

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.8.8>

УДК: 621.396:681.323

МЕТОД СИНТЕЗА КОМПЛЕКСНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ФИЛЬТРОВ

С.И. Зиятдинов, О.И. Красильникова

Санкт-Петербургский государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
190000, г. Санкт-Петербург. Ул. Большая Морская, д. 67

Статья поступила в редакцию 25 марта 2026 г.

Аннотация. *Введение.* Рассмотрен вопрос преобразования действительных полосовых и режекторных дискретных фильтров в комплексные дискретные фильтры. *Цель.* По заданным весовым коэффициентам действительных полосовых и режекторных дискретных фильтров найти весовые коэффициенты комплексных полосовых и режекторных дискретных фильтров. *Метод.* Преобразование фильтров основано на использовании смещенного по частоте билинейного z -преобразования. В основе преобразования фильтров лежит суммирование и перемножение в z -плоскости передаточных функций комплексных дискретных фильтров, определяющих передаточные функции заданных действительных фильтров. *Выводы.* Разработанная методика позволяет по заданным весовым коэффициентам действительных дискретных полосовых и режекторных фильтров вычислить весовые коэффициенты комплексных дискретных полосовых и режекторных фильтров. Произведен расчет амплитудно-частотных характеристик исходных и преобразованных полосовых и режекторных фильтров. Полученные в работе материалы будут весьма полезны при построении когерентных систем и устройств обработки сигналов, таких как доплеровские измерители скорости, системы селекции движущихся целей.

Ключевые слова: дискретные полосовые и режекторные фильтры, частотные характеристики, z -преобразование, весовые коэффициенты.

Автор для переписки: Зиятдинов Сергей Ильич, ziat.53@mail.ru

Введение

В современных системах обработки сигналов широко используются разнообразные цифровые (дискретные) фильтры. Это могут быть цифровые фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные фильтры. Построение цифровых фильтров в зависимости от тактических задач может быть основано на использовании взаимосвязанных импульсных и переходных характеристик, дифференциальных, интегральных и разностных уравнений [1-3].

Наиболее часто синтез дискретных фильтров осуществляется по заданным частотным передаточным функциям непрерывных фильтров-аналогов с использованием билинейного z -преобразования [4]. Метод билинейного z -преобразования наиболее эффективен при разработке фильтров нижних и верхних частот. При синтезе дискретных полосовых и режекторных фильтров, частота настройки которых отлична от нуля, применяют смещенное по частоте билинейное z -преобразование [5].

В наиболее эффективных когерентных системах обработки сигналов, таких как доплеровские измерители скорости движения летательных аппаратов, системы селекции движущихся целей, используются комплексные цифровые фильтры, которые реализуются в виде двух квадратурных каналов [6]. На практике цифровые фильтры задаются набором весовых коэффициентов, на основании которых реализуются разностные уравнения, определяющие алгоритм работы цифрового фильтра. В действительных фильтрах весовые коэффициенты также являются действительными числами. В комплексных фильтрах весовые коэффициенты являются комплексными и содержат вещественную и мнимую составляющие. В случае необходимости перехода от действительных фильтров к эквивалентным комплексным фильтрам

встает задача пересчета действительных коэффициентов в комплексные коэффициенты.

1. Постановка задачи

В реальных устройствах обработки сигналов используемые цифровые фильтры задаются своими весовыми коэффициентами, на основании которых строятся разностные уравнения, определяющие алгоритмы работы разнообразных цифровых фильтров. В наиболее эффективных когерентных системах используются комплексные цифровые фильтры с комплексными весовыми коэффициентами. Однако при наличии весовых коэффициентов только действительных фильтров требуется их пересчет в комплексные весовые коэффициенты при условии сохранения фильтрующих свойств фильтров.

Алгоритм преобразования действительных фильтров в комплексные фильтры можно представить в виде следующей последовательности действий:

1) По заданным частотным передаточным функциям непрерывных действительных полосовых (режекторных) фильтров с использованием смещенного по частоте билинейного z -преобразования находятся выражения для весовых коэффициентов дискретных действительных фильтров.

2) На основании полученных выражений для весовых коэффициентов дискретных действительных фильтров определяются соотношения для весовых коэффициентов соответствующих полосовых (режекторных) дискретных комплексных фильтров.

