

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.12.6>

УДК: 621.372

## СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ ПОЛОСОВЫХ И РЕЖЕКТОРНЫХ ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ ИНВАРИАНТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

С. И. Зиятдинов

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического  
приборостроения  
190000, г. Санкт-Петербург, ул. Большая Морская, д. 67

Статья поступила в редакцию 10 декабря 2021 г.

**Аннотация.** *Введение* – Рассмотрен вопрос построения дискретных полосовых и режекторных фильтров с использованием дифференциальных уравнений непрерывных фильтров-аналогов нижних и верхних частот. *Цель* – Разработка методики синтеза перестраиваемых полосовых и режекторных фильтров с неизменной шириной и формой амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) независимо от частоты настройки фильтров. *Постановка задачи* – На основании инвариантных дифференциальных уравнений непрерывных фильтров-аналогов нижних и верхних частот найти весовые коэффициенты разностных уравнений, определяющих работу дискретных полосовых и режекторных фильтров, обладающих неизменной шириной и формой АЧХ в условиях переменной частоты настройки фильтров. *Метод* – В основу синтеза положено представление математической частотной передаточной функции фильтра отдельно в области положительных и отрицательных частот, для каждой из которых применяется смещенное на частоту настройки выделенной области билинейное  $z$ -преобразование. *Результаты* – По заданным дифференциальным уравнениям непрерывных фильтров-аналогов нижних и верхних частот получены разностные уравнения дискретных фильтров. Представлены смещенные на частоты настройки передаточных функций фильтра билинейные  $z$ -преобразования. Получены передаточные функции в  $z$ -плоскости отдельно для

областей частотной передаточной функции фильтра, расположенных в диапазонах положительных и отрицательных частот. Путем суммирования передаточных функций в  $z$ -плоскости для областей положительных и отрицательных частот и перемножения данных передаточных функций получены итоговые передаточные функции в  $z$ -плоскости для дискретных полосовых и режекторных фильтров. Переходом от  $z$ -плоскости к  $j\omega$  получены выражения для частотных передаточных функций синтезированных полосовых и режекторных фильтров. Произведен расчет их амплитудно-частотных характеристик. Показано, что ширина и форма АЧХ синтезированных фильтров остается постоянной при изменении частоты настройки фильтров.

**Практическая значимость** – Разработанная методика синтеза перестраиваемых действительных дискретных полосовых и режекторных фильтров с постоянной шириной и формой АЧХ на базе инвариантных дифференциальных уравнений непрерывных фильтров-аналогов будет весьма полезна при построении адаптивных систем и устройств обработки сигналов, таких как системы обнаружения и фильтрации сигналов, доплеровских измерителей скорости, систем селекции движущихся целей.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, дискретные фильтры, весовые коэффициенты, частотные характеристики.

**Abstract. Introduction** – The issue of constructing discrete band-pass and notch filters using differential equations of continuous analog filters of low and high frequencies is considered. **Purpose** – Development of a technique for the synthesis of tunable band-pass and notch filters with a constant width of the amplitude-frequency characteristics, regardless of the filter tuning frequency. **Setting the task** – Based on the invariant differential equations of continuous analog filters of low and high frequencies, find the weight coefficients of the difference equations that determine the operation of discrete bandpass and notch filters that have a constant width of amplitude-frequency characteristics under conditions of variable filter tuning frequency. **Method** – The synthesis is based on the presentation of the mathematical frequency transfer function of the filter separately in the region of positive and negative frequencies, for each of

which a bilinear  $z$ -transform is applied shifted to the tuning frequency of the selected region. **Results** – Difference equations of discrete filters are obtained from the given differential equations of continuous analog filters of low and high frequencies. Frequency-shifted bilinear  $z$ -transformations are presented. Transfer functions in the  $z$ -plane are obtained separately for the regions of the frequency transfer function of the filter located in the ranges of positive and negative frequencies. By summing the transfer functions in the  $z$ -plane for the regions of positive and negative frequencies and multiplying these transfer functions, the resulting transfer functions in the  $z$ -plane are obtained for discrete bandpass and notch filters. By passing from the  $z$ -plane to the  $j\omega$ , expressions for the frequency transfer functions of the synthesized band-pass and notch filters are obtained. The calculation of their amplitude-frequency characteristics has been made. It is shown that the width of the amplitude-frequency characteristics of the synthesized filters remains constant when the filter tuning frequency is changed. **Practical relevance** – The developed technique for the synthesis of tunable real discrete band-pass and notch filters with a constant frequency response width based on invariant differential equations of continuous analog filters will be very useful in the construction of adaptive systems and signal processing devices, such as signal detection and filtering systems, Doppler velocity meters, selection systems moving targets.

