

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.12.14>

УДК: 537.876.22

О ВРЕМЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ ВДАЛИ ОТ ТОЧКИ ИЗЛУЧЕНИЯ

Н.С. Бухман, А.В. Куликова

Самарский государственный технический университет, 443100, Самара,
ул. Молодогвардейская, д. 244

Статья поступила в редакцию 26 декабря 2022г.

Аннотация. Рассмотрено распространение и искажение узкополосного сигнала в однородной диспергирующей среде. Показано, что при переходе от ближней к асимптотической зоне зависимость интенсивности сигнала от времени изменяется, но затем стабилизируется и больше не изменяется вплоть до длины пути, при которой начинается искажение амплитудно-частотного спектра сигнала, например, начинает меняться его несущая частота или сигнал теряет свой узкополосный статус, и становится необходимым учет дисперсии поглощения. При этом временная зависимость интенсивности сигнала в асимптотической зоне не всегда совпадает с интенсивностью его фурье-спектра в начальной точке в определенном масштабе. Сформулированы условия, при которых это совпадение имеет или, напротив, не имеет места. Показано, что это совпадение имеет место не для сигналов, которые являются узкополосными "в целом" (ширина спектра которых мала по сравнению с несущей частотой), а только для сигналов, которые являются "узкополосными для данной среды" (ширина спектра которых мала по сравнению с расстоянием от несущей частоты до ближайшей особенности волнового числа на комплексной плоскости). Для сигналов же, узкополосных для данной среды, это совпадение имеет место не только в области применимости второго приближения классической теории

дисперсии, но и во всей асимптотической зоне вплоть до длины пути, при которой амплитудно-частотный спектр сигнала начинает изменяться.

Ключевые слова: дисперсия, волновой пакет, сигнал, искажение, асимптотическая зона, распространение радиоволн, распространение электромагнитных волн.

Автор для переписки: Бухман Николай Сергеевич, nik3142@yandex.ru

Введение

Рассмотрим распространение сигнала $E(z, t)$ с частотой несущей ω_1 и комплексной огибающей $A(z, t)$ в однородной изотропной среде вдоль оси z . Предполагая, что сигнал является узкополосным (то есть ширина спектра сигнала мала в сравнении с частотой несущей ω_1 [1,2]), имеем:

$$E(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\omega}(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega,$$

$$E_{\omega}(z, \omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} E(z, t) \exp(i\omega t) dt, \quad (1)$$

$$E(z, t) = A(z, t) \exp(-i\omega_1 t) + A^*(z, t) \exp(i\omega_1 t),$$

$$A(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\Omega}(z, \Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega,$$

$$A_{\Omega}(z, \Omega) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) \exp(i\Omega t) dt,$$

$$E_{\omega}(z, \omega) = A_{\Omega}(z, \omega - \omega_1) + (A_{\Omega}(z, -(\omega + \omega_1)))^*,$$

где $E(z, t)$ и $E_{\omega}(z, \omega)$ – высокочастотный сигнал и его спектр, $A(z, t)$ и $A_{\Omega}(z, \Omega)$ – низкочастотная комплексная огибающая сигнала и ее спектр.

Обозначим спектр комплексной огибающей сигнала в начальной точке $z = 0$ как $A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \equiv A_{\Omega}(0, \Omega)$. Тогда для огибающей сигнала в произвольной точке z имеем:

$$\begin{aligned}
 A(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(ik(\omega_1 + \Omega)z) \exp(-i\Omega t) d\Omega = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-k_i(\omega_1 + \Omega)z) \right] \exp[i(k_r(\omega_1 + \Omega)z - \Omega t)] d\Omega,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $k(\omega) = (\omega/c)n(\omega) = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$ – комплексное волновое число для волны с частотой ω , $n(\omega)$ – показатель преломления среды (в общем случае комплексный).

В данной работе мы рассматриваем распространение сигнала в слабо поглощающей среде ($k_i \ll k_r$) при $z \rightarrow \infty$. При достаточно больших z и выполнении условия $k_i \ll k_r$ множитель $\exp[i(k_r(\omega_1 + \Omega)z - \Omega t)]$ можно считать быстро осциллирующим в сравнении с множителем¹ $A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-k_i(\omega_1 + \Omega)z)$ и воспользоваться методом стационарной фазы [2,3], что дает нам:

$$\begin{aligned}
 A(z, t) &= \exp \left[i \left(k_r(\omega_1 + \Omega)z - \Omega t + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(k_r''(\omega_1 + \Omega)z) \right) \right] \times \\
 &\times \sqrt{\frac{2\pi}{|k_r''((\omega_1 + \Omega)z)|}} \left[A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-k_i(\omega_1 + \Omega)z) \right],
 \end{aligned} \tag{3}$$

где Ω – некоторая функция аргумента t , неявно определяемая уравнением:

$$k_r'(\omega_1 + \Omega) = (t/z). \tag{4}$$

Эта функция зависит от аргумента t только через комбинацию (t/z) и уравнение (4) можно переписать как:

$$t(\Omega, z) = k_r'(\omega_1 + \Omega)z. \tag{5}$$

Формула (3) является асимптотической ($z \rightarrow \infty$); она применима тогда, когда длительность сигнала становится велика в сравнении с исходной длительностью при $z = 0$. Именно эту область мы и будем ниже именовать

¹ В данной работе мы не рассматриваем исходно шумоподобные сигналы, то есть предполагаем, что функция $A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)$ не является быстроосциллирующей.

асимптотической зоной. Вместо термина «асимптотическая зона» авторы с легким сердцем использовали бы вслед за [2] термин «дальняя зона», но этот термин уже занят в теории антенн и, как нам неоднократно указывали, имеет несколько иной смысл, а потому его использование может ввести читателя в заблуждение².

Нас интересует вопрос о том, что же происходит с узкополосным сигналом «в конце концов», при неограниченном увеличении протяженности трассы, поэтому нас интересует именно вопрос о поведении сигнала в асимптотической зоне.

1. Поле сигнала в асимптотической зоне

Формулы (3) и (4) можно рассматривать как окончательные даже без разрешения (4) относительно переменной Ω и отыскания явного вида функции $\Omega(t/z)$. Для этого достаточно рассматривать пару формул (3) и (5) как параметрический способ [5] задания функции $A(z, t)$ через параметр $\Omega \in (-\infty, +\infty)$, при котором пара функций параметра Ω ($A(z, \Omega)$ (3) и $t(\Omega)$ (5)) определяет функцию $A(z, t)$ как функцию переменной t .

Если ввести «сдвинутое» на время групповой задержки [1] $k'_r(\omega_1)z$ время:

$$t_s(z) = t - k'_r(\omega_1)z \quad (6)$$

и с учетом (6) заменить (5) на:

$$t_s(\Omega, z) = (k'_r(\omega_1 + \Omega) - k'_r(\omega_1))z, \quad (7)$$

то мы получим параметрическое задание огибающей сигнала как функции «сдвинутого» времени $A(z, t_s)$, а если заменить (3) на:

$$I(z, \Omega) = \frac{2\pi}{|k''_r((\omega_1 + \Omega)z)|} \left[I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-2k_i(\omega_1 + \Omega)z) \right] \quad (8)$$

² Можно было бы назвать эту зону и «зоной шумоподобности сигнала», поскольку сигнал с базой порядка единицы в точке старта неизбежно становится шумоподобным в асимптотической зоне за счет увеличения его продолжительности без изменения ширины спектра, в результате чего его база оказывается велика в сравнении с единицей [4].

где $I(z, \Omega) = |A(z, \Omega)|^2$, $I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = |A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)|^2$ – интенсивность спектра сигнала в стартовой точке, то как параметрическое задание интенсивности сигнала $I(z, t) = |A(z, t)|^2$.