Решение задачи нахождения весовых коэффициентов комплексных полосовых и режекторных фильтров при заданных весовых коэффициентах действительных полосовых и режекторных фильтров составляет основное содержание настоящей работы.

2. Преобразование действительного полосового дискретного фильтра в комплексный полосовой дискретный фильтр

В общем виде частотная передаточная функция непрерывного действительного полосового фильтра записывается следующим образом [5]:

$$W_{\text{пд}}(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^m p_i [j(\omega \pm \omega_0)]^i}{\sum_{i=0}^n g_i [j(\omega \pm \omega_0)]^i}, \quad m \leq n, \quad (1)$$

где ω_0 – частота настройки фильтра; p_i, g_i – весовые коэффициенты.

Для перехода к дискретному полосовому фильтру воспользуемся смещенным билинейным z - преобразованием [5]

$$j(\omega \pm \omega_0) = \frac{2}{T} \frac{1 - z_0^{\pm 1} z^{-1}}{1 + z_0^{\pm 1} z^{-1}}. \quad (2)$$

Здесь $z_0 = e^{j\omega_0 T}$, $z^{-1} = e^{-j\omega T}$, T – период дискретности. После подстановки соотношения (2) в выражение (1) получим передаточную функцию действительного дискретного полосового фильтра в z - плоскости:

$$W_{\text{пд}}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z_0^{\pm i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z_0^{\pm i} z^{-i}}. \quad (3)$$

В данном выражении a_i, b_i – весовые коэффициенты нерекурсивной и рекурсивной частей передаточной функции. Из соотношений (1) и (3) следует, что передаточная функция действительного дискретного полосового фильтра содержит две ветви, симметрично расположенные относительно нуля частот в областях положительных и отрицательных частот с частотами настройки ω_0 и $-\omega_0$.

При этом для действительного дискретного полосового фильтра формула (3) приобретает вид:

$$W_{\text{пд}}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z_0^i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z_0^i z^{-i}} + \frac{\sum_{i=0}^n a_i z_0^{-i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z_0^{-i} z^{-i}}. \quad (4)$$

Первое слагаемое в соотношении (4) соответствует ветви передаточной функции в области положительных частот с частотой настройки ω_0 , а второе слагаемое определяет ветвь передаточной функции в области отрицательных частот с частотой настройки $-\omega_0$.

Выражение (4) перепишем следующим образом:

$$W_{\text{пд}}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n \dot{a}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n \dot{b}_i z^{-i}} + \frac{\sum_{i=0}^n \dot{a}_i^* z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n \dot{b}_i^* z^{-i}},$$

где комплексные весовые коэффициенты записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= a_i z_0^i = a_i \cos(i\omega_0 T) + j a_i \sin(i\omega_0 T), \\ \dot{a}_i^* &= a_i z_0^{-i} = a_i \cos(i\omega_0 T) - j a_i \sin(i\omega_0 T), \\ \dot{b}_i &= b_i z_0^i = b_i \cos(i\omega_0 T) + j b_i \sin(i\omega_0 T), \\ \dot{b}_i^* &= b_i z_0^{-i} = b_i \cos(i\omega_0 T) - j b_i \sin(i\omega_0 T). \end{aligned} \quad (5)$$

После операции сложения выражение (4) можно записать следующим образом:

$$W_{\text{пд}}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{2n} A_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{2n} B_i z^{-i}}. \quad (6)$$

В данном соотношении A_i и B_i – весовые коэффициенты действительного дискретного полосового фильтра.

Далее запишем в общем виде частотную передаточную функцию комплексного полосового фильтра [5]:

$$W_{\text{ПК}}(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^m k_i [j(\omega - \omega_0)]^i}{\sum_{i=0}^n s_i [j(\omega - \omega_0)]^i},$$

где, как и ранее, ω_0 – частота настройки фильтра.

