_{21} в y -сечениях в эксперименте и по формуле (8).

На рис. 2 и рис. 3 видно, что суммарная ошибка вычислений коэффициента передачи по формуле (8) может достигать уровня -27 дБ при $z < 17\lambda$. На большем расстоянии она не превышает уровень -45 дБ.

Большая суммарная ошибка вычислений коэффициента передачи по формуле (8) на небольших расстояниях, по всей видимости, связана с пренебрежением переотражениями электромагнитных волн. Приближенные условия ДЗ электромагнитного излучения для небольшой рупорной антенны формируются на расстоянии $r = 21,8\lambda$, где суммарная ошибка уже не превышает уровень -30 дБ. Таким образом, условия ДЗ для меньшей антенны могут быть выбраны в качестве критерия того, что суммарная ошибка вычислений коэффициента передачи по формуле (8) не превысит уровень -30 дБ.

Весовая функция (6), которая находится под знаком интеграла в формуле (8), является приближенной. Таким образом, формула (8) также является приближенной. С целью оценки методической ошибки вычислений коэффициента передачи S_{21}

по формуле (8) на рис. 4 и рис. 5 приведены его распределения в тех же сечениях в сравнении с формулой Кернса (2).

Методическая ошибка вычислений коэффициента передачи S_{21} по формуле (8) на рис. 4 не превышает уровень -55 дБ. Аналогичный результат наблюдается на рис. 5 за исключением области $|y| < 5\lambda$ в сечении $z = 5\lambda$, где методическая ошибка вычислений по формуле (8) достигает уровня -37 дБ.

В работе [11] весовая функция (6) изначально включает в себя волновой вектор поля в точке расчета. Однако, поскольку поле только предстоит вычислить по формуле (5) и волновой вектор неизвестен, далее берется его оценка по фазовому центру излучения. Вблизи апертуры рупорной антенны 1 волновой вектор направлен не из ее фазового центра, а по нормали к апертуре. Именно по этой причине в области $|y| < 5\lambda$ сечения $z = 5\lambda$ на рис. 5 методическая ошибка вычислений по формуле (8) выросла с уровня -55 дБ до уровня -37 дБ.

