

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.12.6>

УДК: 621.396

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОРРЕКЦИИ БАЗИСА ДЛЯ УСТРАНЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ПРИ СИНТЕЗЕ ИНВЕРСНОГО ФИЛЬТРА

Р.Г. Хафизов, Е.А. Григорьевых, Е.С. Пахмутова, М.С. Соколова, А.М. Масликов

Поволжский государственный технологический университет  
424000, Йошкар-Ола, пл. Ленина, 3

Статья поступила в редакцию 14 декабря 2022 г.

**Аннотация.** Рассмотрен процесс линейной фильтрации как процесс представления сигнала в косоугольной системе координат. Предложен подход к устранению неопределенности типа «деление на ноль» при синтезе инверсного фильтра, основанный на коррекции базиса.

**Ключевые слова:** инверсная фильтрация, косоугольный базис, матрица Грама, сжатие сигнала, боковые лепестки.

**Автор для переписки:** Григорьевых Елена Андреевна,  
[GrigorevyhEA@volgatech.net](mailto:GrigorevyhEA@volgatech.net)

### Введение

Инверсная фильтрация находит свое применение как в системах обработки изображений при решении задачи восстановления изображений [1-3], так и в системах обработки сигналов при решении задачи разрешения сигналов [4-10]. В работе [1] рассмотрено применение инверсной фильтрации для решения задачи восстановления изображений, а также особенности ее применения в условиях неопределенности типа «деления на ноль», вызванной наличием в спектре изображений равных нулю значений. Рассмотрен подход, основанный на ограничении частотной характеристики инверсного фильтра для уменьшения

вероятность возникновения нулевого значения. В работе [1] рассмотрены особенности применения, так называемой, винеровской фильтрации и фильтрации по Тихонову. Для реализации винеровского фильтра, спектр шума должен быть известен или оценен, а для реализации тихоновского фильтра необходимо определить среднее значение и дисперсию шума. В основе фильтрации по Тихонову лежит метод замены исходной задачи на задачу нахождения минимума некоторого сглаживающего функционала. При этом задача устранения неопределенности при инверсной фильтрации может решаться так же во временной области, например, методом деконволюции. В работах [2,3], например, исследован метод регуляризации обратной фильтрации для слепой деконволюции изображений.

Инверсная фильтрация сигналов обеспечивает на выходе отклик в виде дельта-импульса (без боковых лепестков), что позволяет использовать её для решения задачи разрешения сигналов, в том числе и простых. Так в работе [6] предложена методика получения оценок поверхности с помощью сканирующего радиолокатора с улучшенным азимутальным разрешением методом обратной фильтрации. В работе [7] предложены методы обработки сигналов для сжатия импульсов, основанные на деконволюции или обратной фильтрации во временной области. Сжатие импульсов производится с использованием матрично-векторной алгебры для получения обратной фильтрации с высоким разрешением и низкими боковыми лепестками.

В работах [8-11] предложен способ решения проблемы неопределенности при синтезе инверсного фильтра, вызванной наличием нулей в спектре сигнала, применением инверсной фильтрации с ограничением спектра сигнала по уровню. В работе [12] рассмотрен подход к устранению критических компонент спектра сжимаемого сигнала, основанный на процедуре коррекции значений этих компонент. Такая коррекция позволяет снизить уровень аддитивного шума сжатого сигнала до уровня, соизмеримого с уровнем влияния на шум других спектральных компонент сигнала.

Инверсная фильтрация является одним из эффективных методов сжатия сигналов, однако наличие мешающих факторов сильно снижают возможность ее применения. При этом в качестве мешающих факторов выступают флуктуационный шум на входе фильтра и боковые лепестки (БЛ) сжатого сигнала на выходе фильтра. Таким образом, наличие в спектре анализируемого сигнала равных или близких к нулю значений является основной причиной появления БЛ в сжатом сигнале на выходе инверсного фильтра, и проблема подавления БЛ остается актуальной. Целью данной работы является решение задачи устранения неопределенности типа «деление на ноль» при синтезе инверсного фильтра с применением аналитической геометрии.