Если пренебречь дисперсией коэффициента поглощения (что допустимо в среде без поглощения или при протяженности трассы:

$$z \ll 1/(2k_i' \Omega_{sig}), \quad (9)$$

где Ω_{sig} – ширина спектра сигнала) то (3) и (8) можно заменить на более простые соотношения:

$$A(z, t) = \exp \left[i \left(k_r(\omega_1 + \Omega)z - \Omega t + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(k_r''(\omega_1 + \Omega)z) \right) \right] \times \\ \times \sqrt{\frac{2\pi}{|k_r''((\omega_1 + \Omega)z)|}} A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-k_i(\omega_1)z), \\ I(z, \Omega) = \frac{2\pi I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-2k_i(\omega_1)z)}{|k_r''((\omega_1 + \Omega)z)|}. \quad (10)$$

В случае полного отсутствия поглощения формула (10) заменяется на:

$$I(z, \Omega) = \frac{2\pi I_{\Omega}^{(0)}(\Omega)}{|k_r''((\omega_1 + \Omega)z)|}, \quad (11)$$

то есть в случае пренебрежения дисперсией поглощения временная зависимость интенсивности сигнала (10) отличается от случая полного отсутствия поглощения (11) только экспоненциальным ослаблением сигнала вдоль трассы.

Ниже в данной работе мы всюду будем предполагать, что условие (9) выполнено, то есть ограничимся случаем, когда если не поглощением вообще, то, по крайней мере, дисперсией коэффициента поглощения можно пренебречь.

В самом общем случае функция (5) (или (7)) немонотонна по Ω и одному и тому же значению аргумента t (или t_s) соответствует несколько значений параметра Ω . В терминах метода стационарной фазы это означает наличие нескольких стационарных точек, поэтому в этом случае в формуле (3) следует осуществлять суммирование по нескольким ветвям функции $\Omega(t_s)$.

В случае $\frac{\partial t_s(\Omega)}{\partial \Omega} = 0$ (то есть при $k_r''(\omega_1 + \Omega) = 0$) мы имеем слияние двух ветвей функции $\Omega(t_s)$ или, что то же самое, двух точек стационарности с образованием временной каустики [2,6]. В данной работе мы предполагаем, что в пределах спектра сигнала функция $k_r''(\omega_1 + \Omega)$ не обращается в ноль, ее знак не изменяется и «самоинтерференции» сигнала по нескольким точкам стационарности не происходит.

Физический смысл соотношений (3), (5) совершенно очевиден и заключается в следующем. В любой точке трассы z и в любой момент времени t поле волны определяется исходным полем волны в стартовой точке $z = 0$, дошедшей к моменту времени t до точки z . Но волна в стартовой точке не вполне монохроматична и состоит из волн с разными частотами $(\omega_1 + \Omega)$, групповая скорость которых различна. Поэтому поле в заданной точке (z, t) определяется спектральной компонентой $A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)$ именно на той частоте $(\omega_1 + \Omega)$, на которой групповая скорость обеспечивает прибытие волны в заданную точку z в заданное время t в соответствии с соотношением $t(\Omega) = k_r'(\omega_1 + \Omega)z$, причем с соответствующим этой частоте затуханием и фазой. Именно с этим обстоятельством связано появление в (3) фактора $\exp[i(k_r(\omega_1 + \Omega)z - \Omega t)]A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)\exp(-k_i(\omega_1 + \Omega)z)$. Фактор же $\sqrt{2\pi/|k_r''((\omega_1 + \Omega)z)|}$ легко «восстанавливается» из условия $|A(z, t)|^2 dt = 2\pi|A(z, \Omega)|^2 d\Omega$, обеспечивающего учет «сгущения» или «разрежения» энергии сигнала за счет нелинейности функции $t(\Omega)$.

С этой «спектральной» точки зрения (кстати, уже применявшейся в [7]) приближенность метода стационарной фазы связана только с пренебрежением исходной длительностью сигнала в стартовой точке трассы – в рамках этого приближения как бы считается, что все спектральные составляющие сигнала одновременно (в момент времени $t = 0$) «высыпаются» в стартовую точку $z = 0$. Ясно, что такое предположение выполняется тем лучше, чем больше

длительность сигнала в точке наблюдения z в сравнении с его длительностью в точке старта $z = 0$. Именно поэтому метод стационарной фазы применим именно в асимптотической зоне, где длительность сигнала существенно превышает его длительность в точке старта.

Теперь мы можем сформулировать некоторые результаты для поля сигнала в асимптотической зоне, следующие непосредственно из соотношений (10).

1. При пренебрежении дисперсией поглощения сигнал в асимптотической зоне распространяется автомодельно по интенсивности, то есть в разных точках трассы временная зависимость интенсивности сигнала – одна и та же функция времени, линейно «растягивающаяся» с ростом протяженности трассы z . Это связано с линейностью функции $t_s(\Omega, z)$ в (7) по z . По существу это означает, что искажение сигнала в асимптотической зоне отсутствует – исходная форма сигнала, стабильная в ближней зоне, испытывает перестройку в промежуточной зоне и после этого вновь сформированная новая форма сигнала остается стабильной в асимптотической зоне. При этом каждому фрагменту (например, максимуму) сигнала в асимптотической зоне соответствует своя определенная частота и соответствующая групповая скорость, с которой он и распространяется. Собственно, «растяжение» сигнала в асимптотической зоне по мере роста длины трассы как раз и связано именно с некоторым отличием частот (а следовательно, групповых скоростей и времен запаздывания) различных фрагментов сигнала.

2. Хотя, в общем случае, за счет нелинейности функции $t_s(\Omega)$ по Ω (7) эта временная зависимость интенсивности сигнала и не совпадает с интенсивностью спектра сигнала в некотором масштабе (этот последний факт, отмеченный в [2], имеет место только во втором порядке теории дисперсии, см. ниже), тем не менее, ее можно рассматривать как «деформированную» в результате неравномерного растяжения по оси абсцисс интенсивность спектра. Это приводит к «похожести» этих функций – так, например, обычно они имеют одинаковое количество максимумов, минимумов и нулей.

3. Если спектр сигнала узок, то разброс групповых скоростей в пределах этого спектра незначителен, поэтому в асимптотической зоне сигнал распространяется как целое без искажений (если не считать искажением медленное линейное растяжение сигнала) с групповой скоростью, соответствующей несущей частоте сигнала. Это означает, что групповая скорость сигнала является скоростью его распространения без деформации не только в ближней зоне (в области применимости первого порядка теории дисперсии [1]), но и в асимптотической зоне. В промежуточной зоне форма сигнала изменяется и потому говорить о скорости его распространения, вероятно, бессмысленно; тем не менее, время задержки сигнала при прохождении от ближней зоны (где его форма стабильна) через промежуточную зону (где его форма изменяется) до асимптотической зоны (где его форма уже другая, но также стабильна) определяется именно его групповой скоростью. Это показывает, что область применимости понятия «групповая скорость» [8] существенно шире, чем обычно считается и отнюдь не ограничивается областью применимости первого порядка классической теории дисперсии [1].

Можно констатировать, что любой узкополосный сигнал в любой (в том числе и поглощающей) среде всегда распространяется именно с групповой скоростью на частоте своей несущей, причем само по себе поглощение на этот факт никак не влияет до тех самых пор, пока дисперсия коэффициента поглощения не приводит к существенному искажению его амплитудно-частотного спектра (например, к сдвигу несущей).

4. Временная зависимость интенсивности сигнала в асимптотической зоне (в отличие от его интенсивности в точке старта) не зависит от фазы спектра сигнала в точке старта (см. (10)). Это означает, что сигналы с различной временной зависимостью интенсивности в стартовой точке могут иметь идентичную временную зависимость в асимптотической зоне.

2. Аномально широкая область применимости второго порядка классической теории дисперсии

Разложив в (2) волновое число $k_r(\omega_1 + \Omega)$ в ряд Тейлора по сдвигу частоты волны Ω относительно частоты несущей ω_1 , имеем:

$$\exp(ik_r(\omega_1 + \Omega)z) = \exp\left(iz \sum_{n=0}^{\infty} k_r^{(n)}(\omega_1)\Omega^n/n!\right). \quad (12)$$

Предполагая, что спектр сигнала сосредоточен вблизи частоты несущей ω_1 и протяженность трассы (z) не слишком велика, в этом разложении можно ограничиться учетом конечного числа членов ряда, причем достаточность учета тех или иных членов определяется полушириной спектра сигнала Ω_{sig} и протяженностью трассы z . Это ограничение приводит нас к различным порядкам классической теории дисперсии [1].