**Keywords:** differential equations, discrete filters, weighting factors, frequency characteristics.

## **Введение.**

В настоящее время получили широкое распространение цифровые методы обработки сигналов с использованием микропроцессоров, микроконтроллеров и сигнальных процессоров. Для построения сглаживающих целей в системах автоматического сопровождения по дальности, угловым координатам или скорости, систем селекции движущихся целей, повышения качества изображения, подавления шумов применяются разнообразные фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные фильтры. При этом к временным и

частотным характеристикам фильтров в зависимости от решаемых задач предъявляются специфические требования.

Вопросы построения дискретных фильтров по их непрерывным аналогам достаточно полно изложены в отечественной и иностранной литературе [1-7, 9,10]. Для синтеза фильтров используются как частотные, так временные методы. В общем виде фильтры-аналоги могут быть заданы частотными передаточными функциями [1,5,10], импульсными и переходными характеристиками [2,3], интегральными и дифференциальными уравнениями.

Практическое решение задачи синтеза разнообразных дискретных фильтров по их непрерывным фильтрам-аналогам с использованием программ *Matlab*-приложения дано в [1]. Так функция  $prony(h, na, nb)$  позволяет по значениям импульсной характеристики  $h$  фильтра нижних частот (ФНЧ) или полосового фильтра вычислить весовые коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции дискретного фильтра в  $z$ -плоскости, коэффициенты  $na$  и  $nb$  задают порядок числителя и знаменателя.

С помощью функций  $[z, p, k]=butter(n)$ ,  $[z, p, k]=cheb1ap(n, Rp)$ ,  $[z, p, k]=cheb2ap(n, Rp)$  и  $[z, p, k]=ellipap(n, Rp, Rs)$  вычисляются нули и полюсы передаточных функций и коэффициенты передачи непрерывных ФНЧ Баттерворта, Чебышева и эллиптических фильтров, которые функцией  $zp2tf(z, p, k)$  пересчитываются в коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции дискретного фильтра. Также в [1] приведены *Matlab*-программы преобразования фильтров-прототипов: изменение частоты среза фильтра, преобразование ФНЧ в фильтр верхних частот, преобразование ФНЧ в полосовой фильтр, преобразование ФНЧ в режекторный фильтр.

В литературе методу синтеза дискретных полосовых и режекторных фильтров на основе дифференциальных уравнений, описывающих работу непрерывных фильтров-аналогов, не уделено должного внимания. Вместе с тем использование дифференциальных уравнений позволяет сравнительно легко синтезировать практически любые дискретные фильтры.

## 1. Постановка задачи.

Полосовые и режекторные фильтры используются для выделения и подавления узкополосных сигналов или помех и характеризуются узкой полосой пропускания или режекции [4-6]. При разработке адаптивных систем обработки сигналов возникает задача оперативного изменения частоты настройки фильтров без изменения формы их частотных характеристик. В непрерывном варианте полосовые и режекторные фильтры строятся в большинстве случаев на основе использования катушек индуктивности и конденсаторов в виде последовательных и параллельных колебательных контуров. Однако изменение частоты настройки контуров приводит к изменению их ширины полосы пропускания, что крайне нежелательно. Синтез дискретных полосовых и режекторных фильтров с постоянной шириной полосы пропускания или режекции при неизменной форме АЧХ по их непрерывным аналогам, заданным дифференциальными уравнениями, составляет основное содержание настоящей работы.

## 2. Разностные уравнения дискретных фильтров.

В общем виде непрерывные фильтры  $n$ -го порядка описываются следующим дифференциальным уравнением [8,11]

$$a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m x(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 x(t), \quad m \leq n, \quad (1)$$

где  $x(t)$ ,  $y(t)$  – входной и выходной сигналы фильтра;  $a_i$ ,  $b_i$  – весовые коэффициенты.

Производные в соотношении (1) можно представить в виде

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(t-T)}{T}; \quad \frac{dx(t)}{dt} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t-T)}{T};$$

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{dy(t)}{dt} - \frac{dy(t-T)}{dt}}{T}; \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx(t-T)}{dt}}{T}; \quad (2)$$

.....