## 1. Представление сигнала в косоугольной системе координат

Процесс линейной фильтрации сигналов может быть рассмотрен как процесс представления сигнала, заданного в виде вектора  $\mathbf{X}$  в  $s$ -мерном пространстве, в косоугольной системе координат  $\{\mathbf{e}_n\}$ ,  $n=1,2,\dots,s$ . При этом векторы  $\mathbf{e}_n$  могут иметь произвольную длину и направление, а соотношение ортогональности для них, как правило, не выполняется, т.е. косоугольный базис связан не с системой стандартных функций, а с самим сигналом. Задача фильтрации сигнала есть нахождением мер близости сигнала с каждым из векторов  $\mathbf{e}_n$  косоугольного базиса в виде проекции сигнала  $\mathbf{X}$  на векторы  $\mathbf{e}_n$ .

Для определения координат вектора  $\mathbf{X}$  в косоугольном базисе  $\{\mathbf{e}_n\}$ ,  $n=1,2,\dots,s$ , необходимо ввести дополнительный косоугольный базис  $\{\mathbf{q}_n\}$ ,  $n=1,2,\dots,s$ , находящийся в биортогональном соотношении к базису  $\{\mathbf{e}_n\}$ :

$$(\mathbf{e}_n, \mathbf{q}_m) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = m, \\ 0 & \text{при } n \neq m. \end{cases} \quad (1)$$

Координата вектора  $\mathbf{X}$  в базисе векторов  $\mathbf{e}_n$ :

$$a_n = (\mathbf{X}, \mathbf{q}_n), \quad (2)$$

а проекция  $b_n$  вектора  $\mathbf{X}$  на вектор  $\mathbf{e}_n$ :

$$b_n = \frac{(\mathbf{X}, \mathbf{e}_n)}{\|\mathbf{e}_n\|}. \quad (3)$$

В ортонормированном базисе  $\{\mathbf{u}_n\}$ ,  $n=1,2,\dots,s$ , проекция  $b_n$  вектора  $\mathbf{X}$  равна координате  $a_n$  этого вектора  $\mathbf{X}$ . При задании вектора в косоугольном базисе его координаты не равны проекциям на соответствующие базисные векторы. Необходимость вычисления множества координат  $\{a_n\}$ ,  $n=1,2,\dots,s$ , или множества проекций  $\{b_n\}$ ,  $n=1,2,\dots,s$ , вектора сигнала  $\mathbf{X}$  в выбранном базисе зависит от постановки задачи исследования.

На рис. 1 рассмотрен пример представления сигнала, заданного вектором  $\mathbf{X}=\{3;2\}$ , в косоугольном базисе, заданным векторами  $\mathbf{e}_1=\{4;1\}$  и  $\mathbf{e}_2=\{2;3\}$ .

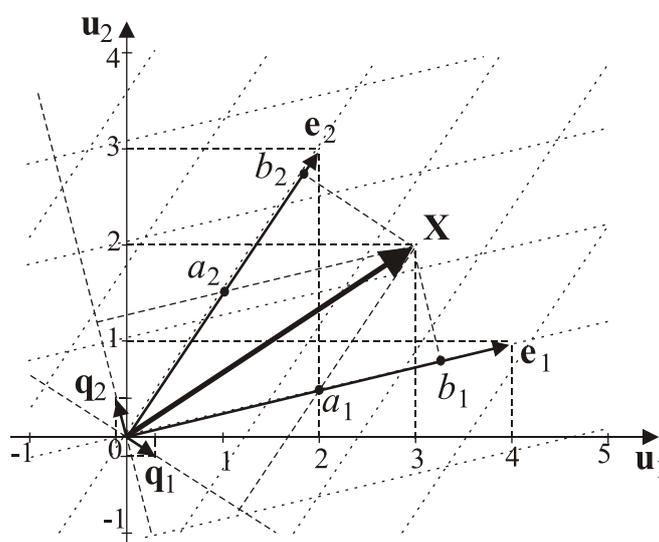


Рис. 1. Преставление вектора  $\mathbf{X}=\{3;2\}$  в косоугольном базисе, заданном векторами  $\mathbf{e}_1=\{4;1\}$  и  $\mathbf{e}_2=\{2;3\}$

