

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.12.7>

УДК: 621.396.018.424

## **ОПТИМИЗАЦИЯ $r$ -ФАЗНЫХ ГРУППОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ, ПОЛУЧЕННЫХ В РЕЗУЛЬТАТЕ НЕЛИНЕЙНОГО КОДОВОГО УПЛОТНЕНИЯ**

**О. Ю. Бердышев**

**«16 Центральный научно-исследовательский испытательный ордена Красной Звезды  
институт имени маршала войск связи А.И. Белова» Минобороны России  
141006, Московская обл., г Мытищи, ул. Комарова 5**

Статья поступила в редакцию 15 декабря 2021 г.

**Аннотация.** В статье рассмотрена задача оптимизации  $r$ -фазных групповых последовательностей, полученных в результате нелинейного кодового уплотнения. Показано, что при оптимальном поэлементном приеме групповых последовательностей в базисе  $r$ -фазных ортогональных последовательностей критерий максимума минимального расстояния между групповыми последовательностями при определенных условиях равносильно критерию максимума минимального модуля комплексного корреляционного отклика на информационные ортогональные последовательности. Для групповых последовательностей, не удовлетворяющих этим условиям, получен критерий максимума минимального отклонения комплексного корреляционного отклика на информационные ортогональные последовательности до границы принятия решения. Предложен алгоритм оптимизации групповых последовательностей, который заключается в достижении этого максимума минимального отклонения за счет изменения фазы некоторых элементов групповой последовательности. Дополнительно разработан алгоритм приема в целом групповой последовательности среди ближайших групповых последовательностей, который значительно повышает помехоустойчивость приема информационных сигналов относительно поэлементного приема в базисе  $r$ -фазных ортогональных последовательностей.

**Ключевые слова:** нелинейное кодовое уплотнение,  $r$ -фазная групповая последовательность,  $r$ -фазные ортогональные последовательности, комплексный спектральный вектор, комплексный корреляционный отклик, поэлементный прием, алгоритм оптимизации.

**Abstract.** This paper presents the challenge of optimization of  $r$ -phase group sequences obtained from the nonlinear code multiplexing. It shows that at optimal element wise methodology for group sequences in a full system of  $r$ -phase orthogonal sequences, a maximum criterion for the minimum distance of group sequences is equal under certain conditions amounted to a maximum criterion for the minimum module of the integrated correlation response to the data for the orthogonal sequences. For group sequences which are not under these conditions a maximum criterion for the minimal deviation of the integrated correlation response to the informational orthogonal sequences within the scope of decision – making is received. The algorithm of optimization of group sequences was suggested, which is to achieve this maximum of the minimal deviation by changing the phase of some elements of the group sequence. Additionally, the algorithm of receiving of the entire group sequence among the nearest group sequences was developed. This algorithm provides considerable increasing of immunity while signal data receiving unlike the other algorithm of element-to-element receiving in a system of  $r$ -phase orthogonal sequences.

**Key words:** nonlinear code multiplexing,  $r$ -phase group sequence,  $r$ -phase orthogonal sequences, complex spectral vector, complex correlation response, element-to-element receiving, optimization algorithm.

## Введение.

Рассматривается задача формирования в  $N$ -мерном комплексном евклидовом пространстве  $C^N$  [1, 2] подмножества  $\check{U}^J$   $r$ -фазных групповых последовательностей (ГП)  $U_i(t)$  длиной  $N$ , полученных в результате нелинейного кодового уплотнения [3, 4] с максимальным евклидовым расстоянием между ними [1-3, 5, 6] при поэлементном приеме, элементами которого являются последовательности из полной системы  $r$ -фазных

ортогональных последовательностей длиной  $N$ , например Виленкина-Крестенсона функции (ВКФ) [7, 8].

### 1. Передача информации $r$ -фазными групповыми последовательностями.

Подмножество  $r$ -фазных ГП:

$$\check{U}^J = \{U_l(t)\}_{l=1,\dots,r^J}, \quad (1)$$

где  $J < N$ .

$$U_l(t) = \sum_{i=0}^{N-1} u_{l,i} \tau(t - i\Delta), \quad (2)$$

где

$$u_{l,i} = \exp(2\pi j r_{l,i}/r), \quad (3)$$

$$j = \sqrt{-1}, \quad (4)$$

$r_{l,i} = 0, \dots, r - 1$  – целочисленная фаза  $i$ -го элемента ГП,  $\tau(t)$  – прямоугольный импульс (чип) длительности  $\Delta$ .

Норма ГП в пространстве  $C^N$  [1, 2]:

$$|U_l(t)| = \sqrt{\sum_{i=0}^{N-1} u_{l,i} u_{l,i}^*}. \quad (5)$$

Из (3, 5) следует:

$$|u_{l,i}| = 1, \quad (6)$$

$$|U_l(t)| = N. \quad (7)$$

Любую  $r$ -фазную последовательность (2) длиной  $N$  можно разложить [1, 2, 7] по полной системе ортогональных  $r$ -фазных последовательностей ВКФ длиной  $N$ :

$$U_l(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \eta_{l,n} G_n(t), \quad (8)$$

где  $\eta_{l,n}$  –  $n$ -й комплексный спектральный вектор разложения  $U_l(t)$  в базисе полной ортогональной системы последовательностей ВКФ,

$$G_n(t) = \sum_{i=0}^{N-1} g_{n,i} \tau(t - i\Delta), \quad (9)$$

–  $n$ -я  $r$ -фазная последовательность ВКФ,

$$g_{n,i} = \exp(2\pi j r_{n,i}/r), \quad (10)$$

–  $i$ -й элемент  $n$ -й последовательности ВКФ,

$$r_{n,i} = 0, \dots, r - 1, \quad (11)$$

– целочисленная фаза  $i$ -го элемента  $n$ -й последовательности ВКФ.

Для передачи  $r$ -фазных информационных сигналов посредством ГП  $U_l(t)$  разделим комплексное пространство на  $r$  секторов. В центре каждого сектора находится соответствующий информационный сигнал  $B_0, \dots, B_{r-1}$ . На рис. 1 в качестве примера это показано для  $r = 4$ .

Представим комплексные спектральные вектора разложения  $\eta_{l,n}$  в виде:

$$\eta_{l,n} = B_{l,n} \theta_{l,n}, \quad (12)$$

где

$$B_{l,n} = \exp(j\Phi_{l,n}), \quad (13)$$

– информационный сигнал сектора, в котором находится  $\eta_{l,n}$ ,  $\theta_{l,n}$  – отображение  $\eta_{l,n}$  в нулевой сектор,

$$\Phi_{l,n} = 2\pi r_{l,n}/r \quad (14)$$

– фаза информационного сигнала  $B_{l,n}$ ,

$$r_{l,n} = 0, \dots, r - 1, \quad (15)$$

– номер сегмента  $B_{l,n}$ , или целочисленная фаза  $B_{l,n}$ .

Дополнительно представим  $\theta_{l,n}$  в виде:

$$\theta_{l,n} = b_{l,n} \exp(j\delta_{l,n}), \quad (16)$$

где

$$b_{l,n} = |\theta_{l,n}|, \quad (17)$$

$$\delta_{l,n} = \varphi(\eta_{l,n}) - \Phi_{l,n} \quad (18)$$

– отклонение фазы  $\eta_{l,n}$  от фазы информационного сигнала  $B_{l,n}$ .

Из (12, 13) следует:

$$\varphi(\theta_{l,n}) = \varphi(\eta_{l,n}) - \Phi_{l,n}. \quad (19)$$

На рис. 1 в качестве примера показан комплексный спектральный вектор разложения ГП  $\eta_{l,n}$ , который попал в третий сектор с передаваемым ГП  $U_l(t)$  информационным сигналом  $B_3 = -j$ . Деление  $\eta_{l,n}$  на информационный сигнал  $B_3$  поворачивает оси координат на угол  $-3\pi/2$  и отображает  $\eta_{l,n}$  в  $\theta_{l,n}$ , которое

находится в нулевом секторе с информационным сигналом  $B_0$ . Отклонение  $\delta_{l,n}$  фазы  $\eta_{l,n}$  от фазы информационного сигнала  $B_3$  при отображении в нулевой сегмент сохраняет отклонение  $\delta_{l,n}$  фазы  $\theta_{l,n}$  от фазы  $B_0$ .