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} - \frac{d^{n-1} y(t-T)}{dt^{n-1}}}{T}; \quad \frac{d^m x(t)}{dt^m} = \lim_{T \rightarrow 0} \frac{\frac{d^{m-1} x(t)}{dt^{m-1}} - \frac{d^{m-1} x(t-T)}{dt^{m-1}}}{T}.$$

В дальнейшем будем считать, что за время  $T$  не происходит заметных изменений ни функций  $x(t)$  и  $y(t)$ , ни их производных.

Тогда соотношения (2) можно заменить приближенными разностными уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &\approx \frac{y(t) - y(t-T)}{T}; \quad \frac{dx(t)}{dt} \approx \frac{x(t) - x(t-T)}{T}; \\ \frac{d^2 y(t)}{dt^2} &\approx \frac{y(t) - 2y(t-T) + y(t-2T)}{T^2}; \quad \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \approx \frac{x(t) - 2x(t-T) + x(t-2T)}{T^2}; \end{aligned} \quad (3)$$

.....

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} \approx T^{-n} \sum_{i=0}^n c_i y(t-iT); \quad \frac{d^m x(t)}{dt^m} \approx T^{-m} \sum_{i=0}^m c_i x(t-iT).$$

В таблице представлены значения весовых коэффициентов  $c_i$  разностных уравнений, соответствующих производным различных порядков.

Таблица 1. Весовые коэффициенты.

n \ c <sub>i</sub>	c <sub>0</sub>	c <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>	c <sub>4</sub>	c <sub>5</sub>	c <sub>6</sub>	c <sub>7</sub>	c <sub>8</sub>	c <sub>9</sub>
1	1	-1								
2	1	-2	1							
3	1	-3	3	-1						
4	1	-4	6	-4	1					
5	1	-5	10	-10	5	-1				
6	1	-6	15	-20	15	-6	1			
7	1	-7	21	-35	35	-21	7	-1		
8	1	-8	28	-56	70	-56	28	-8	1	
9	1	-9	36	-84	126	-126	84	-36	9	-1

С учетом соотношений (3) дифференциальное уравнение линейной системы (1) записывается в виде конечных разностей

$$\begin{aligned}
 a_0 T^{-n} \sum_{i=0}^n c_i y(t-iT) + a_1 T^{-(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} p_i y(t-iT) + \dots + a_n y(t) = \\
 = b_0 T^{-m} \sum_{i=0}^m k_i x(t-iT) + b_1 T^{-(m-1)} \sum_{i=0}^{m-1} d_i x(t-iT) + \dots + b_m x(t).
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

В данном выражении весовые коэффициенты  $c_i$  – соответствуют  $n$  – ой производной;  $p_i$  – соответствуют  $n-1$  – ой производной;  $k_i$  – соответствуют  $m$  – ой производной;  $d_i$  – соответствуют  $m-1$  – ой производной и т. д.

Из соотношения (4) находим в дискретном представлении выходной сигнал фильтра

$$\begin{aligned}
 y[n] = a_0^{-1} \{ b_m T^{-m} \sum_{i=0}^m k_i x[n-i] + b_{m-1} T^{-(m-1)} \sum_{i=0}^{m-1} d_i x[n-i] + \dots + b_0 x[n-m+1] - \\
 - a_n T^{-n} \sum_{i=0}^n c_i y[n-i] - a_{n-1} T^{-(n-1)} \sum_{i=0}^{n-1} p_i y[n-i] - \dots - a_0 T^{-1} \sum_{i=0}^1 l_i y[n-i] \}.
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Нетрудно показать [7,8,11], что разностному уравнению (5) будет соответствовать следующая передаточная функция дискретного фильтра в  $z$ -плоскости

$$W_2(z) = \frac{\sum_{i=0}^m A_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n B_i z^{-i}}.
 \tag{6}$$

В передаточной функции (6)  $A_i$  и  $B_i$  весовые коэффициенты, значения которых определяются периодом дискретизации  $T$  и коэффициентами  $a_i, b_i, k_i, d_i, c_i, p_i$ . Величины этих коэффициентов будут уточнены при рассмотрении конкретных примеров.

