

УДК 621.391

УВЕЛИЧЕНИЕ ОТНОШЕНИЯ СИГНАЛ/ШУМ МЕТОДОМ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ

С. А. Останин

Алтайский государственный университет, г. Барнаул

Получена 30 ноября 2011 г.

Аннотация. В работе предложен метод увеличения отношения сигнал/шум сигнала основанный на последовательном вычислении автокорреляционной функции. Метод позволяет повысить отношение сигнал/шум гармонических и периодических негармонических сигналов. Приведены результаты работы обнаружителя сигнала построенного с использованием LabVIEW.

Ключевые слова: обнаружение слабых сигналов, автокорреляционный анализ.

Abstract. In this paper we propose a method of increasing the signal / noise signal based on the sequential calculation of the autocorrelation function. The method allows to improve the signal / noise ratio of harmonic and periodic non-harmonic signals. The results of the detector signal is constructed using LabVIEW.

Keywords: detection of low signals, autocorrelation analysis.

Для обнаружения слабых сигналов в аддитивной смеси с шумом используют, например, корреляционные методы анализа сигнала [1]. В частности, при измерении частоты доплеровских сигналов лазерных анемометров, для оценки скорости движения частиц аэрозоля, с целью увеличения отношения сигнал/шум вычисляют автокорреляционную функцию сигнала [2-3]. Поступающий с фотоприемного устройства сигнал проходит через фильтр высоких частот и при этом теряет постоянную составляющую. Частоту среза выбирают заведомо ниже минимально возможной частоты доплеровского сигнала с тем, чтобы не потерять информацию о скорости

движения отражающих объектов. Процессор вычисляет автокорреляционную функцию доплеровского сигнала и по периоду этой функции судят о частоте доплеровского сигнала. Увеличение отношения сигнал/шум зависит, в том числе от длительности сигнала. В тех случаях, когда длительности сигнала увеличить не представляется возможным (например, доплеровские сигналы лазерных анемометров), возникает проблема поиска альтернативных методов повышения отношения сигнал/шум.

Для обнаружения и анализа сигналов такого рода предлагается использовать метод последовательного вычисления автокорреляционной функции, заключающийся в том, что после вычисления автокорреляционной функции исходного сигнала вычисляется автокорреляционная функция от автокорреляционной функции и так далее. При этом отношение с/ш растет от итерации к итерации. Процесс повторяется до тех пор, пока отношение с/ш становится достаточным для определения частоты доплеровского сигнала.

Рассмотрим применение метода для повышения отношения с/ш для гармонического сигнала. Пусть исходный сигнал $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь периодического детерминированного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$, являющегося стационарным процессом второго порядка:

$$x(t) = s_0 \cos \omega t + n(t). \quad (1)$$

Дополнительно предположим, что функции $s(t)$ и $n(t)$ – центрированы. Автокорреляционная функция для сигнала $x(t)$, по определению, вычисляется следующим образом:

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [s(t) + n(t)] \cdot [s(t - \tau) + n(t - \tau)] dt .$$

Отсюда, оценка автокорреляционной функции, в силу дистрибутивности корреляционного оператора, есть

$$\overline{C_{xx}(\tau)} = \overline{C_{ss}(\tau)} + \overline{C_{nn}(\tau)} + \overline{C_{sn}(\tau)} + \overline{C_{ns}(\tau)} .$$

При условии независимости сигнала $s(t)$ от шума $n(t)$, корреляционные функции $\overline{C_{sn}(\tau)}$ и $\overline{C_{ns}(\tau)}$ тождественно равны нулю с точностью до