С этой точки зрения изложенные в предыдущем пункте результаты, не опирающиеся на замену ряда в (12) конечной суммой, можно считать результатами, полученными в бесконечном порядке классической теории дисперсии; они справедливы в любой точке асимптотической зоны.

Введя параметры z_n с помощью соотношений

$$z_n = n!/(k_r^{(n)}(\omega_1)\Omega_{sig}^n), \quad (13)$$

можно констатировать, что учет n -го члена в разложении для волнового числа в (12) не требуется при $z \ll z_n$ и необходим при $z \cong z_n$ или $z \gg z_n$.

В частности, при выполнении условия $z \ll z_2 = 2/(k_r''(\omega_1)\Omega_{sig}^2)$ (эту область мы именуем ближней зоной) можно ограничиться линейным разложением функции $k_r(\omega_1 + \Omega)$, что приводит нас к приближению групповой скорости [1], в котором сигнал распространяется с групповой скоростью без изменения временной зависимости (и, в частности, без изменения своей продолжительности). При выполнении условия:

$$z \ll z_3 = 6/(k_r'''(\omega_1)\Omega_{sig}^3) \quad (14)$$

мы можем ограничиться квадратичным разложением функции $k(\omega_1 + \Omega)$, что приводит нас к приближению диффузии амплитуды [1], в котором временная

зависимость сигнала существенно (при $z \gg z_2$) искажается по сравнению с первоначальной.

Следует подчеркнуть, что асимптотическая зона (в отличие от области применимости второго порядка классической теории дисперсии) не ограничена со стороны больших z .

В общем случае уравнение (7) не удается разрешить относительно переменной Ω , поэтому для явной (не параметрической) записи решения (3) обычно вводят дополнительное приближение, ограничиваясь разложением функции $k'_r(\omega_1 + \Omega)$ в ряд Тейлора с точностью до линейных членов по переменной Ω (второй порядок классической теории дисперсии [1]), $k'_r(\omega_1 + \Omega) = k'_r(\omega_1) + k''_r(\omega_1)\Omega$, что дает нам в качестве решения (6) или (7) относительно Ω :

$$\Omega = (t - k'_r(\omega_1)z) / (k''_r(\omega_1)z) = t_s(z) / (k''_r(\omega_1)z). \quad (15)$$

Для огибающей сигнала и временной зависимости его интенсивности во втором порядке классической теории дисперсии в асимптотической зоне вместо (10) с учетом (15) имеем:

$$A(z, t) = \exp \left[i \left(k_r(\omega_1)z - \frac{t_s^2(z)}{2k''_r(\omega_1)z} + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn}(k''_r(\omega_1)z) \right) \right] \times \quad (16)$$

$$\times \exp(-k_i(\omega_1)z) \sqrt{\frac{2\pi}{|k''_r(\omega_1)z|}} A_{\Omega}^{(0)} \left(\frac{t_s(z)}{k''_r(\omega_1)z} \right),$$

а для временной зависимости интенсивности сигнала во втором порядке классической теории дисперсии:

$$I(z, t) = \frac{2\pi \exp(-2k_i(\omega_1)z)}{|k''_r(\omega_1)z|} I_{\Omega}^{(0)} \left(\frac{t_s(z)}{k''_r(\omega_1)z} \right). \quad (17)$$

Именно на формуле (17) основан часто упоминаемый [2] факт совпадения (в некотором масштабе) временной зависимости сигнала в асимптотической зоне с его фурье-спектром.

На первый взгляд кажется, что обе формулы (16) и (17) получены во втором порядке классической теории дисперсии и потому обе они применимы только

при выполнении условия (14). Тем не менее, для формулы (17) это не так. Дело в том, что наличие общего решения (3) и (5) позволяет уточнять (16), (17) методом последовательных приближений и оценить относительную ошибку различных сомножителей этих формул. Оказывается, что относительная ошибка первого сомножителя в (16) (отсутствующего в (17)) составляет $(i/2)k_r'''(\omega_1)\Omega^3 z$ и требование малости этой ошибки приводит к ожидаемому условию (14) для формулы (16), но не для формулы (17) (в которой этот сомножитель отсутствует). В результате формула (16) действительно оказывается применима только при достаточно малых протяженностях трассы. Относительная же ошибка фигурирующего и в (16), и в (17) сомножителя $A_{\Omega}^{(0)}\left(\frac{t_s(z)}{k_r''(\omega_1)z}\right)$ равна $-(1/2)(k_r'''(\omega_1)/k_r''(\omega_1))\Omega$ и, как это ни странно, вовсе не зависит от протяженности трассы ни в хорошем смысле (малость ошибки при малых z), ни в плохом смысле (большая ошибка при больших z). В результате, условие малости относительной ошибки этой функции имеет вид³

$$k_{aberr} = \left| -(1/2)(k_r'''(\omega_1)/k_r''(\omega_1))\Omega_{sig} \right| \ll 1 \quad (18)$$

и выполняется (или не выполняется) одновременно во всех точках асимптотической зоны как при $z \ll z_3$, так и при $z \gg z_3$. Введенный в (18) «коэффициент аберрации» показывает относительную величину поправок третьего порядка теории дисперсии к результатам второго порядка для временной зависимости интенсивности сигнала (17). Если $k_{aberr} \ll 1$, эти поправки малы и формулой (17) можно пользоваться в любой точке асимптотической зоны, в том числе и за пределами области применимости второго порядка классической теории дисперсии (14). Если же $k_{aberr} \approx 1$ или $k_{aberr} \gg 1$, то ни в какой точке асимптотической зоны порядковое разложение

³ В случае «случайного» обращения в 0 третьей производной волнового числа на частоте несущей нетрудно записать аналогичные формулы, в которых будет фигурировать первая неисчезающая производная волнового числа; окончательные выводы при этом не меняются.

теории дисперсии вообще (и второй порядок этого разложения в частности) использовать нельзя.

Если обозначить Ω_{med} характерный интервал существенного изменения функции $k(\omega_1 + \Omega)$ (формально, расстояние от ω_1 до ближайшей особенности этой функции на комплексной плоскости, то есть радиус круга сходимости степенного ряда в (12) [5]), то для качественных оценок $k_{aberr} \approx \Omega_{sig} / \Omega_{med}$ и условие (18) можно переписать как $\Omega_{sig} \ll \Omega_{med}$, то есть как условие узкополосности сигнала не только «самого по себе» (ширина спектра сигнала мала в сравнении с частотой несущей, $\Omega_{sig} \ll \omega_1$), но и «для данной среды» (ширина спектра сигнала мала в сравнении с шириной интервала дисперсии среды, $\Omega_{sig} \ll \Omega_{med}$). Обычно для узкополосных сигналов условие $\Omega_{sig} \ll \Omega_{med}$ выполняется всегда, за исключением «особо тяжелых случаев», когда $\Omega_{sig} \approx \Omega_{med}$ или $\Omega_{sig} \geq \Omega_{med}$; в этих «тяжелых» случаях (см., напр., [7]) не только второй порядок классической теории дисперсии, но и ряд (12) вообще использовать нельзя (как степенной ряд за пределами собственного круга сходимости, см. [5, с. 52]).

Таким образом, в любой среде узкополосные «сами по себе» сигналы распадаются на два класса: «узкополосные для данной среды» сигналы ($\Omega_{sig} \ll \Omega_{med}$) и «широкополосные для данной среды» сигналы ($\Omega_{sig} \cong \Omega_{med}$ или $\Omega_{sig} > \Omega_{med}$). Для «узкополосных для данной среды» сигналов полученная во втором порядке классической теории дисперсии формула (17) для временной зависимости интенсивности сигнала (в отличие от формулы (16)) справедлива во всей асимптотической зоне, а не только в области применимости второго порядка классической теории дисперсии.