Матрица  $\mathbf{e}$  и обратная матрица  $\mathbf{e}^{-1}$ :

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{e}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,3 & -0,1 \\ -0,2 & 0,4 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Тогда сопряженный базис  $\mathbf{q}=\{\mathbf{q}_1,\mathbf{q}_2\}$ :  $\mathbf{q}_1=\{0,3; -0,2\}$ ,  $\mathbf{q}_2=\{-0,1; 0,4\}$ .

Координаты вектора  $\mathbf{X}$  в косоугольном базисе  $\mathbf{e}=\{\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2\}$ :

$$a_1 = 3 \cdot 0,3 + 2 \cdot (-0,2) = 0,9 - 0,4 = 0,5, \quad (5)$$

$$a_2 = 3 \cdot (-0,1) + 2 \cdot 0,4 = -0,3 + 0,8 = 0,5. \quad (6)$$

Проекции вектора  $\mathbf{X}$  на векторы  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  косоугольного базиса:

$$b_1 = \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 1}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{14}{4,123} = 3,395, \quad (7)$$

$$b_2 = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{12}{3,606} = 3,328. \quad (8)$$

Особый интерес представляет случай, когда базис  $\{e_n\}$ ,  $n=1,2,\dots,s$ , представляет собой смещенные копии фильтруемого сигнала  $\mathbf{X}$ . Такую систему отсчета называют собственной, а получающийся при этом фильтр является согласованным. При фильтрации вектора  $\mathbf{X}$  согласованный фильтр вырабатывает отклик в виде проекции вектора  $\mathbf{X}$  на базисные векторы собственной системы отсчета. Координаты же вектора  $\mathbf{X}$  в этой системе отсчета образуют отклик на выходе инверсного фильтра. На рис. 2 представлен сигнал, заданный вектором  $\mathbf{X}=\{3;2\}$ , в собственной системе отсчета, заданной векторами  $e_1=\{3;2\}$  и  $e_2=\{2;3\}$ .

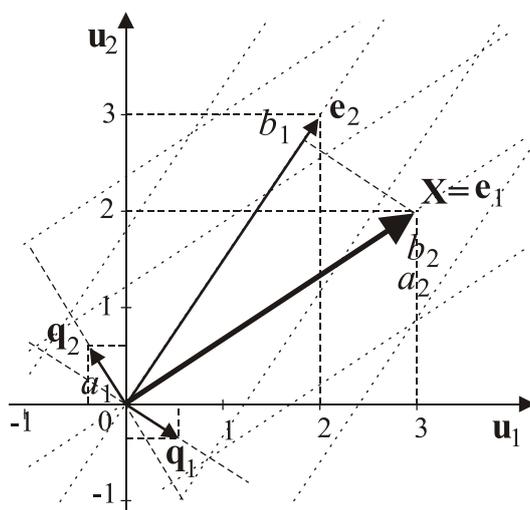


Рис. 2. Преставление вектора  $\mathbf{X}=\{3;2\}$  в собственном косоугольном базисе

Сопряженный базис  $\mathbf{q}=\{q_1, q_2\}$ :  $q_1=\{0,6; -0,4\}$ ,  $q_2=\{-0,4; 0,6\}$ . Координаты вектора  $\mathbf{X}$  в косоугольном базисе  $e=\{e_1, e_2\}$ :

$$a_1 = 3 \cdot 0,6 + 2 \cdot (-0,4) = 1,8 - 0,8 = 1, \quad (9)$$

$$a_2 = 3 \cdot (-0,4) + 2 \cdot (0,6) = -1,2 + 1,2 = 0. \quad (10)$$

Проекции вектора  $\mathbf{X}$  на векторы  $e_1, e_2$  косоугольного базиса:

$$b_1 = \frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot 2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{13}{3,606} = 3,606, \quad (11)$$

$$b_2 = \frac{3 \cdot 2 + 2 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{12}{3,606} = 3,328. \quad (12)$$