погрешностей оценок, обусловленных конечным временем интегрирования. Автокорреляционная функция шума $\overline{C_m(\tau)}$ стремится к нулю с возрастанием задержки τ и для достаточно больших значений, больших по модулю некоторого времени задержки τ_1 , $\overline{C_m(\tau)}=0$. Значение τ_1 , начиная с которого автокорреляционную функцию $\overline{C_m(\tau)}$ можно положить равной нулю, зависит от характеристик шума, в частности, от его спектральной плотности: чем шире полоса частот шума при заданной полной мощности, тем быстрее убывает автокорреляционная функция. И так,

$$\overline{C_{xx}(\tau)} = \overline{C_{ss}(\tau)} + \varepsilon(\tau), \quad (2)$$

где ошибка $\varepsilon(\tau)$ тем меньше, чем больше время интегрирования T . Фурье-образ автокорреляционной функции $C_{ss}(\tau)$ представляет собой спектр мощности и поэтому равен квадрату Фурье-образа самой функции $s(t)$. А это значит, что автокорреляционная функция содержит все частоты функции $s(t)$, и только эти частоты. Если, например, $x(t)$ – сигнал фотоприемника доплеровского анемометра, то частота сигнала равна частоте его автокорреляционной функции $C_{ss}(\tau)$. Если обозначить отношение с/ш до вычисления автокорреляции R_e , а после вычисления – R_s , то увеличение отношения с/ш по мощности, для гармонического сигнала $s(t)$ определяется [2] формулой:

$$G = R_s / R_e \approx 2TB / (2+1/R_e).$$

Если $R_e \ll 1$, то

$$G = R_s / R_e \approx 2TBR_e, \quad (3)$$

$$R_s \approx 2TBR_e^2. \quad (4)$$

Далее, введем обозначения

$$\begin{aligned} \tau &\equiv t' \\ \overline{C_{xx}(\tau)} &\equiv x'(t') \\ \overline{C_{ss}(\tau)} &\equiv s'(t') \\ \varepsilon(\tau) &\equiv n'(t') \\ R_s &\equiv R'_e \end{aligned} \quad (5)$$

поскольку периодическая составляющая содержится в функции $\overline{C_{ss}(\tau)}$, а шум –

в функции $\varepsilon(\tau)$. Функция $\varepsilon(\tau)$, также как и $n(t)$, является центрированной случайной стационарной функцией, отличающейся от $n(t)$ тем, что имеет меньшую дисперсию. Следовательно, можно вычислить автокорреляционную функцию еще раз, теперь уже от функции $x'(t')$. В результате получим функцию $C_{x'x'}(\tau')$, которая содержит все частоты исходной функции $C_{xx}(\tau)$, но имеет более высокое отношение с/ш. Определим увеличение отношения с/ш для второй автокорреляционной функции $C_{x'x'}(\tau')$. С учетом обозначений (5), соотношение (4) описывающее новое отношение с/ш, вычисленное в соответствии с методикой, изложенной в [4], примет вид

$$R'_s = 2TBR_e'^2 = 2TB(2TBR_e^2)^2 = (2TB)^3 R_e^4.$$

Увеличение отношения с/ш по мощности будет равно

$$G' = R'_s / R'_e = R'_s / R_s \approx (2TB)^3 R_e^4 / (2TBR_e^2) = (2TBR_e)^2$$

при сравнении функций $C_{x'x'}(\tau')$ и $C_{xx}(\tau)$. Если сравнивать отношение с/ш R'_s функции $C_{x'x'}(\tau')$ и отношение с/ш R_e исходной функции $x(t)$, то увеличение отношения с/ш по мощности будет равно

$$G'_0 = R'_s / R_e = (2TB)^3 R_e^4 / R_e = (2TBR_e)^3$$

Если процедуру последовательного переобозначения и вычисления автокорреляционной функции осуществлять N раз, то отношение с/ш возрастет соответственно в $G_{0,N}$ раз по мощности

$$G_{0,N} = \frac{R_N}{R_0} = \frac{R_N}{R_e} = (2TBR_e)^{2^{N-1}}, \quad (6)$$

где $R_0 \equiv R_e$, R_N – отношение с/ш, вычисленное для автокорреляционной функции, имеющей номер N в ряду последовательно вычисленных автокорреляционных функций, а отношение с/ш для итерации с номером N

$$R_N = (2TB)^{2^{N-1}} R_e^{2^N}. \quad (7)$$

На рисунке 1 представлена зависимость отношения с/ш (R_N) от количества процедур вычисления автокорреляционных функций N для произвольно выбранных исходных отношений с/ш (R_e), T , B . Численные