Можно отметить одну любопытную особенность произвольных амплитудно-модулированных (без фазовой модуляции) узкополосных в обоих смыслах сигналов. Поскольку временная зависимость таких сигналов в асимптотической зоне совпадает (в некотором масштабе) с интенсивностью их

спектра в стартовой точке и поскольку интенсивность спектра любого сигнала без фазовой модуляции является четной функцией, нетрудно заключить, что асимптотической зоне временная зависимость произвольного узкополосного (в обоих смыслах) сигнала без исходной фазовой модуляции – четная относительно группового времени задержки функция.

В связи с оказавшейся весьма широкой областью применимости формулы (17) для интенсивности сигнала в асимптотической зоне приведем базирующиеся на (17) простые полуколичественные формулы для амплитуды и длительности сигнала при различной протяженности трассы. Эти формулы являются асимптотически точными при $z \ll z_2$ и при $z \gg z_2$. В промежуточной области, $z \sim z_2$, это просто, своего рода, интерполяция – впрочем, достаточно удачная для сигнала с исходной базой порядка 1, то есть не являющегося исходно шумоподобным [4]. Для их получения можно «сшить» в промежуточной зоне результаты для ближней зоны (в которой амплитуда и длительность сигнала практически не меняется) и результаты для асимптотической зоны (в которой справедлива формула (17)). В результате, нетрудно получить для максимальной (по времени) интенсивности сигнала при различной протяженности трассы:

$$I_{\max}(z) = \begin{cases} I_{\max}^{(0)} \exp(-2k_i(\omega_1)z), & z \leq z_{foc} \\ I_{\max}^{(0)} \exp(-2k_i(\omega_1)z)(z_{foc}/z), & z \geq z_{foc} \end{cases}, \quad (19)$$

а для полудлительности сигнала при различной протяженности трассы:

$$T(z) = \begin{cases} T^{(0)}, & z \leq z_{foc} \\ T^{(0)}(z/z_{foc}), & z \geq z_{foc} \end{cases}. \quad (20)$$

В формулах (19) и (20) $I_{\max}^{(0)}$ и $T^{(0)}$ – максимальная интенсивность и половинная длительность сигнала в стартовой точке:

$$z_{foc} = (T^{(0)})^2 / (k_r''(\omega_1)\beta) \quad (21)$$

координата точки сшивания (являющаяся аналогом половины продольной протяженности фокальной области цилиндрической линзы), $\beta = T^{(0)}\Omega^{(0)}$ – стартовая база [4] сигнала, зависящая только от исходной формы сигнала и не

зависящая от его исходной полудлительности $T^{(0)}$, и исходной полуширины его спектра $\Omega^{(0)}$. Для исходно нешумоподобных сигналов (рассмотрением которых мы ограничиваемся в данной работе) величина исходной базы порядка единицы, например, для «прямоугольного» сигнала:

$$A^{(0)}(t) = \begin{cases} 1, & |t| \leq T_{rect} \\ 0, & |t| > T_{rect} \end{cases}, \quad A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = (T_{rect}/\pi) \left(\sin(\Omega T_{rect}) / (\Omega T_{rect}) \right), \quad (22)$$

равно как и для «фурье-сопряженного» к нему сигнала:

$$A^{(0)}(t) = \sin(t/T_{sinc}) / (t/T_{sinc}), \quad A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = \begin{cases} T_{sinc}/2, & |\Omega T_{sinc}| \leq 1 \\ 0, & |\Omega T_{sinc}| > 1 \end{cases}, \quad (23)$$

$\beta = \pi/2$ и не зависит, разумеется, от параметров T_{rect} и T_{sinc} .

Вполне естественно, что величина параметра z_{foc} по порядку величины совпадает с протяженностью ближней зоны z_2 . Для определенности, следует отметить, что в формулах (20)–(23) в качестве полудлительности сигнала ($T(z)$, $T^{(0)}$) и полуширины его спектра ($\Omega^{(0)}$) использовались «энергетические» полуширины соответствующих горбообразных кривых, возникающие при их замене на «эффективные прямоугольники» с той же энергией и тем же максимальным значением, например, $T^{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} I^{(0)}(t) dt / (2I^{(0)}(0))$. Можно показать, что только такой выбор определения полуширин позволяет одновременно «сшить» как максимальное значение сигнала (19), так и его полуширину (20) в одной и той же точке z_{foc} (21).

Для исходно прямоугольного сигнала (22) «энергетическая» полуширина временной зависимости $A^{(0)}(t)$ $T^{(0)} = T_{rect}$, а «энергетическая» полуширина спектра $A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)$ $\Omega^{(0)} = \pi / (2T_{rect})$, а для исходного sinc-сигнала (23) «энергетическая» полуширина временной зависимости ($A^{(0)}(t)$) $T^{(0)} = (\pi/2)T_{sinc}$, а «энергетическая» полуширина спектра ($A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)$) $\Omega^{(0)} = 1/T_{sinc}$.

3. Распространение узкополосного сигнала в бесстолкновительной плазме

В качестве иллюстрации, рассмотрим распространение сигналов типа (22) и (23) в бесстолкновительной плазме. Этот выбор обусловлен тем, что бесстолкновительная плазма – простейшая из представляющих практический интерес диспергирующих сред, а сигнал типа (22) – вероятно, простейший из представляющих практический интерес сигналов. Сигнал типа (23) является «сопряженным» к сигналу (22). Кроме того, он является примером сигнала с ограниченным спектром и, кроме того, именно по сигналам типа (23), в соответствии с теоремой отсчетов, разлагается в ряд Котельникова произвольный сигнал с ограниченным спектром.

В этом случае показатель преломления: $n(\omega) = \sqrt{1 - \omega_p^2 / \omega^2}$, где ω_p – плазменная частота. Для характерных параметров задачи в этом случае имеем:

$$\tilde{z}_1 = \frac{\sqrt{\tilde{\omega}_1^2 - 1}}{\tilde{\omega}_1 \tilde{\Omega}^{(0)}}, \quad \tilde{z}_2 = -\frac{2(\tilde{\omega}_1^2 - 1)^{3/2}}{(\tilde{\Omega}^{(0)})^2}, \quad \tilde{z}_3 = \frac{2(\tilde{\omega}_1^2 - 1)^{5/2}}{\tilde{\omega}_1 (\tilde{\Omega}^{(0)})^3},$$

$$k_{aberr} = \frac{3\tilde{\omega}_1 \tilde{\Omega}^{(0)}}{2(\tilde{\omega}_1^2 - 1)}, \quad \tilde{z}_{foc} = (\tilde{\omega}_1^2 - 1)^{3/2} (\tilde{T}^{(0)})^2 / \beta,$$

$$v_{gr} = c(\tilde{\omega}_1^2 - 1)^{1/2} / \tilde{\omega}_1. \quad (24)$$

В (24) и ниже иногда используются безразмерные частоты ($\tilde{\omega} = \omega / \omega_p$), времена ($\tilde{T} = T \omega_p$) и длины ($\tilde{z} = z k_p = z \omega_p / c$).

На рис. 1 приведена временная зависимость интенсивности исходно П-образного сигнала (22) с исходной полушириной $\tilde{T}_{rect} = \tilde{T}_0 = 500$ и несущей частотой $\tilde{\omega}_1 = 1,02$ при различных значениях протяженности трассы ($\tilde{z} = 0, 10, 100, 1000, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ на рис. 1 а, b, c, d, e, f, g, h соответственно) при распространении в бесстолкновительной плазме. В этом случае $\tilde{\Omega}^{(0)} = 3,142 \times 10^{-3}$, $\tilde{z}_1 = 62,7$, $\tilde{z}_2 = -1646$, $\tilde{z}_3 = 2,075 \times 10^4$, $\tilde{z}_{foc} = 1292$, $k_{aberr} = 0,119$, $v_{gr} = 0,197c$. Выбор частоты несущей вблизи критической частоты связан с попыткой обеспечить не слишком малое значение коэффициента аберрации