Для перехода к комплексному дискретному полосовому фильтру используем смещенное билинейное z – преобразование [5]:

$$j(\omega - \omega_0) = \frac{2}{T} \frac{1 - z_0 z^{-1}}{1 + z_0 z^{-1}}.$$

В результате получим передаточную функцию комплексного полосового фильтра в z – плоскости:

$$W_{\text{ПК}}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n \dot{a}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n \dot{b}_i z^{-i}}, \quad (7)$$

где n – порядок фильтра, $\dot{a}_i$ и $\dot{b}_i$ – комплексные весовые коэффициенты, которые имеют вид:

$$\dot{a}_i = a_i e^{ji\omega_0 T}, \quad \dot{b}_i = b_i e^{ji\omega_0 T}.$$

Из соотношения (7) можно получить следующее разностное уравнение, определяющее алгоритм работы комплексного фильтра:

$$\dot{u}_{\text{ВЫХ}}[m] = \sum_{i=0}^n \dot{u}_{\text{ВХ}}[m-i] \dot{a}_i - \sum_{i=1}^n \dot{u}_{\text{ВЫХ}}[m-i] \dot{b}_i. \quad (8)$$

В данном выражении $\dot{u}_{\text{ВХ}}[m]$ и $\dot{u}_{\text{ВЫХ}}[m]$ – отсчеты комплексных значений входного и выходного сигналов. Запишем комплексные входной и выходной

сигналы, а также весовые коэффициенты через их вещественные и мнимые составляющие:

$$\begin{aligned} \dot{u}_{\text{BX}}[m] &= u_{\text{BX}}^x[m] + ju_{\text{BX}}^y[m], \\ \dot{u}_{\text{ВЫХ}}[m] &= u_{\text{ВЫХ}}^x[m] + ju_{\text{ВЫХ}}^y[m], \\ \dot{a}_i &= a_{ix} + ja_{iy}, \quad \dot{b}_i = b_{ix} + jb_{iy}. \end{aligned} \quad (9)$$

Для получения квадратурных составляющих входного сигнала комплексного фильтра $u_{\text{BX}}^x[m]$, $u_{\text{BX}}^y[m]$ на практике используются два фазовых детектора.

На рис. 1 показана структура устройства обработки сигнала, в состав которой входят два квадратурных канала с фазовыми детекторами ФД со сдвинутыми на 90° опорными напряжениями, генератор опорного напряжения ГОН и аналого-цифровые преобразователи АЦП. В фазовых детекторах принимаемые высокочастотные сигналы $u_{\text{BX}}(t) = U_{\text{BX}} \sin(\omega_c t)$ преобразуются на видеочастоту в виде последовательности отсчетов квадратурных составляющих $u_{\text{BX}}^x[m]$ и $u_{\text{BX}}^y[m]$.

На основании выражений (8) и (9) квадратурные составляющие выходного сигнала комплексного фильтра принимают на вид:

$$\begin{aligned} u_{\text{ВЫХ}}^x[m] &= \sum_{i=0}^n \{u_{\text{BX}}^x[m-i]a_i^x - u_{\text{BX}}^y[m-i]a_i^y\} - \sum_{i=1}^n \{u_{\text{ВЫХ}}^x[m-i]b_i^x - u_{\text{ВЫХ}}^y[m-i]b_i^y\}, \\ u_{\text{ВЫХ}}^y[m] &= \sum_{i=0}^n \{u_{\text{BX}}^x[m-i]a_i^y + u_{\text{BX}}^y[m-i]a_i^x\} - \sum_{i=1}^n \{u_{\text{ВЫХ}}^x[m-i]b_i^y + u_{\text{ВЫХ}}^y[m-i]b_i^x\}. \end{aligned}$$

Полученные соотношения определяют алгоритм работы дискретного комплексного фильтра.