эксперименты по определению зависимости R_N от количества процедур, выполненные в среде LabVIEW и выражение (7) дают практически одинаковый результат (коэффициент вариации составляет величину 0,01).

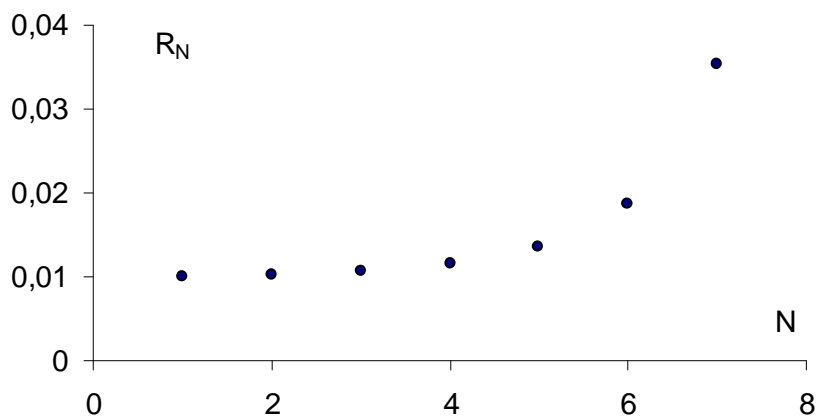
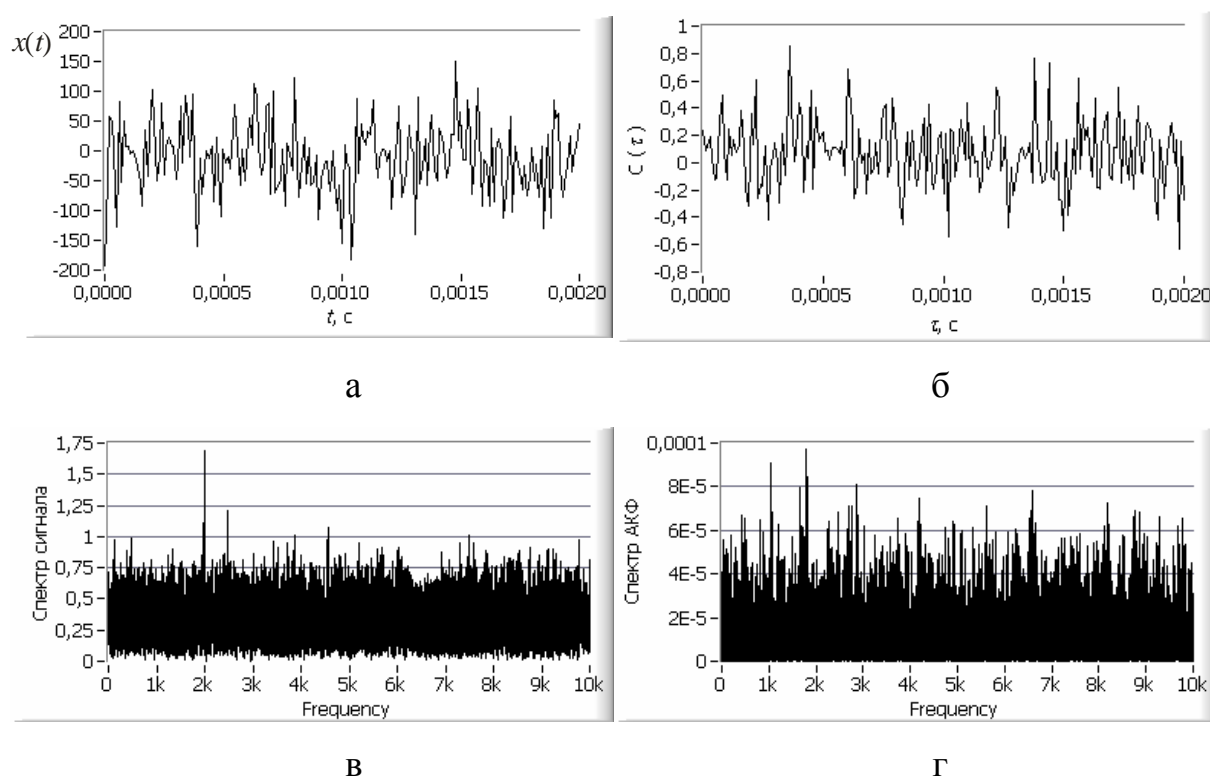