Исходя из (8-16), получим  $n$ -ю информационную комплексную ортогональную составляющую групповой последовательности  $U_l(t)$  :

$$\eta_{l,n} G_n(t) = \sum_{i=0}^{N-1} B_{l,n} b_{l,n} \exp(j\delta_{l,n}) g_{n,i} \tau(t - i\Delta). \quad (20)$$

Учитывая ортогональность ВКФ, корреляционный отклик ГП  $U_l(t)$  на  $n$ -ю комплексно-сопряженную последовательность ВКФ  $G_n^*(t)$  (9):

$$\sum_{i=0}^{N-1} B_{l,n} b_{l,n} \exp(j\delta_{l,n}) g_{n,i} g_{n,i}^* = NB_{l,n} b_{l,n} \exp(j\delta_{l,n}). \quad (21)$$

Учитывая (7, 9, 20, 21), несложно получить:

$$\sum_{n=0}^{N-1} b_{l,n}^2 = 1. \quad (22)$$

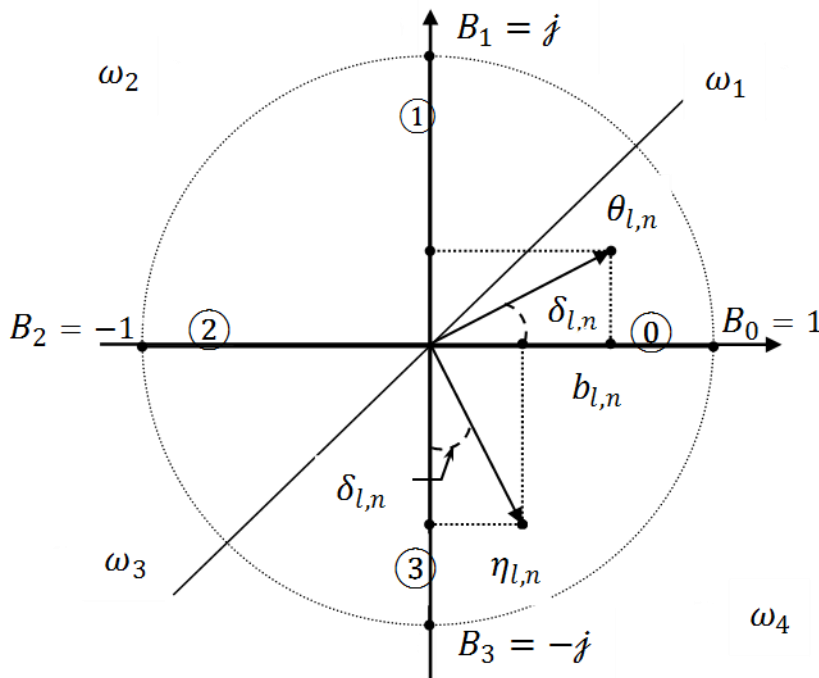


Рис. 1. Отображение  $\eta_{l,n}$  в нулевой сегмент при  $r = 4$ ,  $B_{l,n} = -j$ . ① – ③ – номера секторов,  $\omega_1 - \omega_4$  – прямые, разделяющие сектора.

Информационные сигналы  $B_{l,n}$  передаются ортогональными последовательностями ВКФ  $G_n(t)$  длительностью  $T$ , что увеличивает базу передаваемых информационных сигналов [3].

Представим  $r$ -фазную последовательность (8) в виде:

$$U_l(t) = \sum_{n=0}^{N-1} b_{l,n} \exp(j(\Phi_{l,n} + \delta_{l,n})) G_n(t). \quad (23)$$

Квадрат евклидового расстояния между любыми двумя последовательностями  $U_l(t)$  и  $U_k(t)$  с учетом ортогональности базиса ВКФ:

$$D_{l,k}^2 = \sum_{n=0}^{N-1} D_{l,k,n}^2 (b_{l,n} \exp(j(\Phi_{l,n} + \delta_{l,n})) G_n(t), b_{k,n} \exp(j(\Phi_{k,n} + \delta_{k,n})) G_n(t)). \quad (24)$$

где  $D_{l,k,n}^2(\dots)$  – квадрат евклидового расстояния между ГП  $U_l(t)$  и  $U_k(t)$  по  $n$ -й спектральной составляющей базиса ВКФ  $G_n(t)$ .

Используя выражение для расстояния между двумя точками [2] и учитывая ортогональность базиса ВКФ, получим квадрат евклидового расстояния между любыми групповыми последовательностями  $U_l(t)$  и  $U_k(t)$ :

$$D_{l,k}^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} (b_{l,n} \cos(\Phi_{l,n} + \delta_{l,n}) - b_{k,n} \cos(\Phi_{k,n} + \delta_{k,n}))^2 + (b_{l,n} \sin(\Phi_{l,n} + \delta_{l,n}) - b_{k,n} \sin(\Phi_{k,n} + \delta_{k,n}))^2. \quad (25)$$

После элементарных преобразований получим

$$D_{l,k}^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} (b_{l,n}^2 + b_{k,n}^2 - 2b_{l,n} b_{k,n} \cos((\Phi_{l,n} - \Phi_{k,n}) + (\delta_{l,n} - \delta_{k,n}))). \quad (26)$$

или

$$D_{l,k}^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} (b_{l,n}^2 + b_{k,n}^2 - 2b_{l,n} b_{k,n} \cos(\Delta\Phi_{l,k,n} + \Delta\delta_{l,k,n})), \quad (27)$$

где

$$\Delta\Phi_{l,k,n} = \Phi_{l,n} - \Phi_{k,n}, \quad (28)$$

– разность фаз между информационными сигналами  $B_{l,n}$  и  $B_{k,n}$ ,

$$\Delta\Phi_{l,k,n} = 2\pi\Delta r_{l,k,n}/r, \quad (29)$$

$$\Delta r_{l,k,n} = 0, \dots, r-1, \quad (30)$$

– разность целочисленных фаз информационных сигналов  $B_{l,n}$  и  $B_{k,n}$  по  $n$ -й спектральной составляющей ВКФ,

$$\Delta\delta_{l,k,n} = \delta_{l,n} - \delta_{k,n}. \quad (31)$$

В качестве критерия эффективности подмножества многофазных последовательностей  $\check{U}_J$  используем максимум минимального квадрата евклидового расстояния [6] между любыми двумя последовательностями  $U_l(t)$  и  $U_k(t)$ :

$$\min_{l,k} D_{l,k}^2 \Rightarrow \max. \quad (32)$$

## 2. Оптимизация групповых последовательностей при поэлементном приеме.

Любая групповая последовательность  $U_l(t)$  однозначно определяется множеством  $B_l$  и множеством  $\theta_l$ :

$$B_l = \{B_{l,n}\}_{n=0,N-1}, \quad (33)$$

$$\theta_l = \{\theta_{l,n}\}_{n=0,N-1}. \quad (34)$$

Множество  $B_l$  может быть получено при корреляционном приеме ГП  $U_l(t)$  в базе последовательностей ВКФ с жестким принятием решения по каждому  $B_{l,n}$ , соответствующему  $n$ -й последовательности ВКФ. Это поэлементный прием, элементами которого являются  $B_{l,n}$ , передаваемые последовательностями ВКФ  $\{G_n(t)\}_{n=0,N-1}$ .

Проведенное компьютерное моделирование показало, что при количестве информационных сигналов  $J = N$  невозможно установить однозначное соответствие:

$$\{B_l\}_{l=1,\dots,2^N} \not\leftrightarrow \{U_l(t)\}_{l=1,\dots,2^N}. \quad (35)$$

Однако, при количестве информационных сигналов  $J < N/3$  возможно построить подмножество двоичных последовательностей  $\check{U}^J$ , для которого устанавливается однозначное соответствие:

$$\{B_l\}_{l=1,\dots,2^J} \leftrightarrow \{U_l(t)\}_{l=1,\dots,2^J}. \quad (36)$$

Причем передавать информационные сигналы возможно как на отдельных последовательностях ВКФ, так и на  $\alpha$  последовательностях ВКФ. При передаче

$j$ -го информационного сигнала  $B_{l,j}$  на  $\alpha$  последовательностях ВКФ, входящих в  $j$ -е подмножество номеров последовательностей ВКФ  $\bar{A}_j$  выполняется условие:

$$B_{l,n \in \bar{A}_j} = B_{l,j}. \quad (37)$$

Будем называть ближайшими две ГП  $U_l(t)$  и  $U_k(t)$ , между которыми минимальное различие составляет  $\alpha$  информационных сигналов, причем информационные сигналы  $B_{l,j}$  и  $B_{k,j}$  находятся в соседних секторах:

$$B_{l,j} = B_{k,j} \exp(\pm j2\pi/r). \quad (38)$$

На приемной стороне передаваемое информационное множество  $B_l$  можно получить при поэлементном приеме ГП  $U_l(t)$  в спектре ВКФ, где элементами приема являются информационные векторы  $B_{l,n}$ , передаваемые на соответствующих  $r$ -фазных последовательностях ВКФ  $G_n(t)$ .