($k_{aberr} = 0,119$) – при более привычной частоте несущей (например, в полтора раза выше критической, см. ниже) коэффициент абберрации оказывается крайне мал (см. ниже). Первые три графика (a, b, c) относятся к ближней зоне ($\tilde{z} \ll \tilde{z}_{foc}$), четвертый график (d) – к промежуточной зоне ($\tilde{z} \sim \tilde{z}_{foc}$), последние четыре (e, f, g, h) – к асимптотической зоне ($\tilde{z} \gg \tilde{z}_{foc}$). По вертикальной оси отложена временная зависимость интенсивности сигнала $\tilde{I} = I(t) / I_{max}(z)$, нормированная на его максимальную интенсивность в полуколичественном приближении (19), по горизонтальной – «сдвинутое» на время групповой задержки [1,2] безразмерное время $\tilde{t} = (t - k'_r(\omega_1)z)\omega_p$. Выбор масштаба по горизонтальной оси осуществлялся в соответствии с результатами полуколичественного приближения (20). Таким образом, на графиках для ближней и промежуточной зоны изображены «реальные» (обезразмеренные, но не нормированные) величины, а на графиках для асимптотической зоны закономерное «растягивание» и ослабление сигнала компенсируется соответствующей нормировкой по вертикальной оси и выбором масштаба по горизонтальной. На всех графиках рис. 1 толстой сплошной линией показаны результаты численного счета по формуле (2). Тонкой сплошной линией обозначены либо результаты первого порядка классической теории дисперсии, то есть исходная временная зависимость сигнала с соответствующим групповым временем задержки (при $\tilde{z} < \tilde{z}_{foc}$, рис. 1 a, b, c, d), либо асимптотическая (в приближении метода стационарной фазы (7), (11)) временная зависимость сигнала (при $\tilde{z} > \tilde{z}_{foc}$, рис. 1 e, f, g, h). Штриховой линией (при $\tilde{z} > \tilde{z}_{foc}$, рис. 1 e, f, g, h) изображена временная зависимость сигнала в приближении метода стационарной фазы с дополнительным использованием второго порядка классической теории дисперсии (17).

Из рис. 1 видно, что исходная форма сигнала, относительно стабильная в ближней зоне $\tilde{z} \ll \tilde{z}_{foc}$, претерпевает радикальную перестройку в промежуточной зоне $\tilde{z} \sim \tilde{z}_{foc}$, но после этой перестройки (в асимптотической

зоне $\tilde{z} \gg \tilde{z}_{foc}$) вновь становится стабильной – графики e, f, g, h практически неотличимы друг от друга. Кроме того, на графиках e, f, g, h (асимптотическая зона) тонкая сплошная линия скрывается под толстой, что свидетельствует о совпадении (с графической точностью) результатов численного счета с результатами метода стационарной фазы (7), (11) без дополнительных упрощений. Что же касается результатов метода стационарной фазы с дополнительным использованием второго порядка теории дисперсии (17), то они демонстрируют «соразмерное» коэффициенту абберации $k_{aberr} = 0,119$ отклонение от данных численного счета – по данным численного счета «функция sinc» слегка «завалена влево», осцилляции слева сжаты и увеличены, осцилляции справа растянуты и ослаблены.

Как уже отмечалось выше, в пределах асимптотической зоны это отклонение не нарастает и не уменьшается с ростом протяженности трассы, несмотря на то, что в данном случае $\tilde{z}_2 = -1646$, $\tilde{z}_3 = 2.075 \times 10^4$ и если график «e» относится к случаю $\tilde{z}_2 \ll \tilde{z} \ll \tilde{z}_3$ (область применимости второго порядка теории дисперсии, в которой она как бы должна давать количественные результаты), то графики f, g, h относятся к случаю $\tilde{z} \gg \tilde{z}_3$ (область неприменимости второго порядка теории дисперсии, в которой она как бы должна быть «совсем плохой», чего явно не наблюдается).

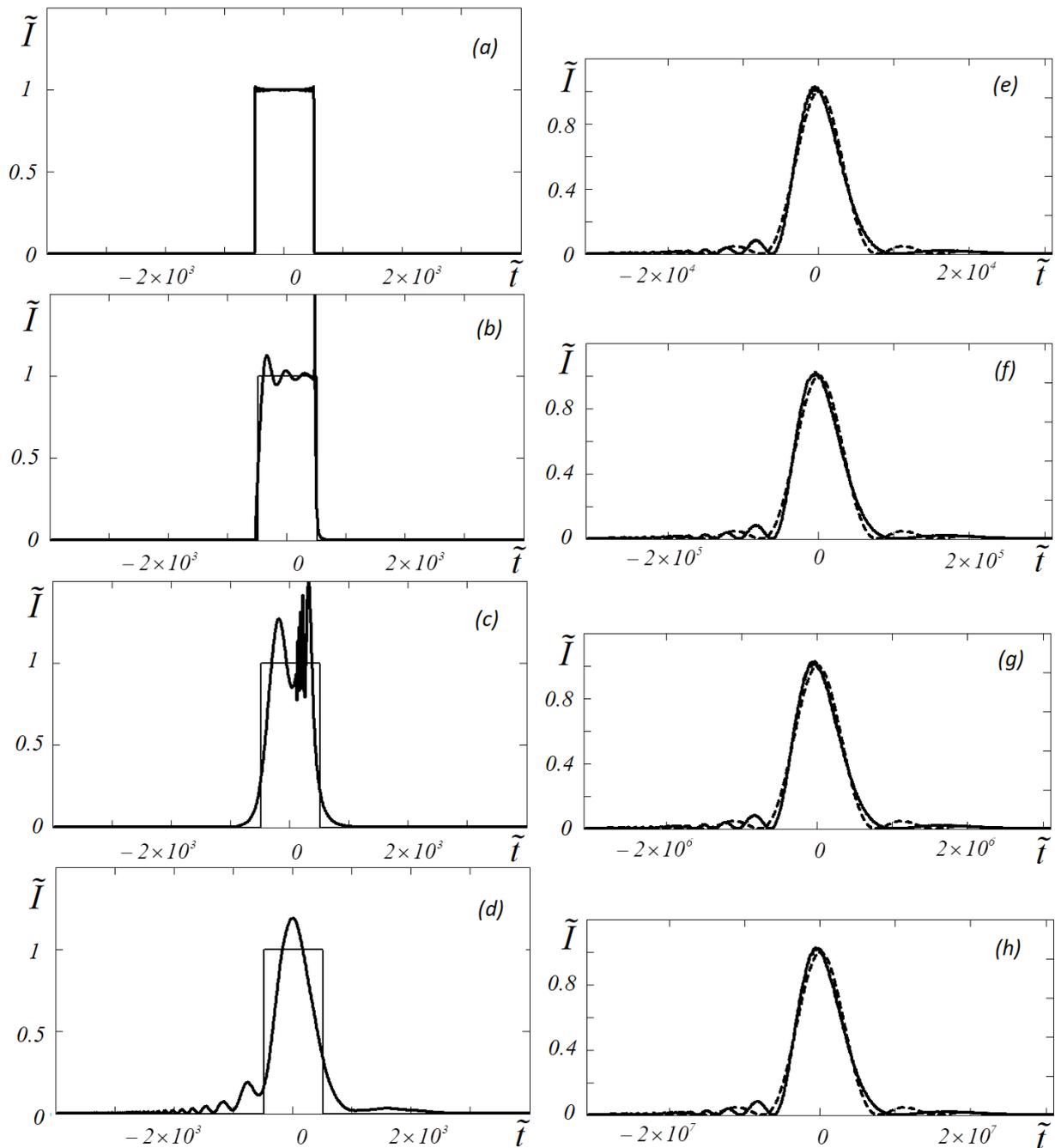


Рис. 1. Временная зависимость интенсивности исходно П-образного сигнала (22) с исходной полушириной $\tilde{T}_{rect} = \tilde{T}_0 = 500$ и несущей частотой $\tilde{\omega}_1 = 1,02$ при различных значениях протяженности трассы. Сигнал является узкополосным, но не является узкополосным для данной среды

Нетрудно также заметить, что все приведенные графики уверенно «стоят на месте» (вблизи нулевого времени с учетом группового запаздывания), что свидетельствует о распространении сигнала с групповой скоростью как «внутри» ближней зоны или «внутри» асимптотической зоны, так и между ближней и асимптотической зонами.