## 2. Применение матрицы Грама для представления сигнала в собственной системе координат

Матрица Грама для базиса  $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s)$  представляет собой матрицу вида [13]:

$$G = G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s) = \begin{bmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_s) \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_1) & (\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_2) & \dots & (\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} & \dots & g_{1,s} \\ g_{2,1} & g_{2,2} & \dots & g_{2,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s,1} & g_{s,2} & \dots & g_{s,s} \end{bmatrix}, \quad (13)$$

где  $g_{mn}$  – метрические коэффициенты базиса  $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s)$ . Координаты вектора  $\mathbf{X}$  в косоугольном базисе  $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s)$ :

$$a_1 = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s)} \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{X}) & g_{1,2} & \dots & g_{1,s} \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{X}) & g_{2,2} & \dots & g_{2,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_s, \mathbf{X}) & g_{s,2} & \dots & g_{s,s} \end{vmatrix}, \quad (14)$$

$$a_2 = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s)} \begin{vmatrix} g_{1,1} & (\mathbf{e}_1, \mathbf{X}) & \dots & g_{1,s} \\ g_{2,1} & (\mathbf{e}_2, \mathbf{X}) & \dots & g_{2,s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{s,1} & (\mathbf{e}_s, \mathbf{X}) & \dots & g_{s,s} \end{vmatrix}, \quad (15)$$

и т.д., где  $\Gamma = \Gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s) = \det G$  – определитель матрицы  $G$  (определитель Грама). Проекция вектора  $\mathbf{X}$  на координатные оси  $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_s)$ :

$$\text{пр}_{\mathbf{e}_1} \mathbf{X} = \frac{(\mathbf{e}_1, \mathbf{X})}{|\mathbf{e}_1|} = (a_1 g_{11} + a_2 g_{21} + \dots + a_s g_{s1}) g_{11}^{-1/2}, \quad (16)$$

$$\text{пр}_{\mathbf{e}_2} \mathbf{X} = \frac{(\mathbf{e}_2, \mathbf{X})}{|\mathbf{e}_2|} = (a_1 g_{12} + a_2 g_{22} + \dots + a_s g_{s2}) g_{22}^{-1/2}, \quad (17)$$

и т.д. Например, для косоугольного базиса, заданного векторами  $\mathbf{e}_1=\{3;2\}$  и  $\mathbf{e}_2=\{2;3\}$ :

$$G = G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = \begin{bmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Определитель Грама равен:  $\det G = \Gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 25$ . Координаты вектора  $\mathbf{X}=\{3;2\}$  в данном косоугольном базисе:

$$a_1 = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \begin{vmatrix} (\mathbf{e}_1, \mathbf{X}) & g_{1,2} \\ (\mathbf{e}_2, \mathbf{X}) & g_{2,2} \end{vmatrix} = \frac{1}{25} \begin{vmatrix} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{vmatrix} = 1, \quad (19)$$

$$a_2 = \frac{1}{\Gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} \begin{vmatrix} g_{1,1} & (\mathbf{e}_1, \mathbf{X}) \\ g_{2,1} & (\mathbf{e}_2, \mathbf{X}) \end{vmatrix} = \frac{1}{25} \begin{vmatrix} 12 & 12 \\ 13 & 13 \end{vmatrix} = 0. \quad (20)$$

Таким образом, при синтезе инверсного фильтра с использованием матрицы Грама нет необходимости вычислять дополнительный косоугольный базис  $\{\mathbf{q}_n\}$ .