В качестве примера на рис. 2 для  $r = 4$  представлены примеры комплексных спектральных векторов  $\eta_{l,n}$ ,  $\eta_{k,n}$ ,  $\eta_{q,n}$ ,  $\eta_{m,n}$  разложения ГП  $U_l(t)$ ,  $U_k(t)$ ,  $U_q(t)$  и  $U_m(t)$  по  $n$ -й спектральной составляющей в базисе ВКФ в случае попадания информационных сигналов  $B_{l,n}$ ,  $B_{k,n}$ ,  $B_{q,n}$ ,  $B_{m,n}$  в 1-й, 2-й, 3-й и 4-й сектора соответственно. Расстояния от  $\eta_{l,n}$ ,  $\eta_{k,n}$ ,  $\eta_{q,n}$ ,  $\eta_{m,n}$  до ближайших границ соответствующих секторов показаны точечными линиями  $\partial_{l,n}$ ,  $\partial_{k,n}$ ,  $\partial_{q,n}$ ,  $\partial_{m,n}$ . Расстояния от  $\eta_{l,n}$  до  $\eta_{k,n}$ ,  $\eta_{q,n}$ ,  $\eta_{m,n}$  показаны соответствующими пунктирными линиями  $d_{l,k,n}$ ,  $d_{l,q,n}$ ,  $d_{l,m,n}$ . Также показаны модули комплексных спектральных векторов  $b_{l,n}$ ,  $b_{k,n}$ ,  $b_{q,n}$ ,  $b_{m,n}$  и отклонения фазы комплексных спектральных векторов  $\delta_{l,n}$ ,  $\delta_{k,n}$ ,  $\delta_{q,n}$ ,  $\delta_{m,n}$ .

Из рис. 2 и (24-25) следует:

$$d_{l,k,n}^2 = D_{l,k,n}^2/N. \quad (39)$$

Обычно минимум расстояния между  $n$ -ми спектральными векторами  $\eta_{l,n}$  и  $\eta_{k,n}$  будет достигаться тогда, когда информационные сигналы  $B_{l,n}$  и  $B_{k,n}$  находятся в соседних секторах. Назовем такие ГП ближайшими по  $n$ -й спектральной составляющей в базисе ВКФ. Например, на рис. 2 для  $B_{l,n}$  это будут информационные сигналы  $B_{k,n}$  и  $B_{m,n}$ . Из рис. 2 следует, что минимальное



евклидово расстояние  $d_{l,k,n}$  между различными ГП по  $n$ -й спектральной составляющей в базисе ВКФ будет между комплексными спектральными векторами  $\eta_{l,n}$  и  $\eta_{k,n}$ .

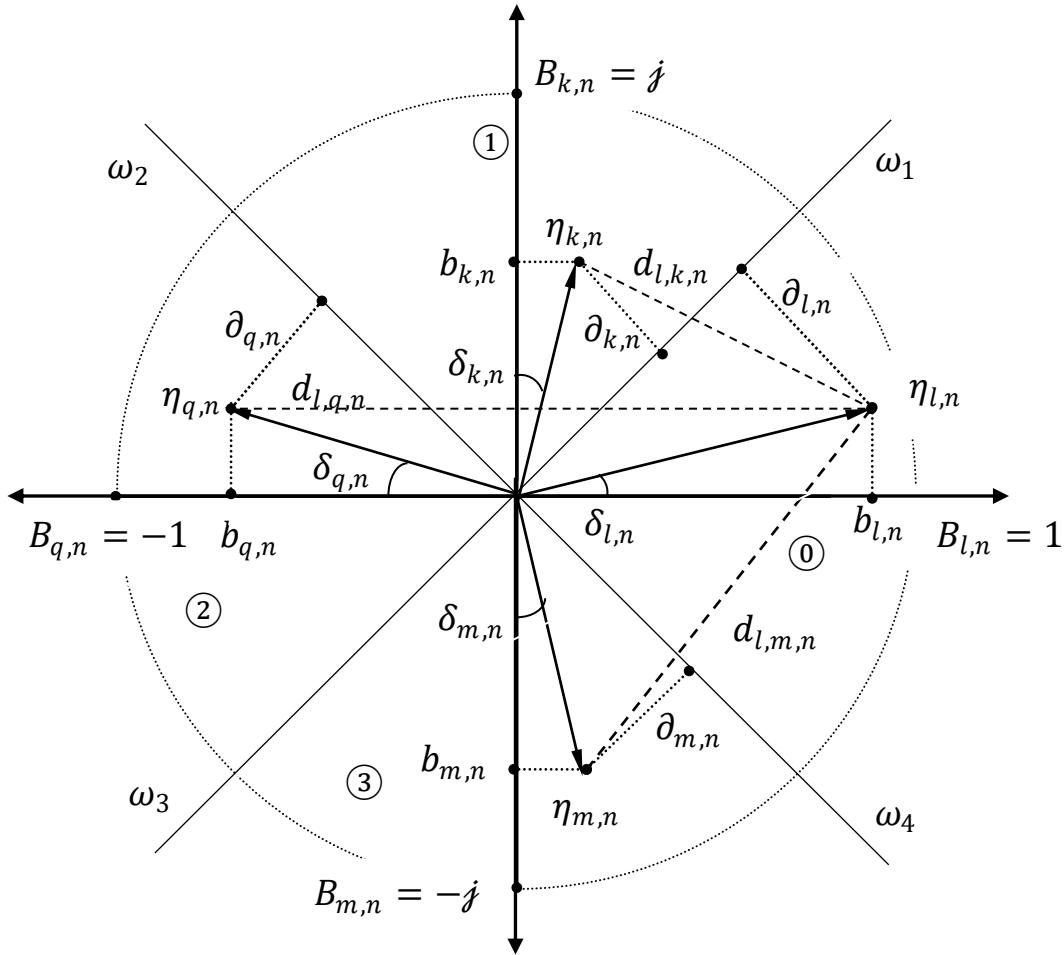


Рис. 2. Примеры комплексных спектральных векторов  $\eta_{l,n}$ ,  $\eta_{k,n}$ ,  $\eta_{q,n}$ ,  $\eta_{m,n}$  разложения ГП  $U_l(t)$ ,  $U_k(t)$ ,  $U_q(t)$  и  $U_m(t)$  по  $n$ -й спектральной составляющей в базисе ВКФ при  $r = 4$ .

Из рис. 2 также следует, что при фиксированных модулях комплексных спектральных векторов, чем меньше отклонение фазы спектрального вектора разложения  $\delta_{l,n}$  от фазы соответствующего информационного сигнала  $B_{l,n}$ , тем больше расстояние  $\partial_{l,n}$  до границы с ближайшим сектором. Следовательно, при фиксированных модулях комплексных спектральных векторов максимум

расстояния  $\delta_{l,n}$  до границы с любым ближайшим сектором будет достигаться при:

$$\delta_{l,n} = 0. \quad (40)$$

Проведем оптимизацию системы групповых последовательностей по критерию (32) для поэлементного приема в базисе ВКФ информационных векторов при условиях (17), (40).

Пусть каждый информационный сигнал в ГП передается на  $\alpha$  ВКФ. Предположим, что информационный сигнал  $B_{l,j}$  передается на  $\alpha$  ВКФ с номерами  $n \in \bar{A}_j$ . Разделим все множество номеров  $n \in \{0, \dots, N\}$  спектральных составляющих разложения ГП в базисе ВКФ на два подмножества номеров, соответствующих  $n \in \bar{A}_j$  и  $n \notin \bar{A}_j$ . Представим (27) в виде двух слагаемых, учитывая условие (40)

$$D_{l,k}^2 = N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} (b_{l,n}^2 + b_{k,n}^2 - 2b_{l,n} b_{k,n} \cos(2\pi \Delta r_{l,k,n}/r)) + N \sum_{n \notin \bar{A}_j}^{N-\alpha} (b_{l,n}^2 + b_{k,n}^2 - 2b_{l,n} b_{k,n} \cos(2\pi \Delta r_{l,k,n}/r)). \quad (41)$$

Минимум в (41) будет в случае, если ГП  $U_l(t)$  и  $U_k(t)$  являются ближайшими, т.е.  $\alpha$  информационных сигналов  $B_{l,n \in \bar{A}_j}, B_{k,n \in \bar{A}_j}$  находятся в соседних секторах. Тогда:

$$\Delta r_{l,k,n} = \pm 1. \quad (42)$$

С учетом четности функции косинуса, минимум в (41) будет:

$$\min_{l,k,j} D_{l,k}^2 = N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} (b_{l,n}^2 + b_{k,n}^2 - 2b_{l,n} b_{k,n} \cos(2\pi/r)) + N \sum_{n \notin \bar{A}_j}^{N-\alpha} (b_{l,n}^2 + b_{k,n}^2 - 2b_{l,n} b_{k,n} \cos(2\pi \Delta r_{l,k,n}/r)). \quad (43)$$

при

$$b_{l,n} \geq 0, b_{k,n} \geq 0. \quad (44)$$

В первом слагаемом объединены  $\alpha$  модулей комплексных спектральных векторов  $b_{l,n}$  и  $b_{k,n}$ , для которых информационные сигналы находятся в соседних секторах (38). Во втором слагаемом объединены остальные модули комплексных спектральных векторов, для которых либо информационные сигналы равны, либо эти комплексные спектральные вектора не переносят информационные сигналы.