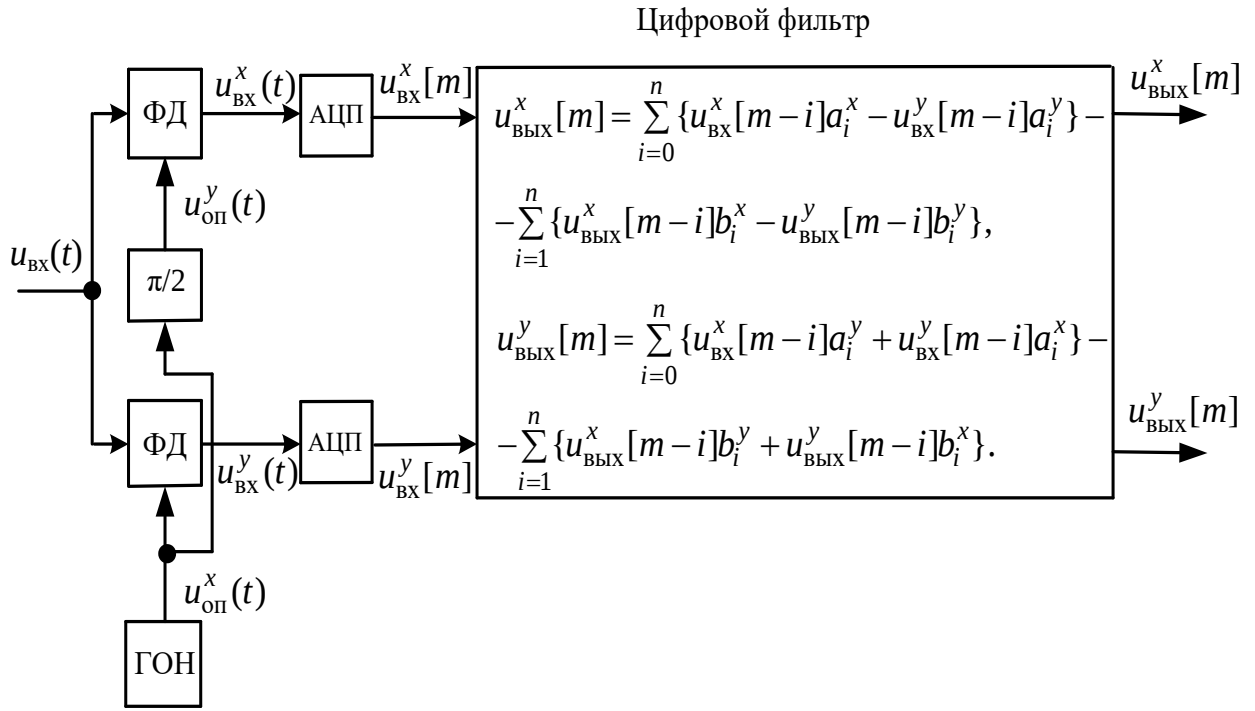


Рис. 1. Структура устройства обработки сигнала.

Задача преобразования действительного дискретного полосового фильтра в комплексный полосовой фильтр сводится к следующему. По заданным весовым коэффициентам A_i и B_i действительного полосового фильтра необходимо найти весовые коэффициенты $\dot{a}_i$ и $\dot{b}_i$ комплексного полосового фильтра при условии сохранения формы амплитудных частотных характеристик (АЧХ) и фазовых частотных характеристик (ФЧХ) действительного и комплексного фильтров.

Пример. Пусть действительный полосовой фильтр четвертого порядка задан своими весовыми коэффициентами $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$, а также известны частота настройки фильтра ω_0 и период дискретности T или задано произведение $\omega_0 T$. После проведения в выражении (4) громоздких преобразований с учетом формул (5) получим следующие соотношения для весовых коэффициентов:

$$A_0 = 2a_0, \quad A_1 = 4(a_1 + a_0 b_1) \cos(\omega_0 T), \quad A_2 = 2[a_1 b_1 + (a_2 + a_0 b_2) \cos(2\omega_0 T)],$$

$$A_3 = 2(a_2 b_1 + a_1 b_2) \cos(\omega_0 T), \quad A_4 = 2a_2 b_2, \quad B_1 = 2b_1 \cos(\omega_0 T),$$

$$B_2 = b_1^2 + 2b_2 \cos(2\omega_0 T), \quad B_3 = 2b_1 b_2 \cos(\omega_0 T), \quad B_4 = b_2^2.$$

Из данных выражений находим искомые коэффициенты комплексного дискретного полосового фильтра:

$$a_0 = A_0 / 2, a_1 = A_1 - 4a_0b_1 \cos(\omega_0 T), a_2 = A_4 / (2b_2), b_1 = B_1 / [2 \cos(\omega_0 T)],$$

$$b_2 = B_3 / [2b_1 \cos(\omega_0 T)].$$

На рис. 2 и рис. 3 показаны АЧХ исходного действительного дискретного полосового фильтра и полученного комплексного дискретного полосового фильтра при $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 100$ Гц, $T = 10^{-3}$ с и:

