DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.12.1
УДК: 530.182

БИФУРКАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ОБЛАСТИ ПОЛНОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ СИСТЕМЫ НЕИДЕНТИЧНЫХ КОНТАКТОВ ДЖОЗЕФСОНА

А. П. Кузнецов, И. Р. Сатаев

Саратовский филиал ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
410019, Саратов, ул. Зеленая 38

Статья поступила в редакцию 28 ноября 2023 г

Аннотация. Устройство области полной синхронизации системы трех связанных неидентичных по критическим токам контакта Джозефсона исследовано методом бифуркационного анализа. На плоскости параметров неидентичности указаны линии седло-узловых бифуркаций, бифуркаций Неймарка-Сакера и удвоения периода, отвечающих типичной области синхронизации. Изучено влияние симметрии на устройство области полной синхронизации. В системе при определенных условиях возможна бифуркация вилки и связанная с ней бистабильность. Указаны также точки Богданова-Такенса, точки сборки и точки типа fold-flip. Обсуждается накопление точек последнего типа на базе циклов удваивающихся периодов вблизи границы областей синхронизации и хаоса.

Ключевые слова: контакт Джозефсона, фаза, бифуркации.

Финансирование: Работа выполнена по Госзаданию тема FFWZ-2022-0001.

Автор для переписки: Сатаев Игорь Рустамович, sataevir@gmail.com

Введение

Эффект Джозефсона представляет собой фундаментальное явление в физике сверхпроводников. Он находит широкое применение для генерации и приема сигналов очень высокой частоты. Одним из подходов к изучению контактов Джозефсона является применение методов нелинейной динамики. В таком контексте ими занимались такие известные исследователи в области теории синхронизации и нелинейной динамики, как A. Pikovsky [1, 2], H. Strogatz [3, 4], K. Wiesenfeld [4, 5] и другие. Одной из важных ситуаций является случай неидентичных контактов. Два неидентичных контакта со связью через емкость описаны в [6, 7]. Представлены уравнения системы, обсуждается захват частот и возможность квазипериодической динамики с двумя несоизмеримыми частотами. Бифуркации и возможность хаоса и гиперхаоса при связи двух контактов через резистор обсуждаются в [8, 9]. Однако мало изученным является случай трех контактов. В работах [10, 11] для их анализа был использован метод карт ляпуновских показателей. Он состоит в том, что в каждой точке (пикселе) плоскости параметров численно определяется величина ляпуновского показателя, а затем точка окрашивается в определенный цвет в соответствии со спектром показателей. Такой подход позволяет выявить периодические, двух- и трехчастотные квазипериодические и хаотические режимы в пространстве параметров. При этом, однако, остаются не выясненными механизмы полной синхронизации. С этой целью в настоящей работе используется традиционный для нелинейной динамики бифуркационный анализ [12, 13]. Он является важным для понимания картины синхронизации [14]. Кроме того, мы обсудим возможность критического поведения [15-17], связанного с накоплением точек бифуркаций определенного типа, и ассоциирующегося с границей областей синхронных режимов и хаоса. Мы здесь будем рассматривать случай контактов, неидентичных по критическим токам.

1. Исследуемая система

Схема исследуемой системы показана на рис. 1. Она представляет собой связанные в цепочку три неидентичных контакта, нагруженных на *RLC* цепь. Здесь $I_{1,2,3}$ – критические токи соответствующих контактов, r – их сопротивления, I – внешний возбуждающий ток.

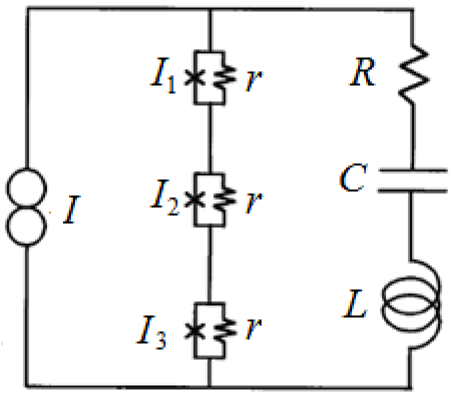

Рис. 1. Схема трех неидентичных контактов Джозефсона.