Следовательно, при поэлементном приеме ГП  $U_l(t)$  в базисе ВКФ для отличия ее от ближайшей к ней ГП  $U_k(t)$  необходимо принять только информационный сигнал  $B_{l,n \in \bar{A}_j}$ , которыми эти ГП различаются. Аналогично, при поэлементном приеме ГП  $U_k(t)$  для отличия ее от ближайшей к ней ГП  $U_l(t)$  необходимо принять только отличающий их информационный сигнал  $B_{k,n \in \bar{A}_j}$ . Следовательно, для различения ближайших  $U_l(t)$  и  $U_k(t)$  при поэлементном приеме используется только первое слагаемое в (43). Поэтому в качестве критерия оптимальности при поэлементном приеме любой ГП  $U_l(t)$  в базе ВКФ для отличия ее от любых других ГП  $U_k(t)$  достаточно применить максимизацию первого слагаемого в (43), выбрав минимум из всех  $j = 1, J$ , при условии (44).

Выделим первое слагаемое в (43):

$$\mathcal{D}_{l,k,j}^2 = N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} (b_{l,n}^2 + b_{k,n}^2 - 2b_{l,n} b_{k,n} \cos(2\pi/r)). \quad (45)$$

Критерий оптимальности системы групповых последовательностей для поэлементного приема в базисе ВКФ при условии (44) примет вид:

$$\min_{l \neq k, j=1, J} \mathcal{D}_{l,k,j}^2 \Rightarrow \max. \quad (46)$$

при

$$b_{l,n} \geq 0, b_{k,n} \geq 0. \quad (47)$$

Обозначим:

$$N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2 = E_{l,j}, \quad (48)$$

где  $E_{l,j}$  – энергия, задействованная для передачи информационного сигнала  $B_{l,j}$  в ГП  $Z_l(t)$ .

Очевидно, оптимальным является одинаковое выделение энергии для передачи любого информационного вектора в ГП  $Z_l(t)$  и  $Z_k(t)$ :

$$E_{l,j} = E_{k,j} = N/J, \quad (49)$$

при  $j = 1, J$ .

Из (45) при условии (47) видно, что  $\mathcal{D}_{l,k,j}^2$  является непрерывной дифференцируемой функцией [2] относительно ее аргументов  $b_{l,n}$  и  $b_{k,n}$ .

Вычислим условные экстремумы функции (45) при условии (47) для всех  $l \neq k, j = 1, J$ . Система функций Лагранжа [2] для (45) с учетом (48):

$$L_j = N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} (b_{l,n}^2 + b_{k,n}^2 - 2b_{l,n} b_{k,n} \cos(2\pi/r)) + \gamma_{l,j} (N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2 - E_{l,j}) + \gamma_{k,j} (N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{k,n}^2 - E_{k,j}), \quad (50)$$

где  $j = 1, J, l \neq k, b_{l,n} \geq 0, b_{k,n} \geq 0, \gamma_{l,j}$  и  $\gamma_{k,j}$  – неизвестные постоянные.

Делим на  $N$  и приравниваем нулю производные (50) по  $b_{l,n}, b_{k,n}, \gamma_{l,j}, \gamma_{k,j}$  для всех  $j = 1, J, n \in \bar{A}_j$ :

$$\frac{\partial L_j}{N \partial b_{l,n}} = 2(b_{l,n} - b_{k,n} \cos(2\pi/r)) + 2\gamma_{l,j} b_{l,n} = 0. \quad (51)$$

$$\frac{\partial L_j}{N \partial b_{k,n}} = 2(b_{k,n} - b_{l,n} \cos(2\pi/r)) + 2\gamma_{k,j} b_{k,n} = 0. \quad (52)$$

$$\frac{\partial L_j}{N \partial \gamma_{l,j}} = \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2 - E_{l,j} / N = 0. \quad (53)$$

$$\frac{\partial L_j}{N \partial \gamma_{k,j}} = \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{k,n}^2 - E_{k,j} / N = 0. \quad (54)$$

Из (51) получим при  $n \in \bar{A}_j$ :

$$b_{l,n} = b_{k,n} \cos(2\pi/r) / (\gamma_{l,j} + 1). \quad (55)$$

Подставим (55) в (53):

$$(\sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{k,n}^2) \cos^2(2\pi/r) = (\gamma_{l,j} + 1)^2 E_{l,j} / N. \quad (56)$$

Учитывая (49), получим при  $n \in \bar{A}_j$ :

$$(\gamma_{l,j} + 1) = \pm \cos(2\pi/r) \sqrt{E_{k,j} / E_{l,j}}. \quad (57)$$

Подставим (57) в (55). Поскольку  $b_{l,n} \geq 0$  и  $b_{k,n} \geq 0$ , получим единственное ненулевое решение системы уравнений (51-54), которое дает максимум в (45):

$$b_{k,n} = b_{l,n} \sqrt{E_{k,j} / E_{l,j}}. \quad (58)$$

Подставив (58) в (45):

$$\mathcal{D}_{l,k,j}^2 = N \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2 (1 + E_{k,j} / E_{l,j} - 2 \sqrt{E_{k,j} / E_{l,j}} \cos(2\pi/r)). \quad (59)$$

При выполнении условия (49):

$$\mathcal{D}_{l,k,j}^2 = 4N \sin^2(\pi/r) \sum_{n \in \bar{A}_j}^{\alpha} b_{l,n}^2. \quad (60)$$

Разложим в ряд

$$\sin^2(\pi/r) = (\pi/r)^2 - \left(\frac{\pi}{r}\right)^6 / 3! + \dots \quad (61)$$

Из (60, 61) следует, что  $\mathcal{D}_{l,k,j}^2$  убывает пропорционально  $r^2$ , поэтому с увеличением  $r$  падает помехоустойчивость системы.

Из (46, 60) получим критерий оптимизации подмножества  $\check{U}^J$   $r$ -фазных ГП для поэлементного приема в базисе ВКФ:

$$\min_{l,j} \sum_{n \in \bar{A}_j}^\alpha b_{l,n}^2 \rightarrow \max, \quad (62)$$

при

$$b_{l,n} \geq 0, b_{k,n} \geq 0, \delta_{l,n} = 0. \quad (63)$$

Из (62) следует, что критерий оптимизации подмножества ГП  $\check{U}^J$  для поэлементного приема ГП фактически заменен оптимизацией каждой ГП  $U_l(t)$ .

При количестве информационных сигналов  $J < N/3$  и  $\alpha = 1$  критерий оптимизации подмножества ГП для поэлементного приема ГП (62) преобразуется в критерий:

$$\min_n b_{l,n \in J} \rightarrow \max, \quad (64)$$

при

$$b_{l,n \in J} \geq 0, \delta_{l,n \in J} = 0. \quad (65)$$

Формирование групповых последовательностей происходит в 2 этапа: формирование начальных ГП [4], затем оптимизация начальных ГП.

Компьютерное моделирование показало, что сформированные начальные групповые последовательности [4] содержат значительные нелинейные искажения, при которых часто не выполняются условия (63) и могут вызывать ошибки при поэлементном приеме в базисе ВКФ. Поэтому необходимо выработать критерий оптимизации для таких ГП.

### 3. Оптимальный поэлементный прием групповых последовательностей.

Для  $\alpha = 1$  рассмотрим процесс принятия решения в приемном устройстве при приеме  $n$ -й информационной ортогональной последовательности ВКФ, при

котором не выполняются условия (65). Нормированный к длине последовательности  $N$  корреляционный отклик ГП на  $n$ -ю комплексно-сопряженную информационную последовательность ВКФ (16, 21):

$$\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} B_{l,n} \theta_{l,n} g_{n,i} g_{n,i}^* = B_{l,n} \theta_{l,n}. \quad (66)$$

На рис. 3 при поэлементном приеме для  $r = 4$  представлен вариант принятия решения по нормированному корреляционному отклику  $B_{l,n} \theta_{l,n}$  на выходе соответствующего коррелятора для ВКФ  $G_n(t)$  в случае если передающее устройство передает ГП  $U_l(t)$ , в которой информационный сигнал  $B_{l,n}$  передается с помощью одной нормированной ВКФ  $G_n(t)$ . Информационные векторы в передающем устройстве при этом могут принимать четыре значения:  $B_{l,n} \in \{B_0, \dots, B_3\}$ .