Рис. 1. Зависимость отношения с/ш R_N от количества процедур вычисления автокорреляционных функций N .

На рисунке 2а представлен фрагмент исходного сигнала вида (1) с отношением сигнал/шум $c/ш = s_0^2 / (2\sigma_n^2) = 1,5 \cdot 10^{-4}$, нормированная автокорреляционная функция сигнала (2б), спектр сигнала (2в) и спектр автокорреляционной функции (2г).



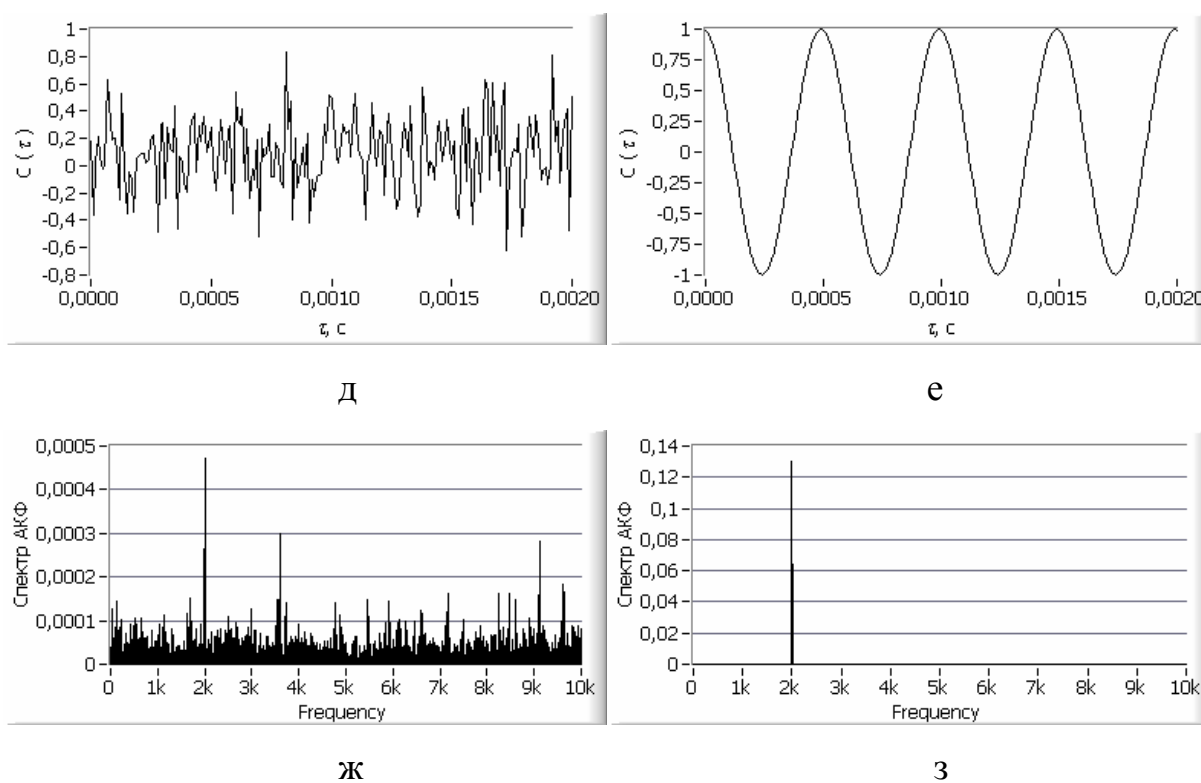


Рис. 2. а – исходный сигнал с отношением $s/\text{ш} = 1,5 \cdot 10^{-4}$,
 б – автокорреляционная функция сигнала, в – спектр сигнала, г – спектр
 автокорреляционной функции сигнала, д, е – вторая и пятая
 автокорреляционная функция, ж, з – их спектры.

Численно моделированный в среде LabVIEW сигнал содержал 10^5 дискретных значений, $\omega/2\pi = 2\text{кГц}$, длительность – 1с. Как видно из рисунка, при таком низком отношении $s/\text{ш}$ обнаружить детерминированную компоненту сигнала $s(t)$ в смеси с шумом по автокорреляционной