Для такой системы в соответствии с [1, 3-5, 10] имеем следующие безразмерные уравнения:

$$
\begin{aligned}
&\dot\varphi_1 = I - \sin\varphi_1 - \varepsilon\dot Q,\\
&\dot\varphi_2 = I - (1+\xi_1)\sin\varphi_2 - \varepsilon\dot Q,\\
&\dot\varphi_3 = I - (1+\xi_2\sin)\varphi_3 - \varepsilon\dot Q,\\
&\ddot Q + \gamma\dot Q + \omega_0^2 Q = I - \frac{1}{3}[\sin\varphi_1 + (1+\xi_1)\sin\varphi_2 + (1+\xi_2)\sin\varphi_3].
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь величина φ_n является разностью фаз между волновыми функциями сверхпроводников по обе стороны n-го контакта. ξ_1, ξ_2 – параметры неидентичности по критическим токам, определяемые отстройкой критического тока второго и третьего контактов относительно первого, I – нормированный возбуждающий контакты ток, $\dot Q$ – ток через параллельную *RLC* нагрузку, ε – параметр связи контактов, γ, ω_0 – безразмерные параметры цепи, которые в соответствии с [1] выбираем $\gamma = 1$, $\omega_0^2 = 1.2$, а также полагаем $I = 1.1$.

2. Бифуркационный анализ области периодических режимов

Рассмотрим устройство и эволюцию с увеличением параметра связи одной из резонансных областей, отвечающей полной синхронизации трех контактов. В этом случае возникает периодический режим, которому в фазовом пространстве отвечает предельный цикл. На плоскости параметров неидентичности контактов по критическим токам (ξ_1, ξ_2) существует множество таких областей. Они встроены в области двухчастотной квазипериодичности и лежат на пересечении полос квазипериодических режимов. (Такая ситуация характерна для задач о взаимодействии нескольких нелинейных автоколебательных осцилляторов [18-20].) В качестве примера мы выбрали достаточно типичную область существования предельного цикла типа (2, 3, 2); тип цикла определяется количеством полных оборотов вокруг тора за период цикла. Эта область встроена в полосу двухчастотных режимов, возникающую из условия одного из основных резонансов $\xi_2 = 0$, когда первый и третий контакты идентичны. На рис. 2 показан фазовый портрет (его двумерная проекция) этого предельного цикла и возникающего при вариации параметров двухчастотного тора.