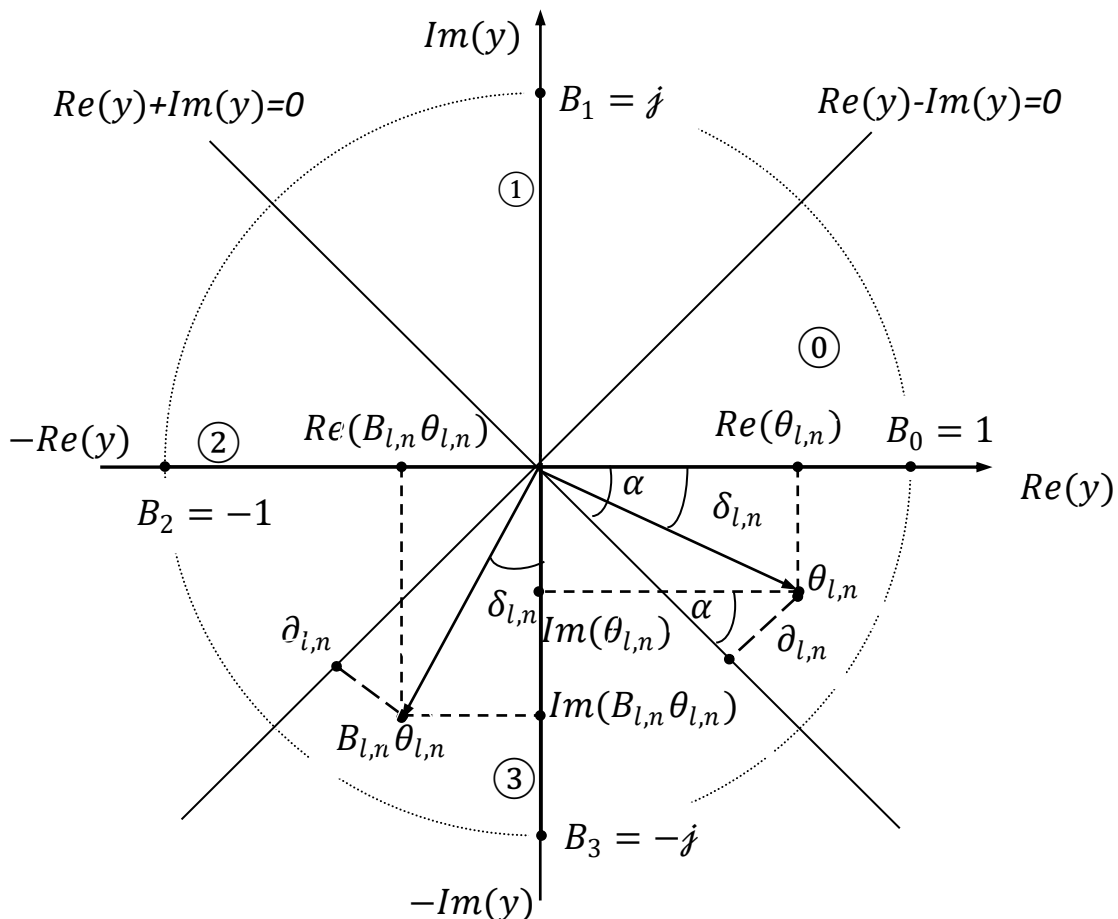


Рис. 3. Вариант принятия решения по нормированному корреляционному отклику  $B_{l,n} \theta_{l,n}$  на выходе соответствующего  $n$ -го коррелятора.

Рассмотрим плоскость комплексной переменной  $y$  на рис. 3. Разделим все множество входных нормированных к длине  $N$  комплексных корреляционных откликов  $B_{l,n}\theta_{l,n}$  на 4 области принятия решения соответствующих информационных сигналов  $B_{l,n} \in \{B_0, \dots, B_3\}$  с помощью прямых:

$$\operatorname{Re}(y) - \operatorname{Im}(y) = 0; \operatorname{Re}(y) + \operatorname{Im}(y) = 0. \quad (67)$$

На выходе  $n$ -го коррелятора приемника получен нормированный комплексный корреляционный отклик  $B_{l,n}\theta_{l,n}$ , действительная и мнимая часть которого равны  $\operatorname{Re}(B_{l,n}\theta_{l,n})$  и  $\operatorname{Im}(B_{l,n}\theta_{l,n})$ . Из рис. 3 следует, что поскольку  $B_{l,n}\theta_{l,n}$  попал в 3-й сектор, то в этом случае должно быть принято решение о приеме информационного сигнала  $B_{l,n} = B_3$ . На рис. 3 отклонение  $\partial_{l,n}$  от ближайшей границы области принятия решения до нормированного корреляционного отклика  $B_{l,n}\theta_{l,n}$  определяет помехоустойчивость приема. Модуль отклонения  $|\partial_{l,n}|$  является расстоянием от точки  $B_{l,n}\theta_{l,n}$  до ближайшей границы области принятия решения.

Разделим нормированный корреляционный отклик  $B_{l,n}\theta_{l,n}$  на информационный вектор  $B_{l,n} = e^{3\pi/2}$ , что равносильно повороту  $B_{l,n}\theta_{l,n}$  на угол  $-3\pi/2$ . Таким образом  $\theta_{l,n}$  окажется в нулевом сегменте. Из рис. 3 с помощью элементарной геометрии несложно получить отклонение  $\partial_{l,n}$  точки  $\theta_{l,n}$  до ближайшей границы области принятия решения для любых  $\theta_{l,n}$ :

$$\partial_{l,n} = \operatorname{Re}(\theta_{l,n}) \sin \lambda - |\operatorname{Im}(\theta_{l,n})| \cos \lambda, \quad (68)$$

где

$$\lambda = \pi / r. \quad (69)$$

Из (68) следует, что отклонение  $\partial_{l,n}$  может быть как положительным, так и отрицательным. Если в передающем устройстве при формировании ГП  $U_l(t)$  получено отклонение  $\partial_{l,n} \leq 0$ , то это означает, что в ГП заложена ошибка в  $n$ -м информационном сигнале  $B_{l,n}$ . Это соответствует тому, что в передающем устройстве вместо  $B_3$  будет передаваться  $B_0$  или  $B_2$  из соседних секторов.

Поэтому при поэлементном приеме для любых отклонений  $\partial_{l,n}$  необходимым условием без учета помех для достоверной передачи информационного сигнала  $B_{l,n}$  на одной ВКФ  $G_n(t)$  в ГП  $U_l(t)$  является:

$$\partial_{l,n} > 0. \quad (70)$$

В этом случае отклонение (70) равно расстоянию  $|\partial_{l,n}|$  от нормированного комплексного корреляционного отклика приемника на входной сигнал по  $n$ -й спектральной составляющей в базисе ВКФ до ближайшей границы принятия решения:

$$\partial_{l,n} = |\partial_{l,n}|. \quad (71)$$

Следовательно, при невыполнении условий (65) критерием оптимизации ГП  $U_l(t)$  в передающем устройстве при поэлементном приеме является критерий для отклонений  $\partial_{l,n}$  по ВКФ, на которых передаются информационные сигналы  $B_{l,n}$ :

$$\min_{n \in J} (Re(\theta_{l,n}) \sin \lambda - |Im(\theta_{l,n})| \cos \lambda) \rightarrow \max. \quad (72)$$

Из (72) следует, что отклонение  $\partial_{l,n}$  быстро снижается с ростом количества фаз  $r$ . Кроме того, из рис. 3 следует, что при выполнении условий (65) критерий (72) тождественен критерию (64).

Рассмотрим случай передачи информационных векторов  $B_{l,j}$  на ортогональных последовательностях  $F_j(t)$ , которые являются суммой из  $\alpha$  ВКФ, причем каждая ВКФ может использоваться только в одной из  $F_j(t)$ :

$$F_j(t) = \sum_{i=0}^{N-1} f_{ji} \tau(t - i\Delta), \quad (73)$$

где

$$f_{ji} = \sum_{n \in J} \alpha g_{ni} \quad (74)$$

–  $i$ -й элемент новой ортогональной последовательности  $F_j(t)$ .