Рассмотрим представление процесса ациклической фильтрации сигнала с помощью матрицы Грама. Для этого сигнал  $\mathbf{X}$  необходимо дополнить нулями до размерности  $2s-1$ . Тогда количество базисных функций для представления сигнала  $\mathbf{X}_{au}$  также увеличится до  $2s-1$ :  $\mathbf{e}_{au} = (\mathbf{e}_{au,1}, \mathbf{e}_{au,2}, \dots, \mathbf{e}_{au,s}, \dots, \mathbf{e}_{au,2s-1})$ . При этом  $\mathbf{e}_{au,1} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{s-1}, \mathbf{e}_1)$ ,  $\mathbf{e}_{au,2} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{s-2}, \mathbf{e}_1, 0)$  и т.д. Например, для сигнала  $\mathbf{X} = \{3; 2\}$  базисные функции при ациклической фильтрации:  $\mathbf{e}_{au,1} = \{0; 3; 2\}$ ,  $\mathbf{e}_{au,2} = \{3; 2; 0\}$  и  $\mathbf{e}_{au,3} = \{2; 0; 3\}$ . Тогда матрица Грама:

$$G = G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 13 & 6 & 6 \\ 6 & 13 & 6 \\ 6 & 6 & 13 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Определитель Грама равен:  $\det G = \Gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1225$ . Дополняем сигнал  $\mathbf{X}$  нулями:  $\mathbf{X}_{au} = \{3; 2; 0\}$ . Получаем координаты вектора  $\mathbf{X}_{au}$  в косоугольном базисе  $\mathbf{e}_{au}$ :  $a_{au} = \{0; 1; 0\}$ . Проекция вектора  $\mathbf{X}_{au}$  на координатные оси  $\mathbf{e}_{au}$ :  $b_{au} = \{6; 13; 6\}$ .

Особый интерес представляет случай, когда спектр сигнала, представленный вектором  $\mathbf{X}$ , содержит компоненты равные нулю. Рассмотрим, например, сигнал  $\mathbf{X} = \{2-i; -2; i\}$ . Спектр такого сигнала содержит критическую, равную нулю, компоненту:  $\mathbf{P} = \{0; 2,134+0,232i; 3,866-3.232i\}$ . Реализация инверсного фильтра в данном случае вызывает затруднение, т.к. возникает неопределенность в виде деления на ноль. Базис задается векторами  $\mathbf{e}_1 = \{2-i; -2; i\}$ ,  $\mathbf{e}_2 = \{-2; i; 2-i\}$  и  $\mathbf{e}_3 = \{i; 2-i; -2\}$ . Матрица Грама равна:

$$G = G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = \begin{bmatrix} 10 & -5+6i & -5-6i \\ -5-6i & 10 & -5+6i \\ -5+6i & -5-6i & 10 \end{bmatrix}. \quad (22)$$

Определитель Грама равен:  $\det G = \Gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) = 0$ . Координаты вектора  $\mathbf{X}$  в данном косоугольном базисе не могут быть найдены. Проекция вектора  $\mathbf{X}$  на координатные оси:

$$\text{пр}_{\mathbf{e}_1} \mathbf{X} = 3,162, \text{ пр}_{\mathbf{e}_2} \mathbf{X} = -1,581 - 1,897i, \text{ пр}_{\mathbf{e}_3} \mathbf{X} = -1,581 + 1,897i. \quad (23)$$

При использовании метода устранения неопределенности путем коррекции критической компоненты спектр скорректированного сигнала  $\mathbf{X}_k$ :  $\mathbf{P}_k = \{3; 2,134 + 0,232i; 3,866 - 3,232i\}$ . Критерий выбора значения компоненты спектры для коррекции сигнала предложен в работе [12]. Скорректированный сигнал:  $\mathbf{X}_k = \{3-i; -1; 1+i\}$ .