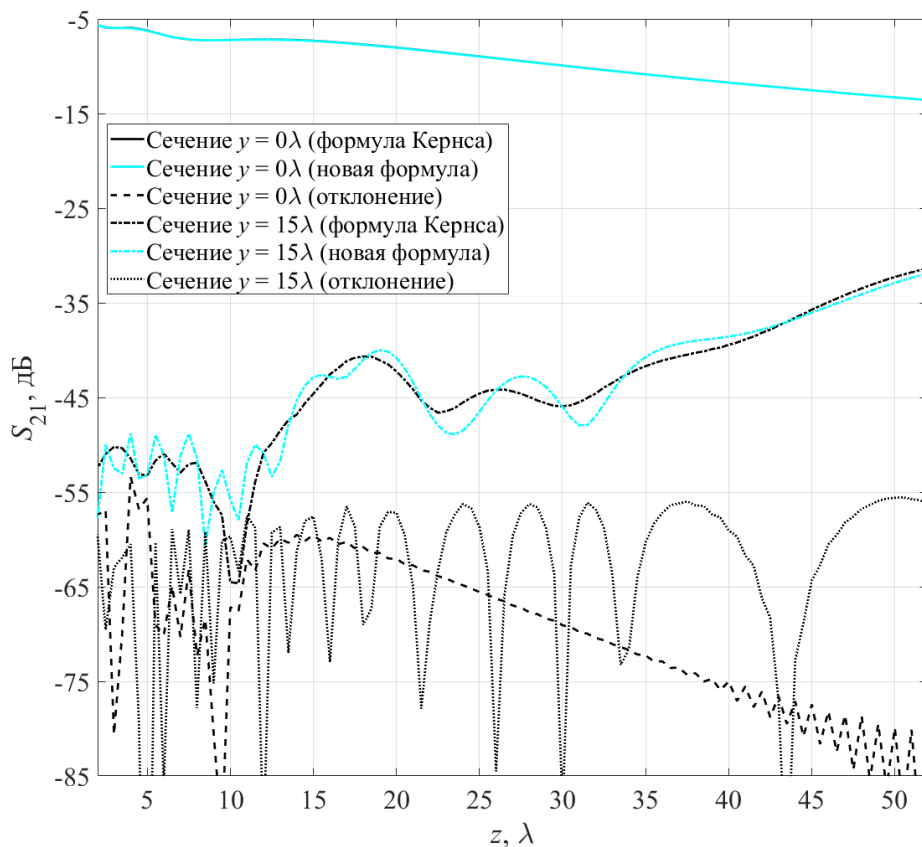


Рис. 4. Коэффициент передачи S_{21} в z -сечениях по формулам (2) и (8).

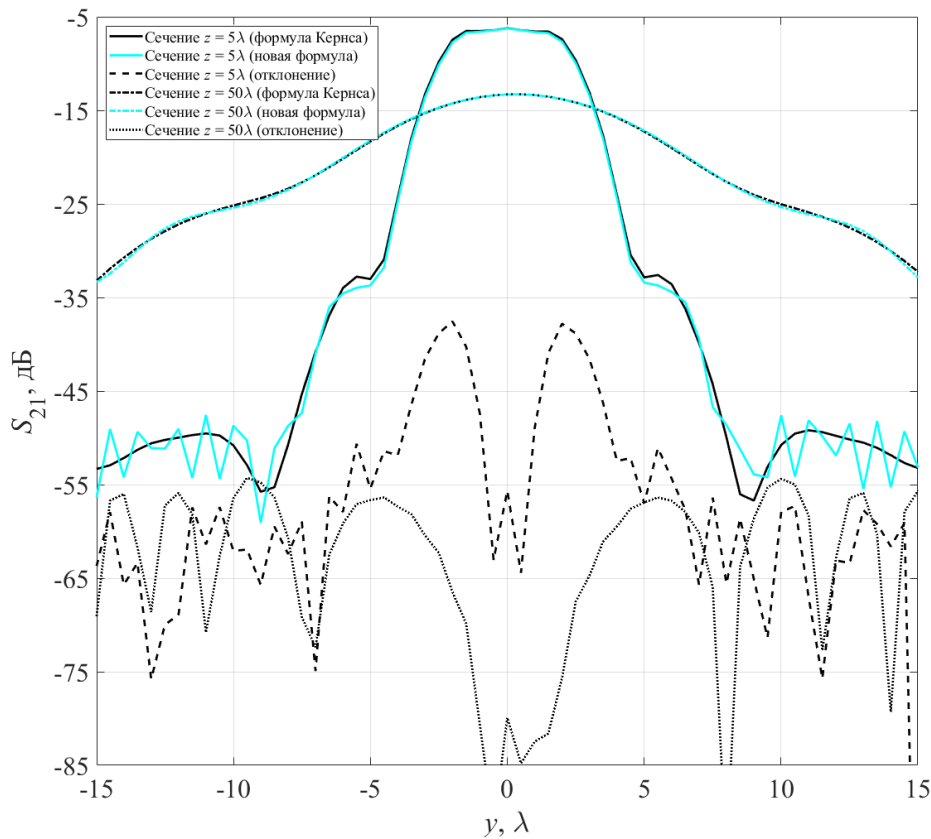


Рис. 5. Коэффициент передачи S_{21} в y -сечениях по формулам (2) и (8).

В работе [11] приведены результаты эксперимента по измерению коэффициента передачи S_{21} между антенной П6-132 и открытым концом прямоугольного волновода на неканонической поверхности на расстоянии 6λ и в тех же точках сечения Oyz на рис. 1. Коэффициент передачи S_{21} считался с точностью до константы приближенно равным E_y -компоненте напряженности электрического поля, что позволило пересчитать его с неканонической поверхности на сферу в ДЗ по формуле (3), а затем обратно в сечение Oyz по формуле (4). Таким образом, экспериментальные результаты в работе [11] подтверждают корректность формулы (8) для расчета коэффициента передачи между антеннами.