функции практически невозможно. Спектры второй (рисунок 2ж) и пятой (рисунок 2з) автокорреляционных функций содержат указанную гармонику, причем наблюдается рост отношения $s/\text{ш}$ в каждой последующей автокорреляционной функции.

Рассмотрим другой случай, когда исходный сигнал $x(t)$ представляет собой аддитивную смесь периодического, но не гармонического детерминированного сигнала $s(t)$ и шума $n(t)$, являющегося стационарным процессом второго порядка:

$$x(t) = s(t) + n(t) = \sum_{i=1}^k s_i(t) + n(t),$$

где k – количество гармоник сигнала $s(t)$.

Оценка автокорреляционной функции, как и прежде, имеет вид

$$\overline{C_{xx}(\tau)} = \overline{C_{ss}(\tau)} + \varepsilon(\tau),$$

здесь

$$C_{xx}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [s(t) + n(t)] \cdot [s(t - \tau) + n(t - \tau)] dt,$$

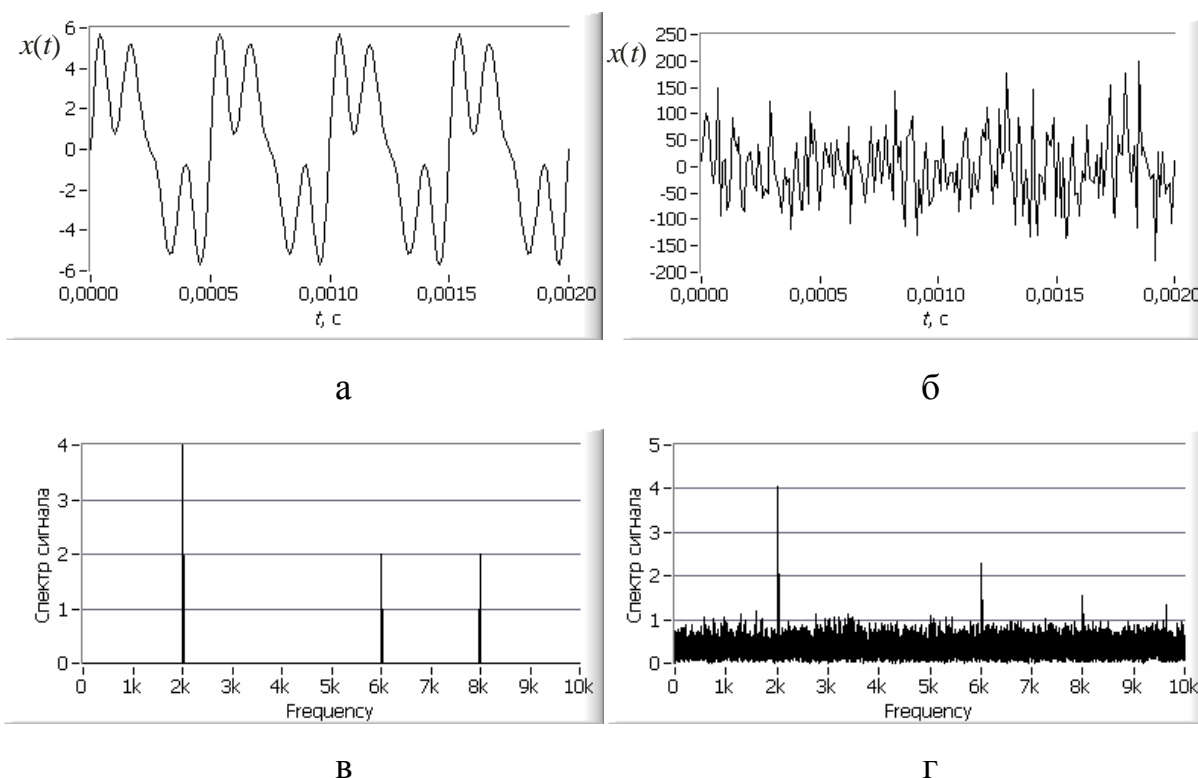
$$s(t) = \sum_{i=1}^k s_i(t) = \sum_{i=1}^k s_{i0} \cos \omega_i t$$