Разложим сигнал  $\mathbf{X}$  в базисе  $\mathbf{e}_k$ , образованном на основе скорректированного сигнала  $\mathbf{X}_k$ . Матрица Грама:

$$G = \begin{bmatrix} 13 & -2+6i & -2-6i \\ -2-6i & 13 & -2+6i \\ -2+6i & -2-6i & 13 \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Координаты сигнала  $\mathbf{X}$  в базисе  $\mathbf{e}_k$ :  $a_k = \{0,667; -0,333; -0,333\}$  представляют собой отклик на выходе инверсного фильтра, а проекция сигнала  $\mathbf{X}$  на базисные функции  $\mathbf{e}_k$ :  $b_k = \{2,774; -1,387 - 1,664i; -1,387 + 1,664i\}$  – отклик на выходе согласованного фильтра.

Отклик на выходе инверсного фильтра содержит боковые лепестки, причиной появления которых является коррекция сигнала, обусловленная наличием в его спектре равной нулю компоненты. Как показано в работах [12,14,15], уровни максимального отклика и максимального БЛ зависят от количества критических компонент в спектре сигнала, а отношение энергии главного пика к энергии БЛ определяется соотношением  $(s - s_{kp})/s_{kp}$ , где  $s_{kp}$  – количество критических компонент в спектре сигнала  $\mathbf{X}$ . Применение методов коррекции или ограничения спектра сигнала по уровню или по частоте для устранения неопределенности типа «деление на ноль» при синтезе инверсного

фильтра приводит к возникновению БЛ, параметры которых зависят от количество критических компонент в спектре сигнала.

### 3. Устранение неопределенности «деление на ноль» методом коррекции базиса

При использовании методов коррекции или ограничения спектра сигнала по уровню или по частоте для устранения неопределенности типа «деление на ноль» при синтезе инверсного фильтра наблюдается изменение базиса  $\mathbf{e}$  и, как следствие, возникновение БЛ в сжатом сигнале на выходе инверсного фильтра. Рассмотрим подход к устранению неопределенности типа «деление на ноль» при синтезе инверсного фильтра, основанный на применении метода коррекции базиса. Сущность метода заключается в изменении одной из компонент одной из базисных функций. Например, для сигнала  $\mathbf{X}=\{2-i; -2; i\}$  базис для синтеза инверсного фильтра задается векторами  $\mathbf{e}_1=\{2-i; -2; i\}$ ,  $\mathbf{e}_2=\{-2; i; 2-i\}$  и  $\mathbf{e}_3=\{i; 2-i; -2\}$ . Изменим одну из компонент базисной функции  $\mathbf{e}_3$ . Получим скорректированный базис:

$$\mathbf{e}_1=\{2-i; -2; i\}, \mathbf{e}_2=\{-2; i; 2-i\} \text{ и } \mathbf{e}'_3=\{i; 2-i; -3\}. \quad (25)$$

Матрица Грама в этом случае равна:

$$G = G(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3) = \begin{bmatrix} 10 & -5+6i & -5-7i \\ -5-6i & 10 & -7+7i \\ -5+7i & -7-7i & 15 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Определитель Грама равен:  $\det G = \Gamma(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3) = 13$ . Координаты вектора  $\mathbf{X}$  в данном косоугольном базисе  $\mathbf{e}=(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}'_3)$ :

$$a_1 = \frac{1}{13} \begin{vmatrix} 10 & -5+6i & -5-7i \\ -5-6i & 10 & -7+7i \\ -5+7i & -7-7i & 15 \end{vmatrix} = 1, \quad (27)$$

$$a_2 = \frac{1}{13} \begin{vmatrix} 10 & 10 & -5-7i \\ -5-6i & -5-6i & -7+7i \\ -5+7i & -5+7i & 15 \end{vmatrix} = 0, \quad (28)$$

$$a_3 = \frac{1}{13} \begin{vmatrix} 10 & -5+6i & 10 \\ -5-6i & 10 & -5-6i \\ -5+7i & -7-7i & -5+7i \end{vmatrix} = 0, \quad (29)$$

а проекции вектора  $\mathbf{X}$  на координатные оси:

$$\text{пр}_{e_1} \mathbf{X} = 3,162, \text{ пр}_{e_2} \mathbf{X} = -1,581 - 1,897i, \text{ пр}_{e_3} \mathbf{X} = -1,291 + 1,807i. \quad (30)$$

Изменение только одной компоненты одной из базисных функций позволяет устранить проблему деления на ноль при синтезе инверсного фильтра. Сжатый сигнал на выходе инверсного фильтра не содержит БЛ, а сигнал на выходе согласованного фильтра в виде проекций вектора  $\mathbf{X}$  на координатные оси изменяется незначительно.