$$A_0 = 5,426152646527752 \times 10^{-4}, A_1 = 4,137667107853679 \times 10^{-5},$$

$$A_2 = 0,00179168227654, A_3 = -1,973553575545793 \times 10^{-5},$$

$$A_4 = 5,176319382357831 \times 10^{-5}, B_1 = -3,15981381774073,$$

$$B_2 = 4,40328856737368, B_3 = -3,01432830495101, B_4 = 0,91003504157241.$$

При этом получим следующие значения коэффициентов комплексного полосового дискретного фильтра:

$$a_0 = 2,713076323263876 \times 10^{-4},$$

$$a_1 = 5,426152646527750 \times 10^{-4},$$

$$a_2 = 2,713076323263876 \times 10^{-4},$$

$$b_1 = -1,95287233748534,$$

$$b_2 = 0,95395756801464.$$

Представленные на рис. 2 и рис. 3 графики показывают полное совпадение АЧХ комплексного полосового и одной из ветвей АЧХ действительного полосового дискретного фильтра.

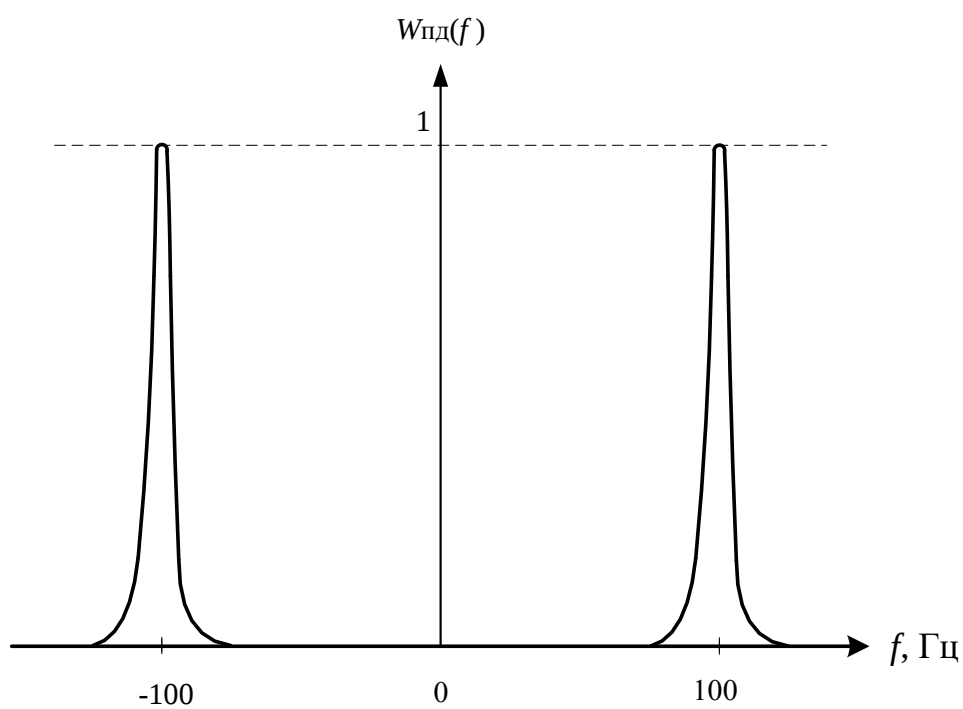


Рис. 2. АЧХ действительного полосового дискретного фильтра.