### 3. Частотные передаточные функции непрерывных полосовых и режекторных фильтров.

Ранее отмечалось, что полосовые и режекторные фильтры являются узкополосными и имеют частоту настройки. Для непрерывных действительных

полосовых фильтров с постоянной полосой пропускания или режекторных фильтров с постоянной шириной зоны режекции  $n$ -го порядка математическая частотная передаточная функция имеет вид [8,11]

$$W(j\omega) = \frac{a_m [j(\omega \pm \omega_0)]^m + a_{m-1} [j(\omega \pm \omega_0)]^{m-1} + \dots + a_1 j(\omega \pm \omega_0) + a_0}{b_n [j(\omega \pm \omega_0)]^n + b_{n-1} [j(\omega \pm \omega_0)]^{n-1} + \dots + b_1 j(\omega \pm \omega_0) + b_0}, \quad m \leq n, \quad (7)$$

где  $\omega_0$  – частота настройки фильтра.

Частотная передаточная функция (7) является обобщающей и подходит для описания любых непрерывных фильтров. Если в соотношении (7) положить частоту настройки равной нулю ( $\omega_0 = 0$ ), то получим частотную передаточную функцию действительных фильтров нижних или верхних частот.

Выражение (7) показывает, что математическая частотная передаточная функция действительных непрерывных фильтров симметрична относительно нуля частот, то есть расположена как в области положительных, так и отрицательных частот [11].

#### 4. Синтез дискретных полосовых фильтров.

Так как математическая частотная передаточная функция действительных фильтров является двусторонней относительно нуля частот, для синтеза дискретных полосовых фильтров за основу была взята частотная передаточная функция непрерывного фильтра – аналога, которая представлялась как сумма двух частотных передаточных функций комплексных фильтров с частотами настройки  $\omega_0$  и  $-\omega_0$ .

В результате для дискретных полосовых фильтров частотную передаточную функцию (7) запишем в виде

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega), \quad (8)$$

где

$$W_1(j\omega) = \frac{a_m [j(\omega - \omega_0)]^m + a_{m-1} [j(\omega - \omega_0)]^{m-1} + \dots + a_1 j(\omega - \omega_0) + a_0}{b_n [j(\omega - \omega_0)]^n + b_{n-1} [j(\omega - \omega_0)]^{n-1} + \dots + b_1 j(\omega - \omega_0) + b_0}, \quad (9)$$

$$W_2(j\omega) = \frac{a_m[j(\omega+\omega_0)]^m + a_{m-1}[j(\omega+\omega_0)]^{m-1} + \dots + a_1j(\omega+\omega_0) + a_0}{b_n[j(\omega+\omega_0)]^n + b_{n-1}[j(\omega+\omega_0)]^{n-1} + \dots + b_1j(\omega+\omega_0) + b_0}. \quad (10)$$

Частотным передаточным функциям (9) и (10) соответствуют два комплексных полосовых фильтра с частотами настройки  $\omega_0$  и  $-\omega_0$  соответственно. Передаточные функции данных фильтров в  $z$ -плоскости определяются соотношением [2,9,10]

$$W_1(z) = \frac{\sum_{i=0}^m A_i z_0^i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n B_i z_0^i z^{-i}} \quad (11)$$

для фильтра с частотной передаточной функцией (9) и частотой настройки  $\omega_0$ , и

$$W_2(z) = \frac{\sum_{i=0}^m A_i z_0^{-i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n B_i z_0^{-i} z^{-i}} \quad (12)$$

для фильтра с частотной передаточной функцией (10) и частотой настройки  $-\omega_0$ .

В выражениях (11) и (12)  $A_i$  и  $B_i$  весовые коэффициенты;  $z_0 = \exp(j\omega_0 T)$ ;  $z = \exp(-j\omega T)$ .

Согласно выражению (8) передаточная функция синтезируемого дискретного полосового фильтра в  $z$ -плоскости будет иметь вид

$$W(z) = W_1(z) + W_2(z) = \frac{\sum_{i=0}^m A_i z_0^i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n B_i z_0^i z^{-i}} + \frac{\sum_{i=0}^m A_i z_0^{-i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n B_i z_0^{-i} z^{-i}}. \quad (13)$$

*Рассмотрим пример синтеза дискретного полосового фильтра с постоянными полосой пропускания и формой АЧХ.*