Результаты аналогичных расчетов для распространения в той же среде ($\tilde{\omega}_1 = 1,02$) фурье-сопряженного к (22) по исходной форме сигнала (23) приведены на рис. 2. В этом случае в качестве исходной продолжительности сигнала использовалось значение $\tilde{T}_{sinc} = 318,31$, что дает ту же самую (что и на рис. 1) «энергетическую» стартовую продолжительность сигнала $\tilde{T}_0 = 500$. Поэтому значения параметров $\tilde{\Omega}^{(0)}$, \tilde{z}_1 , \tilde{z}_2 , \tilde{z}_3 , \tilde{z}_{foc} , k_{aberr} и v_{gr} оказываются теми же самыми, что и на рис. 1. На этом рисунке приведена временная зависимость интенсивности сигнала при различных значениях протяженности трассы ($\tilde{z} = 0, 10, 100, 1000, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$ на рис. 2 а, б, в, г, д, е, ф, г, з, и соответственно). Как и на рис. 1, толстой сплошной линией показаны результаты численного счета. Тонкой сплошной линией (скрытой под толстой сплошной на рис. 2 а, б, в, г, з, и) обозначены либо результаты первого порядка классической теории дисперсии (при $\tilde{z} < \tilde{z}_{foc}$, рис. 2 а, б, в, г, д), либо асимптотическая (в приближении метода стационарной фазы (7), (11)) временная зависимость сигнала (при $\tilde{z} > \tilde{z}_{foc}$, рис. 2 е, ф, г, з, и). Штриховой линией (на рис. 2 е, ф, г, з, и) изображена асимптотическая временная зависимость сигнала в приближении метода стационарной фазы с дополнительным использованием второго порядка классической теории дисперсии (17). Прочие обозначения совпадают с обозначениями рис. 1.

Выводы, сделанные при обсуждении рис. 1, сохраняются. Сравнивая рис. 1 и 2 между собой, можно дополнительно отметить, что гладкая форма сигнала проявляет повышенную «устойчивость» по сравнению с разрывной – «развал» sinc-образного сигнала, равно как и образование из него П-образного, на рис. 2 происходит несколько позже «развала» П-образного и образования из него sinc-образного на рис. 1. Именно поэтому на рис. 2 пришлось довести длину трассы до $\tilde{z} = 10^8$ (рис. 2 и) – только при такой протяженности трассы можно с уверенностью констатировать графическое совпадение результатов численного счета с результатами метода стационарной фазы.

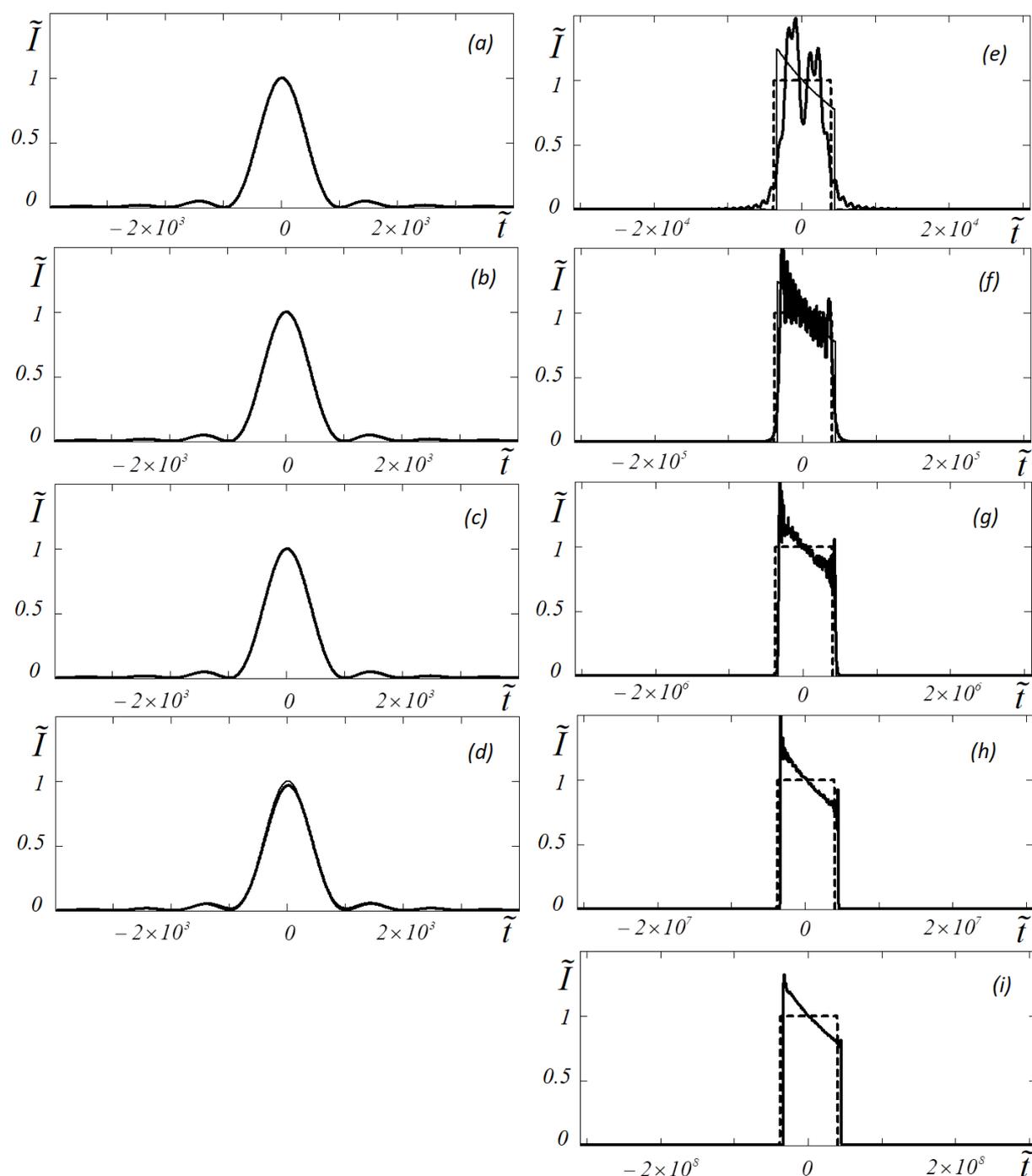


Рис. 2. Временная зависимость интенсивности исходно sinc-образного сигнала в различных точках трассы при распространении в бесстолкновительной плазме. Сигнал является узкополосным, но не является узкополосным для данной среды

Несколько иначе выглядят и отличия результатов метода стационарной фазы с применением и без применения второго порядка теории дисперсии – в случае sinc-сигнала, имеющего резко ограниченный спектр, происходит небольшой, но заметный сдвиг начального и конечного скачков сигнала, связанный с отличием между истинной и «предлагаемой» вторым порядком

теории дисперсии групповой скоростью на минимальной и максимальной частотах сигнала.

На рис. 3 приведена временная зависимость интенсивности исходно П-образного сигнала (22) в различных точках трассы при распространении в бесстолкновительной плазме. Исходная полуширина сигнала $\tilde{T}_{rect} = \tilde{T}_0 = 500$, несущая частота $\tilde{\omega}_1 = 1,5$ ($\omega_1 = 1,5\omega_p$), протяженность трассы $\tilde{z} = 0, 10, 100, 1000, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7$ на рис. 3 a, b, c, d, e, f, g, h соответственно. Значения параметров $\tilde{\Omega}^{(0)} = 3,142 \times 10^{-3}$, $\tilde{z}_1 = 237,3$, $\tilde{z}_2 = -2,832 \times 10^5$, $\tilde{z}_3 = 2,7512 \times 10^7$, $\tilde{z}_{foc} = 2,224 \times 10^5$, $k_{abberr} = 5,655 \times 10^{-3}$, $v_{gr} = 0,745c$. Первые шесть графиков (a, b, c, d, e, f) относятся к случаю $\tilde{z} < \tilde{z}_{foc}$, последние два (g, h) – к случаю ($\tilde{z} > \tilde{z}_{foc}$). На этом рисунке (в отличие от рис. 1) тонкой линией в асимптотической (рис. 3 g, h) зоне обозначены результаты метода стационарной фазы с дополнительным применением второго порядка классической теории дисперсии (то есть формула (17)); отсутствие тонкой линии на рис. 3 g, h, как обычно, связано с ее «затиранием» жирной линией, соответствующей результатам численного счета. Остальные обозначения на рис. 1 и рис. 3 совпадают.