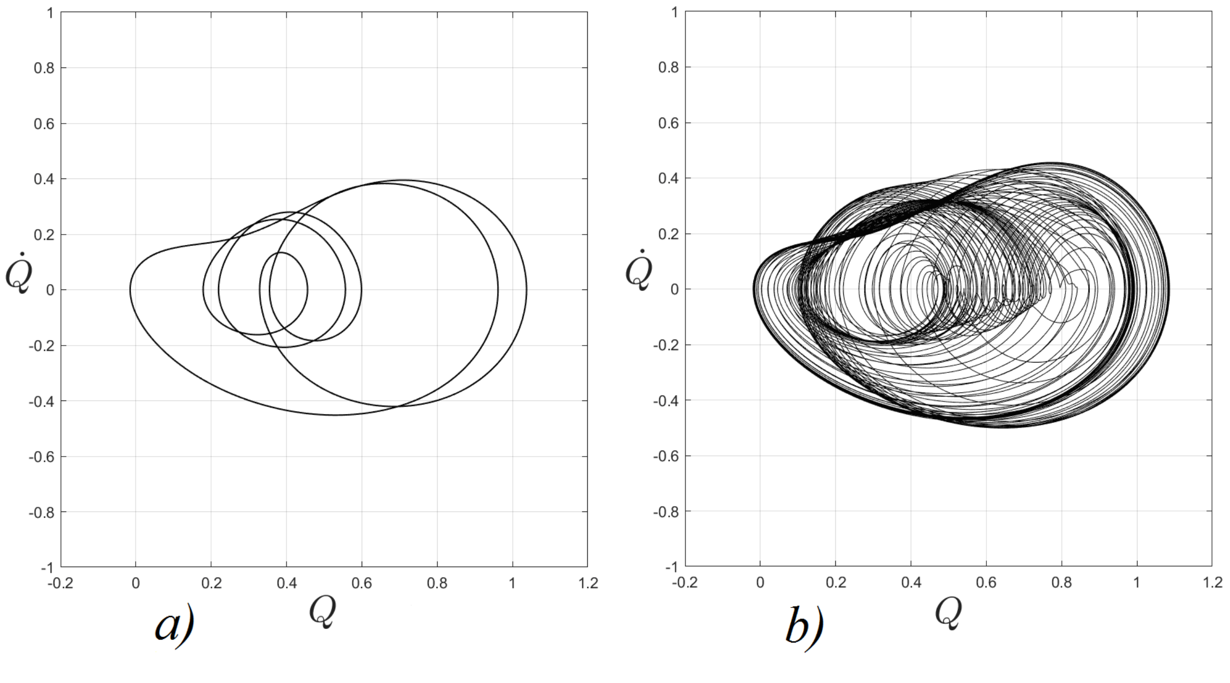

Рис. 2. Фазовые портреты для $\xi_2 = 0.0297$: *a*) исследуемый предельный цикл, $\xi_1 = -0.118$; *b*) близкий к нему по параметрам двухчастотный тор, $\xi_1 = -0.129$.

На рис. 3*a* представлена бифуркационная диаграмма, определяющая область существования рассматриваемого устойчивого цикла при ε = 0.5 (при меньших значениях ε принципиальных отличий нет). Она состоит из двух перекрывающихся частей, для наглядности выделенных разным цветом. Границами области устойчивости цикла являются линии касательной (седло-узловой) бифуркации SN и бифуркации Неймарка-Сакера NS. На линиях первой устойчивый цикл указанного типа сталкивается с седловым и исчезает, так что ассоциирующаяся с ним синхронизация разрушается. На показанной на рисунке стрелкой линии субкритической бифуркации Неймарка-Сакера происходит жесткий переход к хаосу. Общей точкой линий седло-узловых бифуркаций и Неймарка-Сакера является бифуркация коразмерности 2 – точка Богданова-Такенса BT (или резонанс 1:1 [13]). В таких точках мультипликаторы цикла принимают значения (+1, +1).