Для синтеза дискретных полосовых фильтров частотную передаточную функцию (8) запишем в виде

$$W(j\omega) = \frac{a_m[j(\omega-\omega_0)]^m + a_{m-1}[j(\omega-\omega_0)]^{m-1} + \dots + a_1j(\omega-\omega_0) + a_0}{b_n[j(\omega-\omega_0)]^n + b_{n-1}[j(\omega-\omega_0)]^{n-1} + \dots + b_1j(\omega-\omega_0) + b_0} + \frac{a_m[j(\omega+\omega_0)]^m + a_{m-1}[j(\omega+\omega_0)]^{m-1} + \dots + a_1j(\omega+\omega_0) + a_0}{b_n[j(\omega+\omega_0)]^n + b_{n-1}[j(\omega+\omega_0)]^{n-1} + \dots + b_1j(\omega+\omega_0) + b_0}.$$

Пусть данный фильтр строится на базе фильтра нижних частот Баттерворта второго порядка, описываемого следующим дифференциальным уравнением [8,11]

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\omega_{cp} \frac{dy(t)}{dt} + \omega_{cp}^2 y(t) = \omega_{cp}^2 x(t), \quad (14)$$

где  $\omega_{cp}$  - частота среза.

После замены в дифференциальном уравнении (14) первой и второй производных их разностными эквивалентами (первая и вторая строчки таблицы соответственно) получим следующее разностное уравнение дискретного фильтра нижних частот

$$y[n] + b_1y[n-1] + b_2y[n-2] = a_0x[n],$$

где

$$a_0 = \omega_{cp}^2 T^2 / (1 + \sqrt{2}\omega_{cp}T + \omega_{cp}^2 T^2),$$

$$b_1 = -(2 + \sqrt{2}\omega_{cp}T) / (1 + \sqrt{2}\omega_{cp}T + \omega_{cp}^2 T^2),$$

$$b_2 = 1 / (1 + \sqrt{2}\omega_{cp}T + \omega_{cp}^2 T^2).$$

Данному разностному уравнению будет соответствовать передаточная функция в  $z$ -плоскости

$$W_{\text{фнч}}(z) = \frac{a_0}{1 + \sum_{i=1}^2 b_i z^{-i}}.$$

Тогда с учетом (11) и (12) передаточные функции комплексных полосовых фильтров в  $z$  – плоскости, настроенных соответственно на частоты  $\omega_0$  и  $-\omega_0$  принимают вид

$$W_1(z) = \frac{a_0}{1 + \sum_{i=1}^2 b_i z_0^i z^{-i}}, \quad W_2(z) = \frac{a_0}{1 + \sum_{i=1}^2 b_i z_0^{-i} z^{-i}}. \quad (15)$$

Результирующая передаточная функция дискретного полосового фильтра в  $z$  – плоскости согласно (13) с учетом выражений (15) принимает вид

$$W(z) = \frac{2a_0[(1 + b_1 \cos(\omega_0 T)z^{-1} + b_2 \cos(2\omega_0 T)z^{-2})]}{1 + 2b_1 \cos(\omega_0 T)z^{-1} + [2b_2 \cos(2\omega_0 T) + b_1^2]z^{-2} + 2b_1 b_2 \cos(\omega_0 T)z^{-3} + b_2^2 z^{-4}}. \quad (16)$$

После подстановки в выражение (16) соотношений  $z^{-1} = e^{-j\omega T}$ ,  $z^{-2} = e^{-j2\omega T}$ ,  $z^{-3} = e^{-j3\omega T}$  и  $z^{-4} = e^{-j4\omega T}$  получим частотную передаточную функцию синтезированного дискретного полосового фильтра в непрерывном варианте, модуль которой для трех частот настройки  $f_0 = \omega_0/2\pi = 100, 200$  и  $300$  Гц в области положительных частот показан на рис. 1. При расчетах были приняты значения частоты среза  $f_{cp} = \omega_{cp}/2\pi = 8$  Гц и периода повторения  $T = 10^{-3}$  с.