Из (66) получим сумму комплексных нормированных корреляционных откликов на выходе, соответствующих  $\alpha$  корреляторов при приеме  $B_{l,j} F_j(t)$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{n \in J} \alpha \sum_{i=0}^{N-1} B_{l,n} \theta_{l,n} g_{n,i} g_{n,i}^* = B_{l,n \in J} \theta_{l,j}, \quad (75)$$

где



$$\theta_{l,j} = \sum_{n \in j}^{\alpha} \theta_{l,n}. \quad (76)$$

Учитывая ортогональность ВКФ, по аналогии с расчетами для ортогональных последовательностей Уолша [9] можно показать, что отклонение взвешенной суммы комплексных нормированных корреляционных откликов на ГП  $U_l(t)$  приемника от ближайшей границы принятия решения:

$$\beta_{l,j} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n \in j}^{\alpha} \theta_{l,n}. \quad (77)$$

Из (77) и (68) получим:

$$\beta_{l,j} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n \in j}^{\alpha} (Re(\theta_{l,n}) \sin \alpha - |Im(\theta_{l,n})| \cos \alpha). \quad (78)$$

По аналогии с условием (70) можно показать, что при формировании ГП  $U_l(t)$  в передающем устройстве для достоверной передачи информационного вектора  $B_{l,j}$  необходимым условием является:

$$\beta_{l,j} > 0. \quad (79)$$

При выполнении этого условия само отклонение (78) будет являться расстоянием до ближайшей границы принятия решения. Соответственно, с ростом расстояния  $\beta_{l,j}$  увеличивается и помехозащищенность передачи информационного сигнала  $B_{l,j}$ .

Если при формировании ГП получится  $\beta_{l,j} < 0$ , то посредством такой ГП  $U_l(t)$  по каналу будет передан другой информационный сигнал вместо  $B_{l,j}$ , т.е. вероятность ошибки становится равна 1. Следовательно, общим критерием оптимальности ГП  $U_l(t)$  в передающем устройстве при поэлементном приеме является:

$$\min_j \beta_{l,j} \rightarrow \max. \quad (80)$$

Оптимизация ГП по критерию (80) заключается в изменении  $r$ -ичной фазы некоторых элементов  $u_{l,i}$  ГП  $U_l(t)$  на другую  $r$ -ичную фазу.

#### 4. Алгоритм пошаговой оптимизации групповой последовательности.

Решение задачи целочисленной нелинейной оптимизации (80) в общем виде не известно. Поэтому разработан алгоритм пошаговой оптимизации ГП в

передающем устройстве, который заключается в пошаговой замене  $r$ -ичных фаз некоторых элементов  $u_{l,i}$  ГП  $U_l(t)$  на другие  $r$ -ичные фазы с проверкой оптимальности этой замены. Для этого запишем критерий оптимизации ГП  $U_l(t)$  в передающем устройстве (80) в виде:

$$\min_{j \in J}(\beta_{l,j,i}(\Delta\varphi_{l,i})) \xrightarrow{\sum_{i=0}^{N-1} u_{l,i}(\varphi_{l,i} + \Delta\varphi_{l,i})\tau(t-i\Delta)} \max(\Delta\varphi_{l,i}), \quad (81)$$

где

$$\Delta\varphi_{l,i} = j2\pi\Delta r_{l,i}/r, \quad (82)$$

– управляющее изменение фазы  $i$ -го элемента ГП  $u_{l,i}$ ,  $\beta_{l,j,i}(\Delta\varphi_{l,i})$  – полученное после изменения фазы  $\Delta\varphi_{l,i}$  на  $i$ -м шаге оптимизации отклонение взвешенной суммы комплексных нормированных корреляционных откликов передающего  $B_{l,j}$  до ближайшей границы принятия решения.

Проведено компьютерное моделирование для поэлементного приема алгоритма пошаговой оптимизации ГП  $U_l(t)$  по критерию (81) при  $r = 3, 4, 6, 8$  и различных значениях  $\alpha$  и  $N$ . Рассчитывалась зависимость отклонений  $\beta_j$  от относительной скорости передачи информации  $J/N$ . Анализ результатов компьютерного моделирования процесса оптимизации ГП показал, что при  $\alpha = 1$  получаются наибольшие значения отклонений  $\beta_j$ . Критерий оптимизации ГП  $U_l(t)$  в передающем устройстве (81) при  $\alpha = 1$  примет вид:

$$\min_{n \in J}(\partial_{l,n,i}(\Delta\varphi_{l,i})) \xrightarrow{\sum_{i=0}^{N-1} u_{l,i}(\varphi_{l,i} + \Delta\varphi_{l,i})\tau(t-i\Delta)} \max(\Delta\varphi_{l,i}), \quad (83)$$

где  $\partial_{l,n,i}(\Delta\varphi_{l,i})$  – полученное после изменения фазы  $\Delta\varphi_{l,i}$  на  $i$ -м шаге оптимизации отклонение нормированного комплексного корреляционного отклика, передающего  $B_{l,n \in J}$  до ближайшей границы принятия решения.

Проведено компьютерное моделирование для поэлементного приема алгоритма пошаговой оптимизации ГП  $U_l(t)$  по критерию (83) для  $\alpha = 1$  при  $r = 3, 4, 6, 8$  и различных значениях  $N$ . Рассчитывалась зависимость отклонения  $\partial_{l,n \in J}$  от относительной скорости передачи информации  $J/N$ . Множество полученных в процессе оптимизации отклонений  $\{\partial_{l,n \in J}\}$  описывается нормальным распределением вероятности, причем минимальные значения

$\min (\partial_{l,n \in J})$  имеют очень низкую вероятность и мало информативны для оценки эффективности алгоритма, поэтому для оценки был применен расчет усредненного через вероятность ошибки минимального  $\partial_{min}$ ,

Результаты компьютерного моделирования алгоритма пошаговой оптимизации ГП, обеспечивающей полное устранение ошибок в передаваемых ГП представлены на рис. 4.

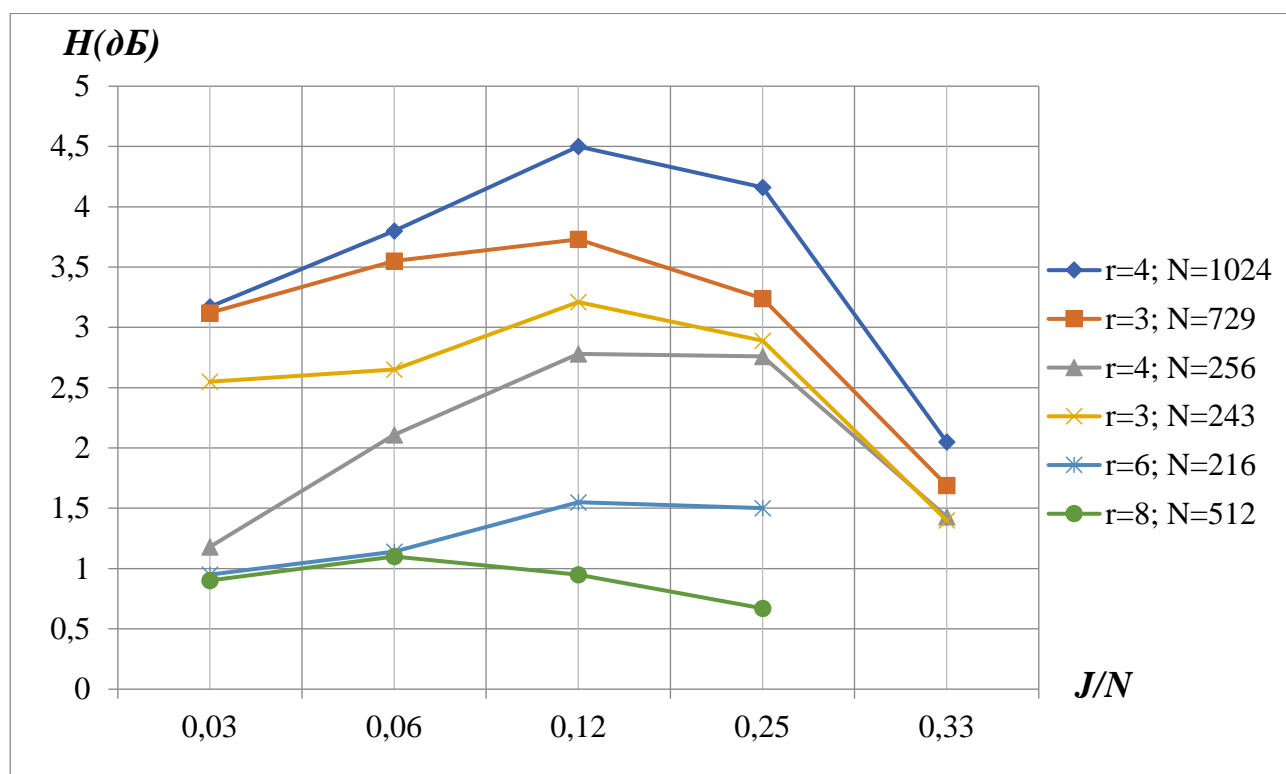


Рис. 4. Зависимость энергетического выигрыша  $H(\text{дБ})$  при поэлементном приеме от относительной скорости передачи информационных сигналов  $J/N$ .