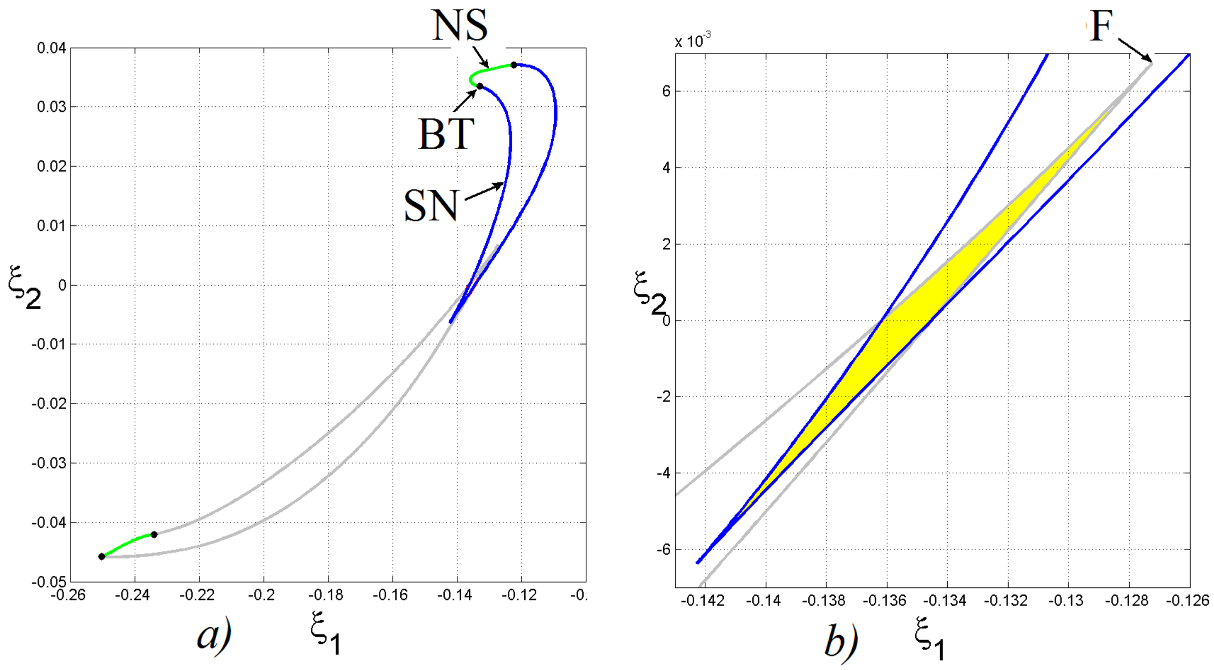

Рис. 3. Бифуркационные линии и точки системы (1) на плоскости параметров неидентичности (ξ_1, ξ_2). Синяя и серая линии соответствуют седло-узловой бифуркации SN, зеленая – бифуркации Неймарка-Сакера NC, черные кружки отвечают бифуркации Богданова-Такенса, F – точка сборки. Желтым цветом показана область бистабильности. Параметр ε = 0.5.

На рис. 3*b* представлена в увеличенном виде область перекрытия бифуркационных линий. Они представляют собой два накладывающихся друг на друга «клюва» с остриями в точках сборки F. Причем пересекаются линии седло-узловых бифуркаций точно на линии $\xi_2 = 0$ (первый и третий контакты идентичны). Объясняется это тем, что на этой линии система (1) обладает дополнительной симметрией к перестановке фазовых переменных $(\varphi_1,\varphi_3)\rightarrow(\varphi_3,\varphi_1)$. С физической точки зрения это соответствует симметрии на рис. 1 относительно перестановки первого и третьего контактов. При $\varepsilon = 0$ с возрастанием параметра связи происходит симметричная бифуркация вилки. Соответственно, в области, отмеченной желтым цветом, существуют одновременно два устойчивых цикла (симметричные друг другу на линии $\xi_2 = 0$), система демонстрирует бистабильность.

В дальнейшем мы будем рассматривать эволюцию только верхней половинки области устойчивости цикла.

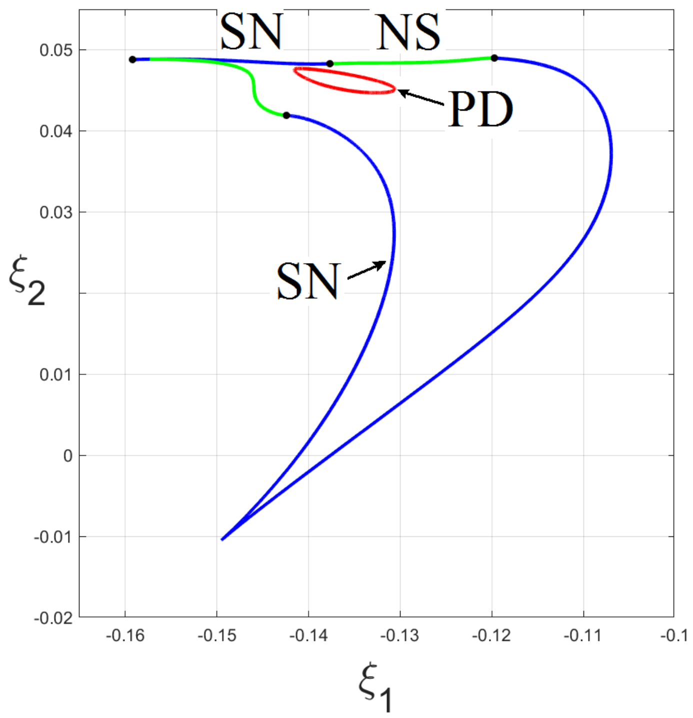

Рис. 4. Бифуркационные линии и точки системы (1) для параметра связи $\varepsilon = 0.635$. Красная линия отвечает бифуркации удвоения периода PD. Остальные обозначения соответствуют рис. 3.