В данном случае (который, как отмечалось выше, является «обыденным») сигнал является узкополосным не только «сам по себе», но и «для данной среды», поэтому коэффициент абберации весьма мал ($k_{abberr} = 5,655 \times 10^{-3}$) и применение второго порядка теории дисперсии в методе стационарной фазы не вносит никаких дополнительных погрешностей; соответствующие кривые на графиках просто совпадают (что было отдельно проверено численным счетом вплоть до $\tilde{z} = 10^{11} \gg \tilde{z}_3 = 7,512 \times 10^7$).

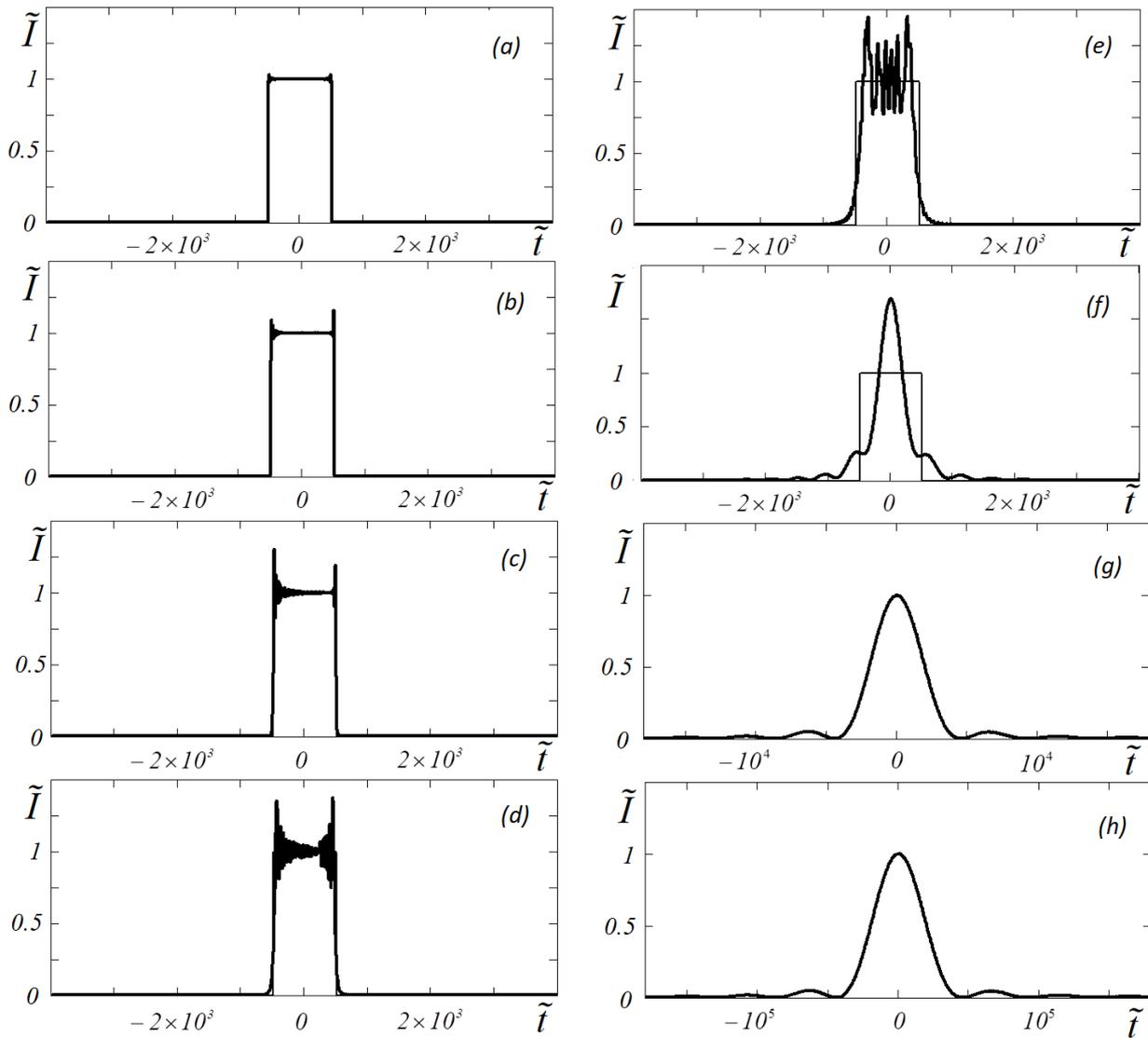


Рис. 3. Временная зависимость интенсивности исходно П-образного сигнала (22) с исходной полушириной $\tilde{T}_{rect} = \tilde{T}_0 = 500$ и несущей частотой $\tilde{\omega}_1 = 1.5$ ($\omega_1 = 1.5\omega_p$) при различных значениях протяженности трассы. Сигнал является узкополосным для данной среды

На рис. 3, как и на рис. 1, видно, что исходная форма сигнала, относительно стабильная в ближней зоне, претерпевает радикальную перестройку в промежуточной зоне, но после этой перестройки (в асимптотической зоне) вновь становится стабильной – графики g, h практически неотличимы друг от друга. Кроме того, на графиках g, h (асимптотическая зона) тонкая сплошная линия скрывается под толстой, что свидетельствует о совпадении (с графической точностью) численного счета с результатами метода стационарной фазы с

дополнительным применением второго порядка классической теории дисперсии (17).

Существенным отличием случая сигнала, узкополосного не только «самого по себе», но и «для данной среды» (рис. 3) от случая сигнала, узкополосного «самого по себе», но не «для данной среды» (рис. 1) является то, что в асимптотической зоне временная зависимость интенсивности сигнала в точности совпадает (в некотором масштабе) с интенсивностью спектра сигнала в стартовой точке. Этот факт [2] является следствием одновременной применимости метода стационарной фазы и второго порядка классической теории дисперсии для интенсивности сигнала во всей его асимптотической зоне (то есть при $\tilde{z} \gg \tilde{z}_2$ без ограничения со стороны больших длин трассы).

Результаты аналогичных расчетов для распространения в той же среде ($\tilde{\omega}_1 = 1,5$) фурье-сопряженного к сигналу рис. 3 по исходной форме сигнала (21) приведены на рис. 4. Обозначения на этом рисунке полностью совпадают с обозначениями рис. 3. Несущая частота $\tilde{\omega}_1 = 1,5$ ($\omega_1 = 1,5\omega_p$), в качестве исходной продолжительности сигнала использовалось значение $\tilde{T}_{sinc} = 318,31$, что дает ту же самую (что и на рис. 3) «энергетическую» стартовую продолжительность сигнала $\tilde{T}_0 = 500$. Поэтому, также как и в случае «сопряженных» рис. 1 и 2, значения параметров $\tilde{\Omega}^{(0)}$, \tilde{z}_1 , \tilde{z}_2 , \tilde{z}_3 , \tilde{z}_{foc} , k_{abberr} и v_{gr} на рис 3 и 4 оказываются одинаковыми. Первые три графика (a, b, c) относятся к случаю ($\tilde{z} < \tilde{z}_{foc}$), последние пять (d, e, f, g, h) – к случаю ($\tilde{z} > \tilde{z}_{foc}$).