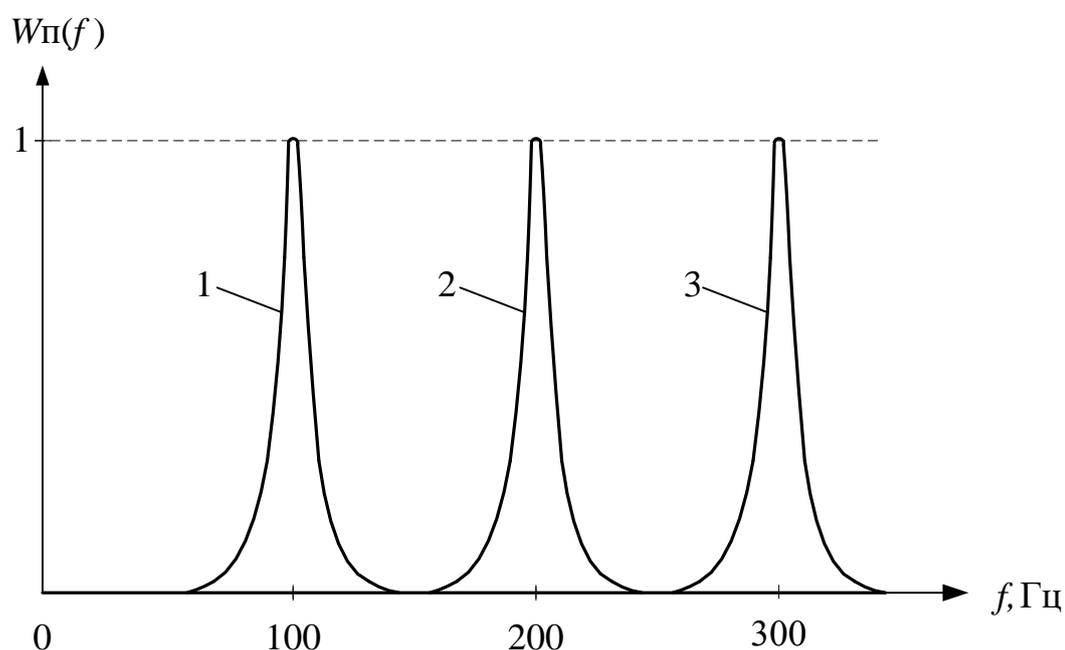


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики полосовых фильтров:  
 1 –  $f_0 = 100$  Гц; 2 –  $f_0 = 200$  Гц; 3 –  $f_0 = 300$  Гц.

Можно отметить, что изменение частоты настройки фильтра не приводит к изменению формы и ширины полосы пропускания его амплитудно-частотной характеристики.

## 5. Синтез дискретных режекторных фильтров.

С учетом того, что математическая частотная передаточная функция действительных фильтров является двусторонней относительно нуля частот, для синтеза дискретных режекторных фильтров за основу была взята частотная передаточная функция непрерывного фильтра – аналога, которая представлялась в виде произведения двух частотных передаточных функций комплексных фильтров с частотами настройки  $\omega_0$  и  $-\omega_0$

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) * W_2(j\omega), \quad (17)$$

где, как и ранее,

$$W_1(j\omega) = \frac{a_m [j(\omega + \omega_0)]^m + a_{m-1} [j(\omega + \omega_0)]^{m-1} + \dots + a_1 j(\omega + \omega_0) + a_0}{b_n [j(\omega + \omega_0)]^n + b_{n-1} [j(\omega + \omega_0)]^{n-1} + \dots + b_1 j(\omega + \omega_0) + b_0},$$

$$W_2(j\omega) = \frac{a_m [j(\omega - \omega_0)]^m + a_{m-1} [j(\omega - \omega_0)]^{m-1} + \dots + a_1 j(\omega - \omega_0) + a_0}{b_n [j(\omega - \omega_0)]^n + b_{n-1} [j(\omega - \omega_0)]^{n-1} + \dots + b_1 j(\omega - \omega_0) + b_0}.$$

На основании выражений (11), (12) и (17) передаточная функция синтезируемого дискретного режекторного фильтра в  $z$ -плоскости будет иметь вид

$$W(z) = W_1(z) * W_2(z) = \frac{\sum_{i=0}^m A_i z_0^i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n B_i z_0^i z^{-i}} * \frac{\sum_{i=0}^m A_i z_0^{-i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n B_i z_0^{-i} z^{-i}}. \quad (18)$$

*Рассмотрим пример синтеза дискретного режекторного фильтра с постоянными полосой режекции и формой АЧХ.*

Пусть данный фильтр строится на базе фильтра верхних частот второго порядка, описываемого следующим дифференциальным уравнением [8,11]

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \sqrt{2}\omega_{cp} \frac{dy(t)}{dt} + \omega_{cp}^2 y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}, \quad (19)$$

где  $\omega_{cp}$  - частота среза.