При $\varepsilon = 0.635$ происходит перестройка верхней границы области синхронизации – линия бифуркации Неймарка-Сакера NS прерывается еще одним участком линии касательной бифуркации SN, как показано на рис. 4. В свою очередь, предельный цикл на линии PD претерпевает бифуркацию удвоения периода [15]. В данном случае циклу удвоенного периода отвечает «остров» на плоскости параметров.

3. Бифуркационный анализ на пороге хаоса

При дальнейшем увеличении параметра связи ε удвоенный цикл также может испытывать бифуркацию удвоения периода и т.д. При некотором ε появляется область хаоса в виде «острова», возникающая в результате каскада удвоений периода по сценарию Фейгенбаума [15]. Дальнейшая эволюция области резонанса заключается в том, что внутренняя область хаоса расширяется и «влипает» в верхнюю границу устойчивости цикла. Чтобы проиллюстрировать возможность хаоса недостаточно бифуркационного анализа, поэтому представим ляпуновскую карту, построенную по методике [18-20]. В этом случае для ε = 0.675 на рис. 5, по спектру ляпуновских показателей идентифицируются периодические режимы (periodic), двухчастотная квазипериодичность (quasiperiodicity) и хаос (chaos). Отметим, что на карте отчасти визуализируются и линии последовательных бифуркаций удвоения периода PD, как линии желтого цвета, поскольку для этих бифуркаций обращаются в ноль два показателя Ляпунова, как и для квазипериодических режимов.

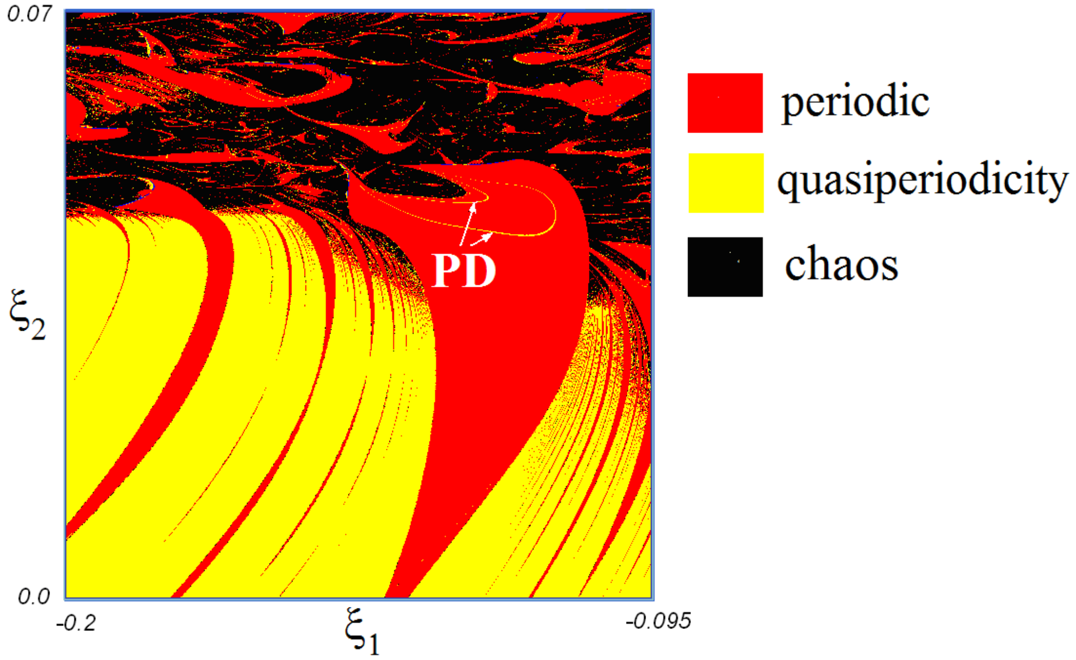

Рис. 5. Ляпуновская карта системы (1) при ε = 0.675. Внутри резонансного языка возникает область хаоса. PD – линии удвоения периода.