Сделаем ее оценку $C_{xx}(\tau)$:

$$\hat{C}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \left[\sum_{i=1}^k s_{i0} \cos \omega_i t + n(t) \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^k s_{j0} \cos \omega_j (t - \tau) + n(t - \tau) \right] dt. \quad (8)$$

Выражение (8) содержит слагаемые

$$\hat{C}_{nn}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) \cdot n(t - \tau) dt,$$



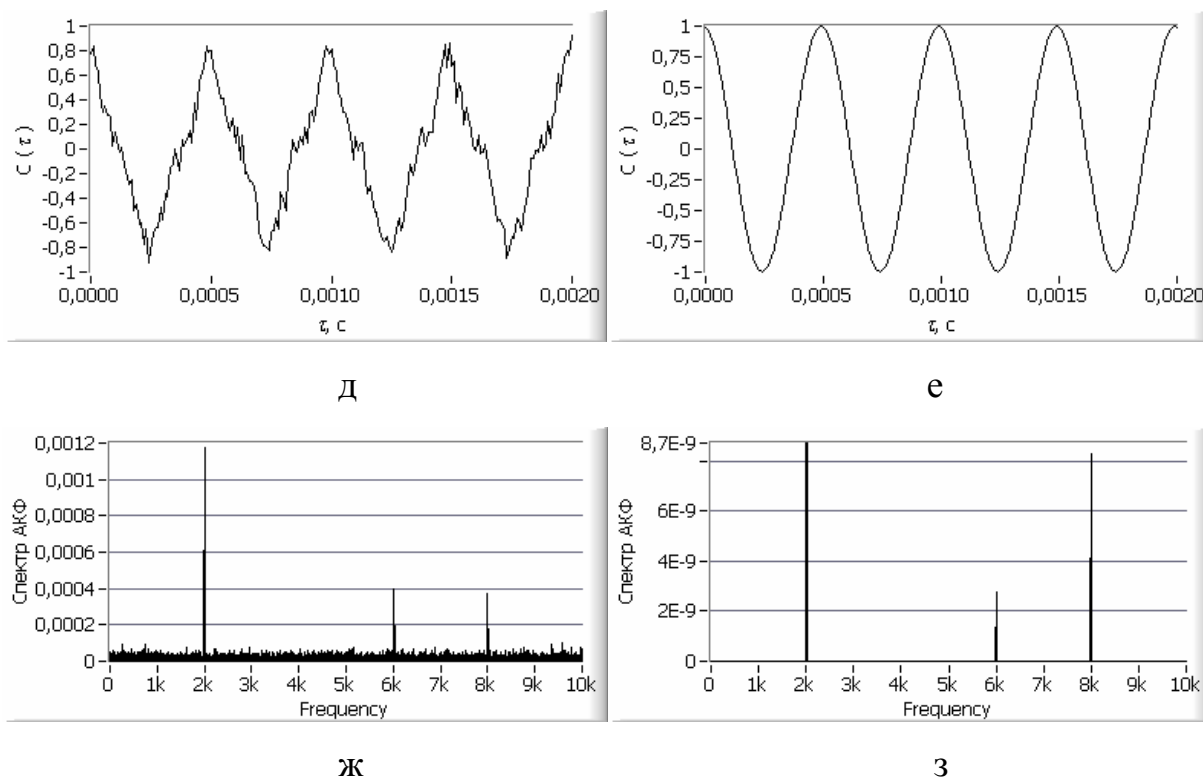


Рис. 3. а – исходный сигнал с отношением с/ш = $2 \cdot 10^{-4}$, б – автокорреляционная функция сигнала, в – спектр сигнала, г – спектр автокорреляционной функции сигнала, д, е – вторая и пятая автокорреляционная функция, ж, з – их спектры.

$$\hat{C}_{sn}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^k s_{i0} \cos \omega_i t \right) \cdot n(t - \tau) dt,$$

$$\hat{C}_{ns}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T n(t) \cdot \left(\sum_{i=1}^k s_{j0} \cos \omega_j (t - \tau) \right) dt,$$

которые стремятся к нулю, с ростом T и

$$\hat{C}_{ss}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{i=1}^k s_{i0} \cos \omega_i t \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^k s_{j0} \cos \omega_j (t - \tau) \right) dt. \quad (9)$$

При $i \neq j$ ($\omega_i \neq \omega_j$), слагаемые в (9) стремятся к нулю, а при $i = j$

($\omega_i = \omega_j, s_{i0} = s_{j0}$) $\hat{C}_{s_i s_i}(\tau) = \frac{s_{i0}^2}{2} \cos \omega_i \tau$. Это означает, что спектры всех