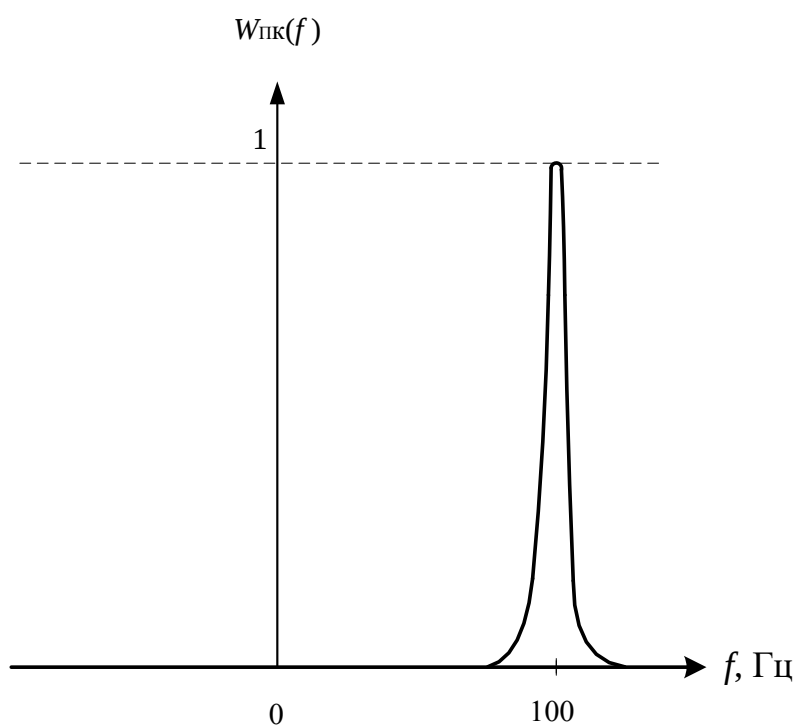


Рис. 3. АЧХ комплексного полосового дискретного фильтра.

3. Преобразование действительного режекторного дискретного фильтра в комплексный режекторный дискретный фильтр

Согласно [7,8] передаточная функция действительного режекторного фильтра представляется произведением передаточных функций двух комплексных режекторных фильтров с частотами настройки ω_0 и $-\omega_0$:

$$W_{\text{рд}}(z) = W_1(z)W_2(z), \quad (10)$$

где:

$$W_1(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z_0^i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z_0^i z^{-i}} \quad \text{и} \quad W_2(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z_0^{-i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z_0^{-i} z^{-i}}. \quad (11)$$

В результате передаточная функция действительного режекторного дискретного фильтра принимает вид:

$$W_{\text{рд}}(z) = \frac{\sum_{i=0}^{2n} A_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^{2n} B_i z^{-i}}. \quad (12)$$

При этом преобразование действительного режекторного дискретного фильтра в комплексный режекторный дискретный фильтр с сохранением формы АЧХ сводится к нахождению весовых коэффициентов $\dot{a}_i$ и $\dot{b}_i$ комплексного режекторного фильтра по заданным весовым коэффициентам $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$ действительного режекторного фильтра.

Пример. Будем считать, что действительный дискретный режекторный фильтр четвертого порядка задан весовыми коэффициентами $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, B_0, B_1, B_2, B_3, B_4$, а также известны, как и ранее, частота настройки фильтра ω_0 и период дискретности T или задано произведение $\omega_0 T$. Нетрудно показать,

что в рассматриваемом случае передаточная функция режекторного дискретного фильтра (11) с учетом выражений (10) может быть записана следующим образом:

$$W_{\text{рд}}(z) = \frac{\sum_{i=0}^n \dot{a}_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n \dot{b}_i z^{-i}} \cdot \frac{\sum_{i=0}^n \dot{a}_i^* z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n \dot{b}_i^* z^{-i}}, \quad (12)$$

После подстановки выражений (5) в формулу (12) и проведения громоздких преобразований получим следующие соотношения для весовых коэффициентов действительного режекторного дискретного фильтра:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0^2, \quad A_1 = 2a_0 a_1 \cos(\omega_0 T), \quad A_2 = a_1^2 + 2a_0 a_2 \cos(2\omega_0 T), \quad A_3 = 2a_1 a_2 \cos(\omega_0 T), \\ A_4 &= A_0 = a_2^2, \quad B_1 = 2b_1 \cos(\omega_0 T), \quad B_2 = b_1^2 + 2b_2 \cos(2\omega_0 T), \quad B_3 = 2b_1 b_2 \cos(\omega_0 T), \\ B_4 &= b_2^2. \end{aligned}$$

Из данных выражений находим формулы для коэффициентов комплексного режекторного фильтра:

$$\begin{aligned} a_0 &= \sqrt{A_0}, \quad a_1 = A_1 / [2a_0 \cos(\omega_0 T)], \quad a_2 = A_3 / (2a_1 \cos(\omega_0 T)), \\ b_1 &= B_1 / [2 \cos(\omega_0 T)], \quad b_2 = B_3 / [2b_1 \cos(\omega_0 T)]. \end{aligned}$$