Проведены эксперименты по инверсной фильтрации сигналов с коррекции базиса с применением SDR HackRF One. На рис. 3 представлены результаты согласованной и инверсной фильтрации сигналов в нормированном виде с коррекцией базиса для случая обработки перекрывающихся импульсов прямоугольной формы.

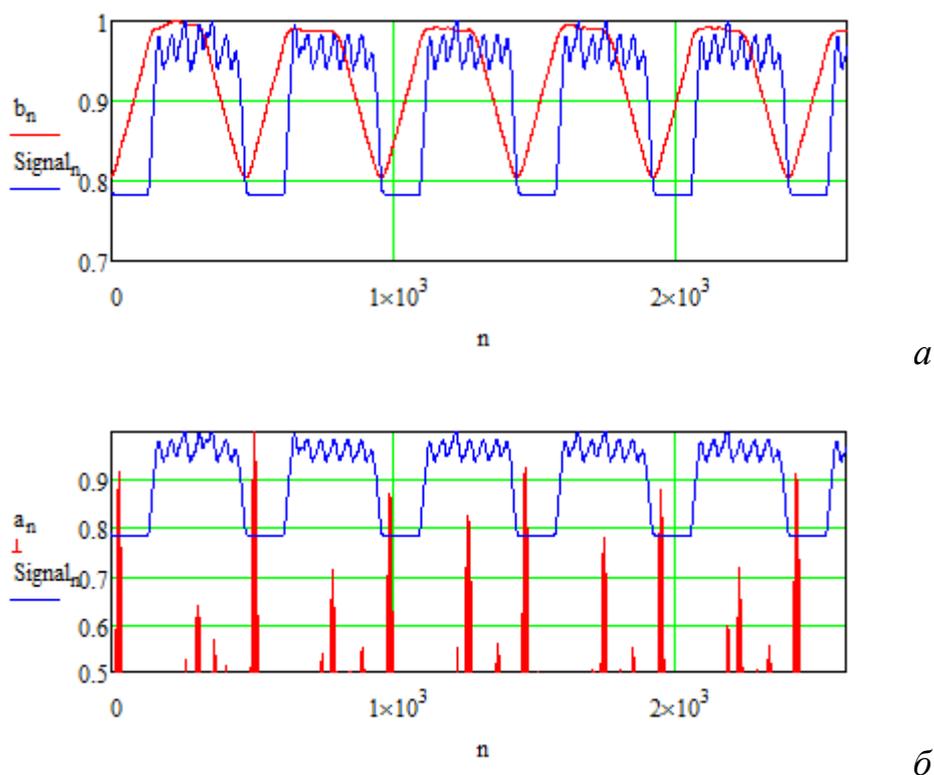


Рис. 3. Результат согласованной (а) и инверсной фильтрации (б) перекрывающихся импульсов прямоугольной формы

Таким образом, метод коррекции базиса, основанный на изменении одной компоненты одной из базисных функций, позволяет устранить неопределенность типа «деление на ноль» при синтезе инверсного фильтра, возникающую при наличии критических, равных нулю, компонент спектра анализируемого сигнала.

## Заключение

Рассмотрен процесс линейной фильтрации как процесс представления сигнала в косоугольной системе координат. В том случае, когда базис задается как совокупность смещенных копий фильтруемого сигнала, проекции вектора, задающий сигнал в данном базисе, представляют собой отклик на выходе согласованного фильтра, а координаты этого вектора образуют отклик на выходе инверсного фильтра. Применение матрицы Грама при синтезе инверсного фильтра позволяет исключить необходимость вычислять дополнительный косоугольный базис.