Как мы отметили выше, внутренняя область хаоса «влипает» в верхнюю границу области устойчивости цикла. Этот феномен сопровождается следующим бифуркационным сценарием. На пересечении линий удвоения периода и седло-узловой бифуркации возникают новые бифуркационные точки коразмерности 2 – fold-flip [13]. В таких точках мультипликаторы цикла равны (+1, −1). На рис. 6 показано взаимное расположение бифуркационных линий и точек fold-flip FF на базе первой линии удвоения периода. Значение параметра связи соответствует рис. 5.

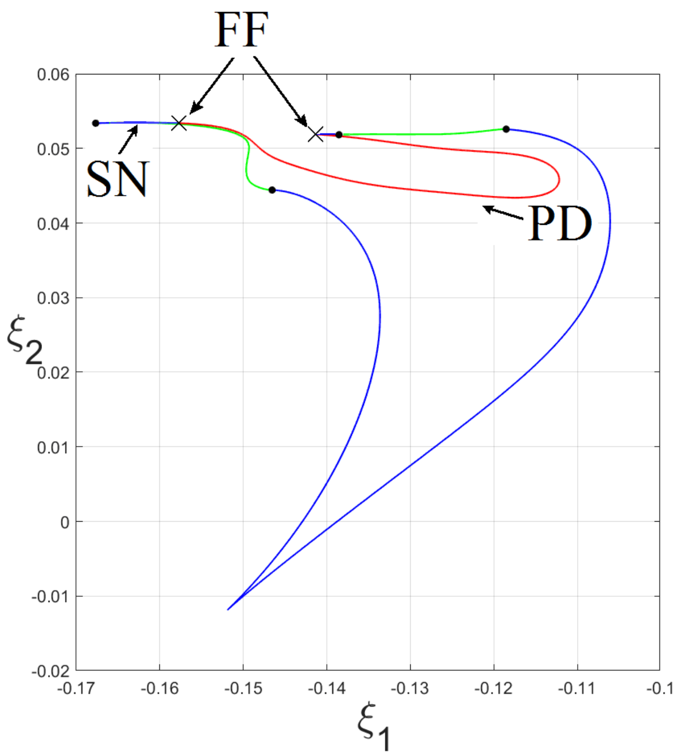

Рис. 6. Бифуркационные линии и точки fold-flip FF (отмечены крестиком). Параметр ε = 0.675.

Точки fold-flip возникают и на базе последующих циклов удвоенного периода. В таблице 1 приведены значения параметров, соответствующие нескольким последовательным точкам каскада таких точек. Отметим, что для модельных систем известно, что точкам накопления fold-flip бифуркаций соответствует критическая точка типа C [15-17]. В этой точке оканчивается фейгенбаумовская линия накопления удвоений, и в нее же приходит линия, ограничивающая область синхронных периодических режимов.

Таблица 1. Точки бифуркаций fold-flip на плоскости параметров.

Период цикла	ξ_1	ξ_2
1	−0.1577070163	0.05337616037
2	−0.1492434792	0.05123061382
4	−0.1522374747	0.05264990159
8	−0.1515894305	0.05247723112

Заключение

В данной работе проведен бифуркационный анализ области полной синхронизации трех неидентичных по критическим токам контактов Джозефсона. Эта область ограничена линиями седло-узловых бифуркаций предельных циклов и бифуркаций Неймарка-Сакера. Изучено влияние симметрии на устройство области полной синхронизации. Вследствие симметрии системы относительно перестановки первого и третьего контактов возможно сосуществование (бистабильность) двух предельных циклов, ассоциирующаяся с бифуркацией вилка в случае идентичности этих контактов. С ростом величины связи контактов на линии Неймарка-Сакера появляются отрезки линий седло-узловых бифуркаций, а также возникает замкнутая линия удвоения периода. С дальнейшим ростом связи внутри резонансного языка становится возможен последовательный каскад бифуркаций удвоения периода, и возникает хаос по сценарию Фейгенбаума. В свою очередь на границе области синхронизации наблюдается последовательность точек коразмерности два, в которых пересекаются линии седло-узловых бифуркаций и линии удвоения циклов возрастающих периодов.