На рис. 4 и рис. 5 представлены АЧХ исходного действительного режекторного дискретного фильтра и полученного комплексного режекторного дискретного фильтра при $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 100$ Гц, $T = 10^{-3}$ с и значениях весовых коэффициентов:

$$\begin{aligned} A_0 &= 0,95395749440681, \quad A_1 = -3,08707129954582, \quad A_2 = 4,40540813299334, \\ A_3 &= -3,08707129954582, \quad A_4 = 0,95395749440681, \quad B_1 = -3,15981381774073, \\ B_2 &= 4,40328856737368, \quad B_3 = -3,01432830495101, \quad B_4 = 0,91003504157241. \end{aligned}$$

При этом получены следующие значения коэффициентов комплексного режекторного фильтра:

$$a_0 = 0,97670747637499, a_1 = -1,95341495274999, a_2 = 0,97670747637499,$$

$$b_1 = -1,95287233748534, b_2 = 0,95395756801464.$$

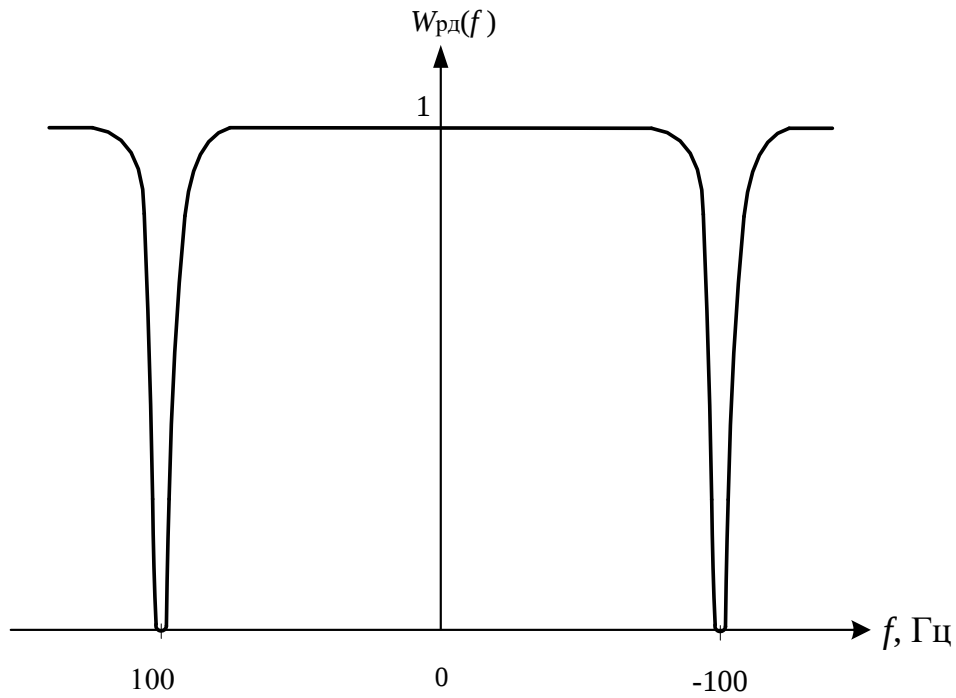


Рис. 4. АЧХ действительного режекторного дискретного фильтра.