Используя вышеизложенную методику, после замены в дифференциальном уравнении (19) первой и второй производных их разностными эквивалентами (первая и вторая строчки таблицы соответственно) получим следующее разностное уравнение дискретного фильтра верхних частот

$$y[n] + b_1 y[n-1] + b_2 y[n-2] = a_0 \{x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]\},$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 / (1 + \sqrt{2}\omega_{cp}T + \omega_{cp}^2 T^2), \\ b_1 &= -(2 + \sqrt{2}\omega_{cp}T) / (1 + \sqrt{2}\omega_{cp}T + \omega_{cp}^2 T^2), \\ b_2 &= 1 / (1 + \sqrt{2}\omega_{cp}T + \omega_{cp}^2 T^2). \end{aligned}$$

Данному разностному уравнению будет соответствовать передаточная функция в  $z$ -плоскости

$$W_{фвч}(z) = \frac{\sum_{i=0}^2 a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^2 b_i z^{-i}},$$

где  $a_1 = -2a_0$ ;  $a_2 = a_0$ .

Тогда согласно (11) и (12) передаточные функции комплексных режекторных фильтров в  $z$  – плоскости, настроенных соответственно на частоты  $\omega_0$  и  $-\omega_0$  принимают вид

$$W_1(z) = \frac{\sum_{i=0}^2 a_i z_0^i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^2 b_i z_0^i z^{-i}}, \quad W_2(z) = \frac{\sum_{i=0}^2 a_i z_0^{-i} z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^2 b_i z_0^{-i} z^{-i}}. \quad (20)$$

Результирующая передаточная функция дискретного режекторного фильтра в  $z$  – плоскости согласно (18) с учетом выражений (20) принимает вид

$$W_p(z) = \frac{a_0^2 + 2a_0 a_1 \cos(\omega_0 T) z^{-1} + [2a_0 a_2 \cos(2\omega_0 T) + a_1^2] z^{-2} + 2a_1 a_2 \cos(\omega_0 T) z^{-3} + a_2^2 z^{-4}}{1 + 2b_1 \cos(\omega_0 T) z^{-1} + [2b_2 \cos(2\omega_0 T) + b_1^2] z^{-2} + 2b_1 b_2 \cos(\omega_0 T) z^{-3} + b_2^2 z^{-4}}. \quad (21)$$

После подстановки в выражение (21) соотношений  $z^{-1} = e^{-j\omega T}$ ,  $z^{-2} = e^{-j2\omega T}$ ,  $z^{-3} = e^{-j3\omega T}$  и  $z^{-4} = e^{-j4\omega T}$  получим частотную передаточную

функцию синтезированного дискретного режекторного фильтра в непрерывном варианте, модуль которой для трех частот настройки  $f_0 = \omega_0/2\pi = 100, 200$  и  $300$  Гц в области положительных частот показан на рис. 2. При расчетах были приняты значения частоты среза  $f_{cp} = \omega_{cp}/2\pi = 8$  Гц и периода повторения  $T = 10^{-3}$  с.