Финансирование: Работа выполнена по Госзаданию тема FFWZ-2022-0001

Литература

1. Vlasov V., Pikovsky A. Synchronization of a Josephson junction array in terms of global variables //Physical Review E. – 2013. – Т. 88. – №. 2. – С. 022908.
2. Neumann E., Pikovsky A. Slow-fast dynamics in Josephson junctions //The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. – 2003. – Т. 34. – С. 293-303.
3. Watanabe S., Strogatz S. H. Constants of motion for superconducting Josephson arrays //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1994. – Т. 74. – №. 3-4. – С. 197-253.
4. Wiesenfeld K., Colet P., Strogatz S. H. Frequency locking in Josephson arrays: Connection with the Kuramoto model //Physical Review E. – 1998. – Т. 57. – №. 2. – С. 1563.
5. Wiesenfeld K., Swift J. W. Averaged equations for Josephson junction series arrays //Physical Review E. – 1995. – Т. 51. – №. 2. – С. 1020.
6. Valkering T. P., Hooijer C. L. A., Kroon M. F. Dynamics of two capacitively coupled Josephson junctions in the overdamped limit //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2000. – Т. 135. – №. 1-2. – С. 137-153.
7. Abdullaev F. K. et al. Phase-locked states in the system of two capacitively coupled Josephson junctions //Physical Review B. – 2000. – Т. 62. – №. 10. – С. 6766.
8. Kurt E., Canturk M. Chaotic dynamics of resistively coupled DC-driven distinct Josephson junctions and the effects of circuit parameters //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2009. – Т. 238. – №. 22. – С. 2229-2237.
9. Kurt E., Canturk M. Bifurcations and Hyperchaos from a DC Driven Nonidentical Josephson Junction System //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2010. – Т. 20. – №. 11. – С. 3725-3740.
10. Kuznetsov A. P., Sataev I. R., Sedova Y. V. Dynamics of three and four non-identical Josephson junctions //Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2018. – Т. 7. – №. 1. – С. 105-110.
11. Кузнецов А. П., Сатаев И. Р., Седова Ю. В. Анализ трех неидентичныз контактов Джозефсона методом карт ляпуновских показателей //Известия

Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика. – 2023. – Т. 23. – №. 1. – С. 4-13.

12. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. – Springer Science & Business Media, 2013, 459 с.
13. Kuznetsov Yu. A., Meijer H.G.E. Numerical bifurcation analysis of maps: from theory to software. United Kingdom: Cambridge University Press. – 2019, 420 с.
14. Balanov A. et al. Synchronization. From simple to complex. – Springer, 2009, 425 с.
15. Кузнецов С. П. Динамический хаос. Москва: Физматлит. 2-е издание – 2006, 356 с.
16. Kuznetsov A. P., Kuznetsov S. P., Sataev I. R. A variety of period-doubling universality classes in multi-parameter analysis of transition to chaos //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1997. – Т. 109. – №. 1-2. – С. 91-112.
17. Кузнецов А. П. и др. Критическая точка накопления fold-flip бифуркаций и критический квазиаттрактор (обзор и новые результаты) //Russian Journal of Nonlinear Dynamics. – 2008. – Т. 4. – №. 2. – С. 113-132.
18. Baesens C. et al. Three coupled oscillators: mode-locking, global bifurcations and toroidal chaos //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1991. – Т. 49. – №. 3. – С. 387-475.
19. Inaba N. et al. Numerical and experimental observation of Arnol'd resonance webs in an electrical circuit //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 2015. – Т. 311. – С. 17-24.
20. Emelianova Y. P. et al. A structure of the oscillation frequencies parameter space for the system of dissipatively coupled oscillators //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2014. – Т. 19. – №. 4. – С. 1203-1212

Для цитирования:

Кузнецов А.П., Сатаев И.Р. Бифуркационный анализ области полной синхронизации системы неидентичных контактов Джозефсона. // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – №. 12. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.12.1