При этом рассчитывалась величина энергетического выигрыша  $H$  [10] отклонения  $N\partial_{min}$  относительно передачи  $r$ -фазных сигналов длиной  $N/J$ :

$$H = (N\partial_{min}/K_J)^2, \tag{84}$$

где

$$K_J = N/J \tag{85}$$

– величина корреляционного отклика при передаче  $r$ -фазного сигнала длиной  $N/J$ .

Анализ результатов компьютерного моделирования процесса оптимизации ГП показывает:

– максимально возможная относительная скорость передачи информационных сигналов  $J/N$  без внесения ошибок на передаче снижается с увеличением количества фаз: так при  $r = 3, 4$  составляет примерно 0,3, а при  $r = 6, 8$  составляет примерно 0,25,

– с увеличением длины последовательности  $N$  увеличивается величина энергетического выигрыша,

– при  $r = 6, 8$  величина энергетического выигрыша незначительна, поэтому применять  $r > 4$  не целесообразно,

– полученная оптимизированная ГП  $U_l(t)$  иногда оказывается локальным максимумом, что связано с нелинейностью задачи целочисленной оптимизации.

Дополнительно разработаны различные алгоритмы для пошаговой оптимизации, которые позволяют исключить до  $(0,8 \div 0,9) * N$  элементов начальной ГП из процесса оптимизации, что существенно снижает объем вычислений.

## 5. Прием групповой последовательности, близкий к приему в целом.

Эффект значительного повышения энергетического выигрыша может быть достигнут если производить прием ГП в целом [3, 5, 6], однако при этом необходимо хранить в памяти приемного устройства все  $r^J$  вариантов возможных ГП, что практически нереализуемо при больших  $J$ . Чтобы обойти эту проблему предлагается алгоритм приема ГП в целом среди ближайших ГП.

Пусть  $\alpha = 1$ , тогда информационными являются только  $J$  последовательностей ВКФ, которые в (20) выделим в первое слагаемое:

$$U_l(t) = \sum_{j=1}^J B_{l,j} b_{l,j} \exp(j\delta_{l,j}) G_j(t) + \sum_{n \neq j}^{N-J} \eta_{l,n} G_n(t) \quad (86)$$

Пусть на приеме на вход декодера после демодуляции поступает сигнал равный сумме ослабленной в канале групповой последовательности  $U_l(t)$  и аддитивной помехи  $\dot{n}(t)$ :

$$S(t) = qU_l(t) + \dot{n}(t); \quad (87)$$

где  $q > 0$  – коэффициент ослабления ГП в канале,

$$\dot{n}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \xi_n G_n(t); \quad (88)$$

$\xi_n$  –  $n$ -й спектральный вектор разложения  $\dot{n}(t)$  в базисе ВКФ.

Разложим принимаемый сигнал  $S(t)$  в базисе ВКФ:

$$S(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{\eta}_{s,n} G_n(t); \quad (89)$$

где

$$\dot{\eta}_{s,n} = q\eta_{l,n} + \xi_n. \quad (90)$$

Алгоритм близкий к оптимальному приему ГП в целом для  $\alpha = 1$  состоит из следующих операций:

Принятый сигнал  $S(t)$  записывается в память приемного устройства. Производится поэлементный прием  $S(t)$  в базисе ВКФ с вычислением множества  $\{\dot{\eta}_{s,j}\}_{j=1,J}$ . По нему принимается предварительное решение о приеме множества информационных сигналов  $\{B_{s,j}\}_{j=1,J}$ , которое под воздействием аддитивной помехи  $\dot{n}(t)$  может отличаться от переданного множества информационных сигналов  $\{B_{l,j}\}_{j=1,J}$ .

По полученному множеству принятых информационных сигналов  $\{B_{s,j}\}_{j=1,J}$  приемное устройство формирует ГП  $U_s(t)$  по алгоритму, аналогичному алгоритму передающего устройства:

$$U_s(t) = \sum_{j=1}^J B_{s,j} b_{s,j} \exp(j\delta_{s,j}) G_j(t) + \sum_{n \neq j}^{N-J} \tilde{\eta}_{s,n} G_n(t), \quad (91)$$

где  $b_{s,j}$  – амплитуда  $j$ -го спектрального коэффициента разложения  $U_s(t)$ ,  $\delta_{s,j}$  – отклонение фазы  $\tilde{\eta}_{s,j}$  от фазы информационного сигнала  $B_{s,j}$ ,  $\tilde{\eta}_{s,n}$  –  $n$ -й спектральный коэффициент разложения  $U_s(t)$ .

Вычисляются квадраты расстояний (27) от сигнала  $S(t)$  до сформированной ГП  $U_s(t)$  по  $J$  ВКФ  $G_j(t)$ , передающих соответствующие информационные сигналы  $B_{s,j}$ :

$$D_{s,j}^2 = N(b_{s,j}^2 + \mathfrak{b}_{s,j}^2 - 2b_{s,j}\mathfrak{b}_{s,j} \cos(\Delta\vartheta_{s,j})), \quad (92)$$

где  $j = 1, J$ ,

$$\mathfrak{b}_{s,j} = |\dot{\eta}_{s,j}|, \quad (93)$$

$$\Delta\vartheta_{s,j} = \varphi(\tilde{\eta}_{s,j}) - \varphi(\dot{\eta}_{s,j}). \quad (94)$$

Для  $J_1 < J$  наибольших значений квадратов евклидовых расстояний  $D_{S,j}^2$ , по алгоритму оптимизации ГП передающего устройства приемное устройство формирует подмножество из  $J_1$  ближайших к  $U_s(t)$  групповых последовательностей  $\{U_k(t)\}_{k=1,J_1}$ , которые отличаются от  $U_s(t)$  отдельными информационными сигналами  $B_{k,j} \neq B_{s,j}$ , причем, информационный сигнал  $B_{k,j}$  выбирается в ближайшем к  $B_{s,j}$  соседнем секторе.

Вычисляются корреляционные отклики записанного в памяти приемного устройства сигнала  $S(t)$  с ГП  $U_s(t)$  и сформированными  $J_1$  групповыми последовательностями  $U_k(t)$ . Окончательное решение о принятой ГП в приемном устройстве производится по критерию максимального корреляционного отклика из этих  $(J_1 + 1)$  корреляционных откликов.

Поскольку описанный выше алгоритм приема в целом производится только среди ближайших  $(J_1 + 1)$  ГП к принятому сигналу  $S(t)$ , отличающихся от предварительно принятой  $U_s(t)$  ГП только ближайшими информационными сигналами  $B_{k,j} \neq B_{s,j}$ , то описанный алгоритм приема математически строго не является оптимальным приемом в целом. Однако, этот алгоритм является очень близким к оптимальному приему, поскольку остальные ГП из множества  $\{U_k(t)\}_{k=1,r^M}$ , отличаются значительно большими расстояниями от  $U_k(t)$  до  $S(t)$ . Соответственно, оптимальный прием в целом производится только среди ГП наиболее близких к принятому входному сигналу  $S(t)$ .

Для оценки эффективности описанного приема в целом проведено компьютерное моделирование формирования оптимальных  $r$ -фазных групповых последовательностей  $U_l(t)$  по критерию оптимизации (74), а также формирование по тем же алгоритмам  $J$  ближайших к ГП  $U_l(t)$  оптимальных ГП  $U_k(t)$ , которые при их формировании отличаются от  $U_l(t)$  одним ближайшим информационным сигналом  $B_{k,j} \neq B_{l,j}$ , где  $j = 1, J$ .

Далее рассчитывались квадраты евклидовых расстояний от ГП  $U_l(t)$  до  $J$  ближайших к ней ГП  $U_k(t)$ :

$$D_{l,k}^2 = \sum_{i=0}^{N-1} ((\text{Re}u_{l,i} - \text{Re}u_{k,i})^2 + (\text{Im}u_{l,i} - \text{Im}u_{k,i})^2). \quad (95)$$

Компьютерное моделирование процесса оптимизации ГП показало, что квадраты расстояний от ГП  $U_l(t)$  до ближайших к ней ГП  $U_k(t)$  распределены по нормальному закону, причем минимальный квадрат расстояния от ГП  $U_l(t)$  до ближайшей к ней ГП  $U_k(t)$  имеет очень низкую вероятность появления и мало информативен для оценки эффективности алгоритма. Поэтому для оценки был использован усредненный через вероятность ошибки квадрат расстояния  $\mathcal{D}^2$  от ГП  $U_l(t)$  до ближайших к ней ГП, который в полной мере учитывает распределение квадратов расстояний от ГП  $U_l(t)$  до ближайших к ней ГП  $U_k(t)$  с вероятностью их появления.