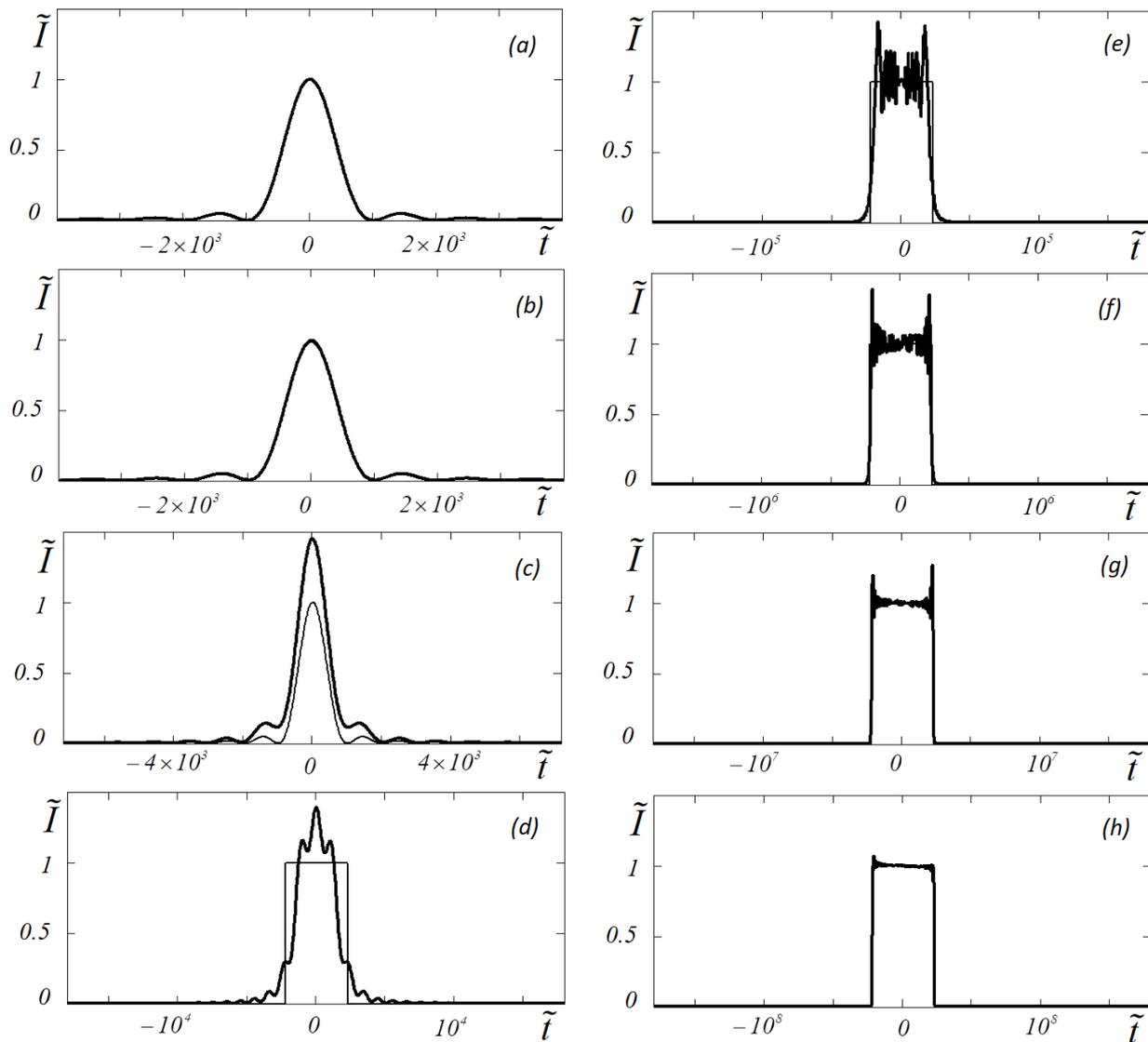


Рис. 4. Временная зависимость интенсивности исходно sinc-образного сигнала в различных точках трассы при распространении в бесстолкновительной плазме. Несущая частота $\tilde{\omega}_1 = 1,5$ ($\omega_1 = 1,5\omega_p$). Сигнал является узкополосным для данной среды

Как обычно, на первых (a, b) и последних (g, h) графиках тонкая линия скрыта под толстой – на первых графиках по причине практического совпадения данных численного счета (толстая сплошная линия) с исходным профилем сигнала (тонкая сплошная линия), а на последних – по поводу практического совпадения данных численного счета (толстая сплошная линия) с результатами метода стационарной фазы во втором порядке классической теории дисперсии (тонкая сплошная линия).

Как и в случае рис. 3, в данном случае сигнал является узкополосным и «сам по себе», и «для данной среды», и все изложенные выше для таких сигналов выводы подтверждаются. Подтверждается и главный из них – при переходе от ближней зоны к асимптотической происходит точная «фурье-трансформация» временной зависимости сигнала, по окончании которой временная зависимость интенсивности сигнала изменяться с ростом протяженности трассы перестает.

Заключение

1. При распространении произвольного узкополосного сигнала в диспергирующей среде без поглощения как в ближней (вблизи точки излучения), так и в асимптотической зоне (сколь угодно далеко от точки излучения) происходит без искажений (то есть без изменения временной зависимости интенсивности сигнала⁴) в точности с групповой скоростью [2,8], соответствующей частоте несущей сигнала. При переходе от ближней зоны к асимптотической (в промежуточной зоне) происходит изменение формы сигнала, но после этой модификации форма сигнала остается стабильной, причем время задержки сигнала между ближней и асимптотической зонами определяется все той же групповой скоростью. Таким образом, именно групповая скорость, какова бы она ни была, является скоростью распространения сигнала не только вблизи точки излучения (где форма сигнала стабильна), но и сколь угодно далеко от этой точки (где форма сигнала также стабильна).

2. Если сигнал является не только «узкополосным сам по себе» (то есть ширина его спектра мала в сравнении с частотой несущей), но и является «узкополосным для данной среды» (ширина его спектра мала в сравнении с шириной области дисперсии среды, что очень часто и имеет место на практике), то при переходе от ближней зоны к асимптотической происходит «фурье-преобразование» его временной зависимости, то есть временная зависимость его

⁴ За исключением растягивания временной зависимости интенсивности сигнала в дальней зоне по линейному закону.

интенсивности в асимптотической зоне в некотором масштабе совпадает с интенсивностью его фурье-спектра в ближней зоне (каковой факт отмечался и ранее [2] без указания на условия его реализации). Существенно, что для сигналов, «узкополосных для данной среды», этот результат (в принципе полученный в рамках второго приближения классической теории дисперсии) оказывается справедлив во всей асимптотической зоне, в том числе и за пределами применимости второго порядка классической теории дисперсии. Если сигнал является узкополосным «сам по себе», но не является «узкополосным для данной среды», то его форма в асимптотической зоне по-прежнему стабильна, но уже нигде не совпадает с интенсивностью его фурье-спектра в точке старта.

3. Выводы 1 и 2 сохраняются и для поглощающей среды в том случае, когда можно пренебречь дисперсией поглощения, то есть тогда, когда в результате селективного по частоте поглощения не происходит радикального изменения амплитудно-частотного спектра сигнала, в результате чего может, например, произойти смена частоты несущей узкополосного сигнала или вообще утрата сигналом статуса узкополосного.

Благодарности: Авторы благодарны Е.А. Палкину и Г.М. Стрелкову за полезные замечания и советы.

Литература

1. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. *Теория волн*. Москва, Наука. 1979. 384 с.
2. Вайнштейн Л.А. Распространение импульсов. *Успехи физ. наук*. 1976. Т.118. №2. С.339-367. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0118.197602h.0339>
3. Федорюк М.В. *Асимптотика: Интегралы и ряды*. Москва, Наука. 1987. 544 с.
4. Варакин Л.Е. *Системы связи с шумоподобными сигналами*. Москва, Радио и Связь. 1985. 384 с.
5. Смирнов В.И. *Курс высшей математики. Том 3, часть 2*. Москва, Наука. 1974. 672с.

6. Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. *Геометрическая оптика неоднородных сред*. Москва, Наука. 1980. 304 с.
7. Бухман Н.С. Искажение короткого квазимонохроматического сигнала в резонансно поглощающей среде. *Радиотехника и электроника*. 2007. Т.52. №5. С.593-604.
8. Ландберг Г.С. *Оптика*. Москва, Наука. 1976. 928 с.

Для цитирования:

Бухман Н.С., Куликова А.В. О временной зависимости узкополосного сигнала в диспергирующей среде вдали от точки излучения. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. № 12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.12.14>