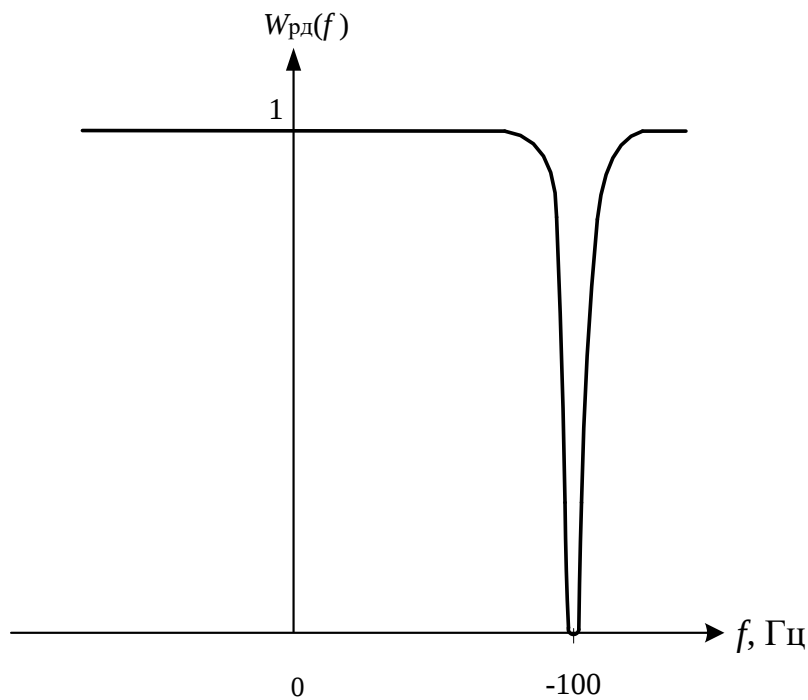


Рис. 5. АЧХ комплексного режекторного дискретного фильтра.

Из показанных на рис. 4 и рис. 5 АЧХ действительного и комплексного дискретных режекторных фильтров следует их полное совпадение.

Следует отметить, что при вычислении весовых коэффициентов комплексных фильтров предполагались известными частота настройки фильтра ω_0 и период дискретности T или их произведение. В тех практических случаях, когда неизвестна частота настройки фильтра, но задан период дискретности, можно по заданным весовым коэффициентам действительного фильтра вычислить и построить его АЧХ, по которой легко определить значение частоты настройки фильтра.

4 Обсуждение результатов.

Преобразование действительных полосовых и режекторных дискретных фильтров в комплексные дискретные фильтры основывается на представлении действительных полосовых дискретных фильтров в виде параллельно включенных двух дискретных полосовых комплексных фильтров с частотными характеристиками, симметрично расположенными относительно нуля частот в области положительных и отрицательных частот. В тоже время действительные режекторные дискретные фильтры рассматриваются как два последовательно включенные дискретные режекторные комплексные фильтра с частотными характеристиками, также симметрично расположенными относительно нуля частот в области положительных и отрицательных частот. В результате преобразований вещественные весовые коэффициенты действительных фильтров пересчитываются в комплексные весовые коэффициенты, содержащие вещественную и мнимую составляющие.

Заключение

Предложенная в работе методика преобразования действительных фильтров в комплексные позволяет по заданным весовым коэффициентам действительных дискретных полосовых и режекторных фильтров вычислить весовые коэффициенты комплексных дискретных полосовых и режекторных

фильтров. Произведенные расчеты показали полное совпадение АЧХ комплексных и действительных дискретных полосовых и режекторных фильтров. Представленные материалы могут быть использованы при разработке когерентных систем и устройств обработки комплексных сигналов, таких как доплеровские измерители скорости, системы селекции движущихся целей и т. д.

Литература

1. Зиятдинов С. И. Синтез нерекурсивных дискретных фильтров во временной области. *Информационно-управляющие системы*. 2016. № 5. С. 98-101. <https://doi.org/10.15217/issn1684-8853.2016.5.98>
2. Зиятдинов С. И. Анализ линейных систем на основе переходных характеристик. *Информационно-управляющие системы*. 2016. № 2. С. 104-106. <https://doi.org/10.15217/issn1684-8853.2016.2.104>
3. Зиятдинов С. И. Синтез дискретных фильтров методами инвариантных дифференциальных и интегральных уравнений. *Изв. вузов. Приборостроение*. 2019. Т. 62. № 5. С. 424-432. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.12.6>
4. Воробьев С.Н. *Цифровая обработка сигналов*. М.: Академия, 2013. 318 с.
5. Зиятдинов С. И., Соколова Ю.В. Синтез комплексных дискретных фильтров. *Изв. вузов. Радиоэлектроника*. 2017. № 4. С. 12-19.
6. Бакулев П. А., Стенин В. М. *Методы и устройства селекции движущихся целей*. М.: Радио и связь, 1986. 286 с.
7. Куприянов М. С., Матюшкин Б. Д. *Цифровая обработка сигналов*. СПб.: Политехника, 2000. 592 с.
8. Гоноровский И. С. *Радиотехнические цепи и сигналы*. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.

Для цитирования:

Зиятдинов С.И., Красильникова О.И. Метод синтеза комплексных дискретных фильтров. // Журнал радиоэлектроники. – 2026. – №. 8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.8.8>