Сравнение  $\mathcal{D}^2$  проводилось с соответствующими квадратами евклидова расстояния  $D_r^2$  для  $r$ -фазных информационных сигналов длиной  $N/J$ . Несложно показать, что, например:

$$D_3^2 = 3N/J, \quad (96)$$

– квадрат евклидова расстояния при передаче  $J$  3-фазных информационных сигналов,

$$D_4^2 = 2N/J, \quad (97)$$

– квадрат евклидова расстояния при передаче  $J$  4-фазных информационных сигналов,

$$D_6^2 = N/J, \quad (98)$$

– квадрат евклидова расстояния при передаче  $J$  6-фазных информационных сигналов,

$$D_8^2 = (2 - \sqrt{2}) / J = 0,586 N/J. \quad (99)$$

– квадрат евклидова расстояния при передаче  $J$  8-фазных информационных сигналов.

Энергетический выигрыш [10] от применения групповых последовательностей по усредненному через вероятность ошибки квадрата расстояния  $\mathcal{D}^2$  от ГП  $U_l(t)$  до ближайших к ней ГП:

$$HD = \mathcal{D}^2 / D_r^2. \quad (100)$$

Результаты компьютерного моделирования процессов оптимизации ГП и приема ГП в целом при  $\alpha = 1$  для различных  $N$ ,  $r$  приведены на рис. 5. Анализ результатов приема ГП в целом показывает:

- энергетический выигрыш при приеме в целом гораздо больше энергетического выигрыша при поэлементном приеме на рис. 4,
- энергетический выигрыш с ростом  $N$  существенно растет, достигая 17 дБ при  $N = 1024$ ,
- при приеме в целом, увеличивая длину  $N$  групповых последовательностей, можно повысить энергетический выигрыш.

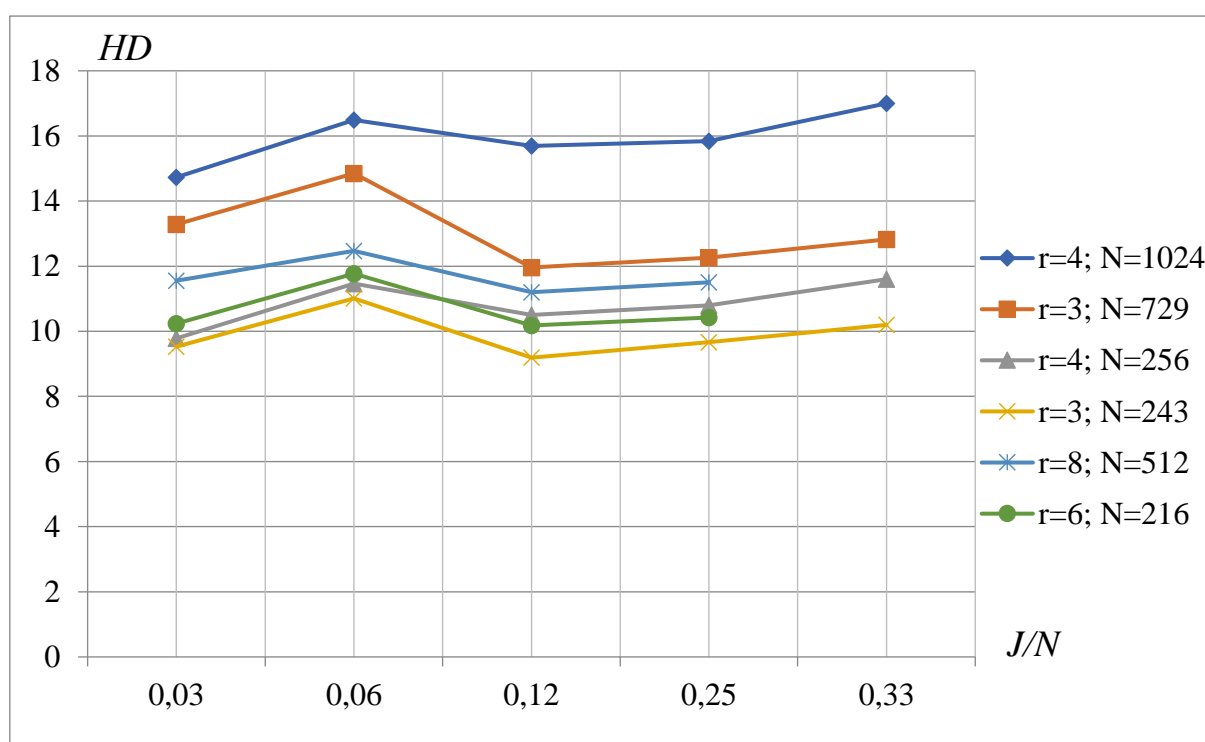


Рис. 5. Зависимость энергетического выигрыша  $HD$  (дБ) при приеме в целом от относительной скорости передачи информационных сигналов  $J/N$ .

Для объяснения результатов компьютерного моделирования, используя (41), запишем квадрат расстояния между ближайшими ГП:

$$D_{l,k}^2 = N \sum_{j=1}^J (b_{l,j}^2 + b_{k,j}^2 - 2b_{l,j} b_{k,j} \cos(2\pi\Delta r_{l,k,j}/r + \Delta\delta_{l,k,j})) + N \sum_{n \neq j}^{N-J} (b_{l,n}^2 + b_{k,n}^2 - 2b_{l,n} b_{k,n} \cos(\Delta\delta_{l,k,n})). \quad (101)$$

Поскольку при поэлементном приеме ГП решение о приеме информационного сигнала  $B_{l,j}$  в (93) производится только по одному слагаемому в первой сумме, определяющих информационный сигнал  $B_{l,j}$ , то при приеме всей



ГП в целом дополнительно учитываются оставшиеся  $(J - 1)$  слагаемых в первой сумме и  $(N - J)$  слагаемых во второй сумме (93), причем из (101) следует, что все слагаемые  $\geq 0$ .

### **Заключение.**

В работе проведено обобщение метода оптимизации двоичных групповых последовательностей для  $r$ -фазных групповых последовательностей, полученных в результате нелинейного кодового уплотнения. Получен критерий оптимизации, который заключается в максимизации минимального отклонения комплексного корреляционного отклика групповой последовательности на информационную ВКФ от границы принятия решения. Представленные результаты оптимизации  $r$ -фазных групповых последовательностей показывают, что предложенный алгоритм оптимизации, который заключается в замене фазы некоторых элементов групповой последовательности на другие варианты фазы, не только полностью устраняет ошибки нелинейного кодового уплотнения, но и повышает энергетический выигрыш для поэлементного приема групповой последовательности в базе ВКФ. Разработанный алгоритм приема в целом групповой последовательности среди ближайших групповых последовательностей, дополнительно существенно повышает энергетический выигрыш приема групповой последовательности относительно поэлементного приема групповой последовательности.

### **Литература**

1. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа*. Москва, Наука. 1989. 624 с.
2. Корн Г.К., Корн Т.К. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука. 1984. 832 с.
3. Варакин Л.Е. *Системы связи с шумоподобными сигналами*. Москва, Радио и связь. 1985. 384 с.

4. Бердышев О.Ю. Метод нелинейного кодового уплотнения многофазной групповой последовательности. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №6. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.6.7>
5. Возенкрафт Дж., Джекобс И. *Теоретические основы техники связи*. Москва, Мир. 1969. 640 с.
6. Вишневецкий В.М., Портной С.Л., Шахнович И.В. *Энциклопедия WiMAX. Путь к 4G*. Москва, Техносфера. 2009. 472с.
7. Трахтман А.М. *Введение в обобщенную спектральную теорию сигналов*. Москва, Советское радио. 1972. 352 с.
8. Трахтман А.М., Трахтман В.А. *Основы теории дискретных сигналов на конечных интервалах*. Москва, Советское радио. 1975. 208 с.
9. Бердышев О.Ю. Оптимизация двоичных групповых последовательностей, полученных в результате нелинейного кодового уплотнения. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.8.11>
10. Ипатов В. *Широкополосные системы и кодовое разделение сигналов*. Москва, Техносфера. 2007. 488 с.

**Для цитирования:**

Бердышев О.Ю. Оптимизация  $r$ -фазных групповых последовательностей, полученных в результате нелинейного кодового уплотнения. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.12.7>