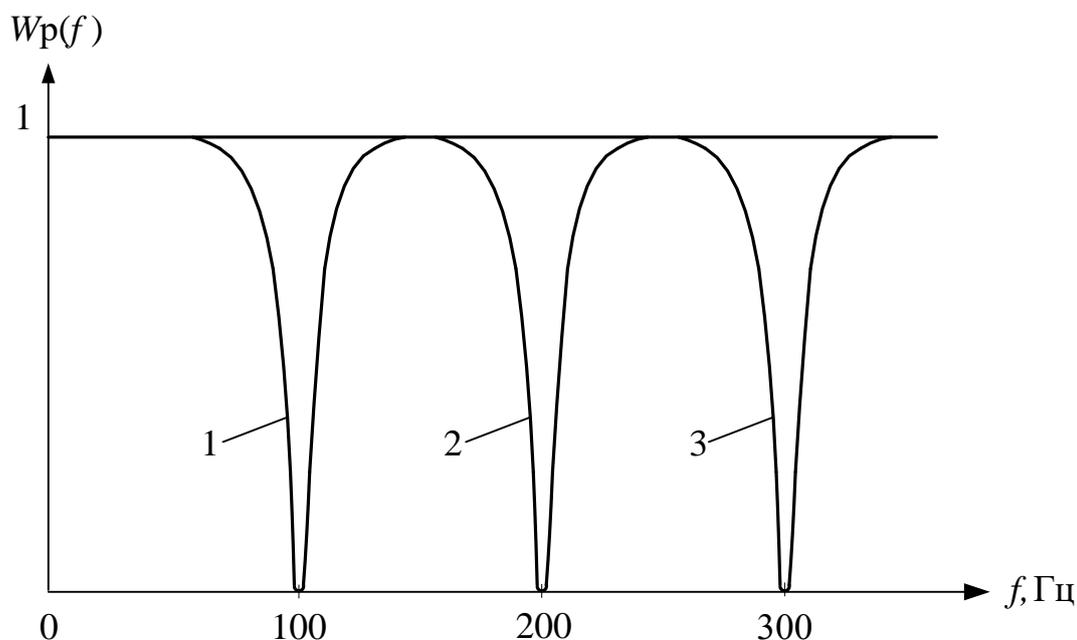


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики режекторных фильтров:  
1 –  $f_0 = 100$  Гц; 2 –  $f_0 = 200$  Гц; 3 –  $f_0 = 300$  Гц

Можно отметить, что, как и в случае с полосовым фильтром, изменение частоты настройки фильтра не приводит к изменению формы и ширины полосы режекции АЧХ фильтра.

## 6. Обсуждение результатов.

Представленные на рис. 1 и рис. 2 амплитудно-частотные характеристики действительных дискретных полосовых и режекторных фильтров имеют постоянную ширину при различных значениях частоты настройки фильтров. Данный результат является следствием того, что в основу синтеза положено представление действительных фильтров в виде двух самостоятельных узкополосных комплексных фильтров, частотные передаточные функции которых расположены симметрично относительно нуля частот как в области

положительных, так и в области отрицательных частотах, с последующим применением для каждой частотной передаточной функции смещенного на частоту настройки билинейного  $z$ -преобразования. Сложение частотных передаточных функций комплексных фильтров для синтеза полосовых фильтров или их перемножение для синтеза режекторных фильтров приводит к увеличению в два раза порядка результирующих полосовых и режекторных фильтров относительно непрерывных фильтров-аналогов.

### **Заключение.**

Предложенная и использованная в статье методика разбиения частотной передаточной функции действительного непрерывного фильтра-аналога на две составляющие, расположенные в области положительных и отрицательных частот, с последующим применением к каждой из них смещенного на частоту настройки билинейного  $z$ -преобразования позволяет синтезировать перестраиваемые по частоте действительные полосовые и режекторные фильтры с постоянными шириной и формой АЧХ независимо от частоты настройки фильтров. Изложенная в статье методика синтеза действительных дискретных полосовых и режекторных фильтров с использованием инвариантных дифференциальных уравнений, рассмотренные конкретные примеры построения подобных фильтров будут полезны при создании адаптивных и когерентных систем обработки информации, таких как устройства селекции движущихся целей, доплеровские измерители скорости движения разнообразных объектов, обнаружители, устройства оценки параметров, местоположения объектов и т.д.

### **Литература**

1. Воробьев С.Н. *Цифровая обработка сигналов*. Санкт-Петербург, Издательский дом «Академия». 2013. 318 с.
2. Зиатдинов С.И. Синтез рекурсивных дискретных фильтров во временной области. *Известия вузов. Радиоэлектроника*. 2016. №3. С.3-6.
3. Зиатдинов С.И. Синтез нерекурсивных дискретных фильтров во временной области. *Информационно-управляющие системы*. 2016. №5. С.98-101.

4. Бакулев П.А. *Радиолокационные системы*. Москва, Радиотехника. 2004. 319 с.
5. Попов Д.И. Адаптивное подавление пассивных помех. *Цифровая обработка сигналов*. 2014. №4. С.32-37.
6. Котоусов А.С., Морозов А.К. *Оптимальная фильтрация и компенсация помех*. Москва, Горячая линия-Телеком. 2008. 166 с.
7. Бесекерский В.А. *Микропроцессорные системы автоматического управления*. Ленинград, Машиностроение. 1988. 355 с.
8. Баскаков С.И. *Радиотехнические цепи и сигналы*. Москва, URSS. 2016. 915 с.
9. Оппенгейм А., Шафер Р. *Цифровая обработка сигналов*. Москва, Техносфера. 2006. 855 с.
10. Куприянов М.С., Матюшкин Б.Д. *Цифровая обработка сигналов*. Санкт-Петербург, Политехника. 2000. 592 с.
11. Гоноровский И.С. *Радиотехнические цепи и сигналы*. Москва, Радио и связь. 1969. 512 с.

**Для цитирования:**

Зиятдинов С.И. Синтез дискретных полосовых и режекторных фильтров методом инвариантных дифференциальных уравнений. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.12.6>