вычисляемых автокорреляционных функций от периодических негармонических сигналов содержат только гармоники сигнала $s(t)$.

На рисунке 3 проиллюстрированы результаты использования предложенного метода полученные с использованием LabVIEW. Сигнал $s(t)$ представлял собой суперпозицию трех гармоник с частотами 2кГц, 6кГц, 8кГц. Отношение сигнал/шум модельного сигнала, для гармоники 2кГц $c/\text{ш} = s_0^2 / (2\sigma_n^2) = 2 \cdot 10^{-4}$. Из рисунка видно, что с увеличением количества вычисляемых автокорреляционных функций отношение сигнал/шум увеличивается. На рисунке 3e (пятая автокорреляционная функция) визуально можно обнаружить только низшую гармонику сигнала, однако спектр автокорреляционной функции (рисунок 3з) позволяет надежно обнаруживать все гармоники исходного сигнала $s(t)$.

Таким образом, показана возможность повышения отношения сигнал/шум слабых гармонических и негармонических периодических сигналов в случае, если для исследования предоставлена только одна реализация сигнала и не существует возможности увеличить длительность сигнала каким-либо образом.

Литература

1. Ван Трис Г. Теория обнаружения, оценок и модуляции. / Пер.с англ. - М., Советское радио, 1972. - Т.1.
2. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. – М.: Мир, 1983 – Т.1,2.
3. С.Д. Бураков, А.П. Годлевский, С.А. Останин Определение микрофизических параметров аэрозоля приемопередатчиком на основе твердотельного лазера // Оптика атмосферы.– 1989.– №2.– С. 206-210