Предложен метод устранения неопределенности типа «деление на ноль» при синтезе инверсного фильтра с применением аналитической геометрии. Метод основан на коррекции базиса, при котором изменяется одна из компонент одной из базисных функций.

## Литература

1. Гонсалес Р., Вудс Р. *Цифровая обработка изображений*. Москва, Техносфера. 2005. 1072 с.
2. Lv XG., Li F., Zeng T. Convex blind image deconvolution with inverse filtering. *Inverse Problems*. 2018. V.34. №3. P.3-35. <https://doi.org/10.1088/1361-6420/aaa4a7>
3. Michailovich O., Tannenbaum A. Blind Deconvolution of Medical Ultrasound Images: A Parametric Inverse Filtering Approach. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2007. V.16. №12. P.3005-3019. <https://doi.org/10.1109/tip.2007.910179>

4. Schneider M., Habets E.A.P. Iterative DFT-Domain Inverse Filter Optimization Using a Weighted Least-Squares Criterion. *IEEE/ACM Transactions on Audio, Speech, and Language Processing*. 2019. V.27. №12. P.1957-1969. <https://doi.org/10.1109/taslp.2019.2936385>
5. Mudukutore A.S., Chandrasekar V., Keeler R.J. Pulse compression for weather radars. *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*. 1998. V.36. №1. P.125-142. <https://doi.org/10.1109/taslp.2019.2936385>
6. Zhang Yo. et al. Super-resolution surface mapping for scanning radar: inverse filtering based on the fast iterative adaptive approach. *IEEE transactions on geoscience and remote sensing*. 2018. V.56. №1. P.127-144. <https://doi.org/10.1109/TGRS.2017.2743263>
7. Nelander A. Processing for continuous radar waveforms. *2004 International Waveform Diversity & Design Conference*. Edinburgh. 2004. P.1-5. <https://doi.org/10.1109/IWDDC.2004.8317557>
8. Абраменков В.В., Васильченко О.В., Семченков С.М., Печенев Е.А. Инверсная фильтрация импульсных сигналов. *Электромагнитные волны и электронные системы*. 2017. №4. С.42-53.
9. Семченков С.М., Печенев Е.А. Способ повышения разрешающей способности за счет инверсной фильтрации импульсных сигналов. *Радиопромышленность*. 2017. №3. С.103-109.
10. Абраменков В.В., Митрофанов Д.Г., Жбанов И.Л., Семченков С.М. Метод повышения устойчивости оценок импульсной характеристики линейной системы на основе сингулярного дополнения матрицы опорных сигналов. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2020. №9. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.9.6>
11. Mungkala Ch., Kitkuan D. Digital Image Restoration: A Comparison Study between Inverse and Wiener Filtering Algorithms (IWFA). *The Thai Journal of Mathematics*. 2020. V.18. №1. P.14-37.
12. Хафизов Р.Г., Казаринов А.В. Оптимизация коррекции критических компонент спектра импульсного сигнала для обеспечения устойчивости

инверсной фильтрации. *Радиотехнические и телекоммуникационные системы*. 2020. №2(38). С.24-33.

13. Задорожный В.Н., Зальмеж В.Ф., Трифонов А.Ю., Шаповалов А.В. *Высшая математика для технических университетов. Часть II. Аналитическая геометрия: учебное пособие*. Томск, Изд-во Томского политехнического университета. 2014.
14. Хафизов Р.Г. Обеспечение разрешенного образа при инверсной фильтрации сигналов в условиях неопределенности. *Цифровая обработка сигналов*. 2020. №1. С.50-54.
15. Хафизов Р.Г. Оценка параметров боковых лепестков сжатого сигнала на выходе инверсного фильтра в условиях неопределенности. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №8. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.8.10>

**Для цитирования:**

Хафизов Р.Г., Григорьевых Е.А., Пахмутов Е.С., Соколова М.С., Масликов А.М. Применение метода коррекции базиса для устранения неопределенности при синтезе инверсного фильтра. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.12.6> (In Russian)