Важно отметить, если антенны 1 и 2 располагаются в областях $z < 0$ и $z > 0$, соответственно, то формула Кернса (2) позволяет рассчитывать коэффициент передачи между ними только в области $z > 0$. Для расчета с помощью формулы Кернса (2) коэффициента передачи в области $z < 0$ требуется повернуть декартову систему координат и найти новую спектральную плотность разложения по плоским векторным волнам. Формула (8) же позволяет

рассчитывать коэффициент передачи между антеннами во всем пространстве за исключением объема, занятого антенной 1.

Заключение

При поступательном перемещении антенн зависимость коэффициента передачи между ними от разности их декартовых координат является решением уравнения Гельмгольца. Подстановка зависимости коэффициента передачи между антеннами в интеграл Кирхгофа позволила обобщить формулу Кернса на случай замкнутых поверхностей, построенных вокруг источников электромагнитного излучения. Согласно проведенным экспериментальным оценкам, суммарная ошибка вычислений коэффициента передачи по новой формуле эквивалентна помехе на уровне не выше -30 дБ.

Литература

1. Friis H. T. A note on a simple transmission formula // Proceedings of the IRE. – 1946. – Т. 34. – №. 5. – С. 254-256.
2. Бурштейн Э. Л. О мощности, принимаемой антенной при падении на нее неплоской волны // Радиотехника и электроника. – 1958. – Т. 3. – №. 2. – С. 186-189.
3. Kerns D. M., Dayhoff E. S. Theory of diffraction in microwave interferometry // J. Res. Nat. Bur. Stand. – 1960. – Т. 64. – №. 1. – С. 1-13.
4. Richmond J. A reaction theorem and its application to antenna impedance calculations // IRE Transactions on Antennas and Propagation. – 1961. – Т. 9. – №. 6. – С. 515-520. <https://doi.org/10.1109/TAP.1961.1145068>
5. Welch P. The use of fast Fourier transform for the estimation of power spectra: A method based on time averaging over short, modified periodograms // IEEE Transactions on audio and electroacoustics. – 1967. – Т. 15. – №. 2. – С. 70-73. <https://doi.org/10.1109/TAU.1967.1161901>

6. Kerns D. M. Correction of near-field antenna measurements made with an arbitrary but known measuring antenna // Electronics Letters. – 1970. – Т. 6. – №. 11. – С. 346-347. <https://doi.org/10.1049/el:19700244>
7. Yaghjian A. An overview of near-field antenna measurements // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 2003. – Т. 34. – №. 1. – С. 30-45. <https://doi.org/10.1109/TAP.1986.1143727>
8. Schmidt C. H., Leibfritz M. M., Eibert T. F. Fully probe-corrected near-field far-field transformation employing plane wave expansion and diagonal translation operators // IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2008. – Т. 56. – №. 3. – С. 737-746. <https://doi.org/10.1109/TAP.2008.916975>
9. Francis M. H. IEEE recommended practice for near-field antenna measurements // IEEE Standard. – 2012. – Т. 1720.
10. Аняутин Н.В. Метод приближенного вычисления интеграла Кирхгофа // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 4. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.4.7>
11. Аняутин Н.В. Разложение волнового поля во всем пространстве в спектр скалярных плоских волн // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – №. 9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.9.1>
12. Newell A. C., Kerns D. M. Determination of both polarization and power gain of antennas by a generalized 3-antenna measurement method // Electronics Letters. – 1971. – Т. 7. – №. 3. – С. 68-70. <https://doi.org/10.1049/el:19710047>
13. Gibson W. C. The method of moments in electromagnetics. – CRC press, 2014.
14. Malmström J. Derivation of reaction theorems for scattered fields // IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters. – 2018. – Т. 17. – №. 10. – С. 1876-1880. <https://doi.org/10.1109/LAWP.2018.2868684>

Для цитирования:

Аняутин Н.В. Коэффициент передачи между антеннами как решение скалярного уравнения Гельмгольца. // Журнал радиоэлектроники. – 2026. – №. 8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.8.12>