

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.12.19>

УДК: 621.396.67

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ БЕСКОНЕЧНОЙ ДВУМЕРНОЙ РЕШЕТКИ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

С.Е. Банков

ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
125009, Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7

Статья поступила в редакцию 29 ноября 2023 г.

Аннотация. Развита метод электродинамического анализа бесконечных двумерных антенных решеток со случайными параметрами. Представленный подход основан на использовании метода компенсирующих источников и метода обобщенной матрицы рассеяния, которые позволяют анализировать бесконечные неоднородные антенные решетки, содержащие дефекты периодической структуры в виде элементов с параметрами, отличающимися от параметров регулярной структуры. Решетка анализируется в предположении малых отклонений ее параметров от средних значений. В указанном приближении получены оценки для дисперсии амплитуд отраженных волн от входов элементарных излучателей и дисперсии некогерентного поля излучения в режиме квазипериодического возбуждения решетки.

Ключевые слова: антенная решетка, обобщенная матрица рассеяния, метод компенсирующих источников случайный параметр.

Финансирование: Государственное задание ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Автор для переписки: Банков Сергей Евгеньевич, sbankov@yandex.ru

Введение.

В работе [1] был предложен метод электродинамического анализа линейных (одномерных) бесконечных антенных решеток со случайными параметрами. Он основан на специальном подходе к описанию электромагнитного поля в периодической структуре – методу обобщенной матрицы рассеяния (МОМР). Известны несколько вариантов МОМР [2-4]. Их объединяет общая идея, состоящая в разделении решения сложной граничной задачи для решетки в целом на два более простых этапа. На первом из них анализируется элементарный излучатель (ЭИ) решетки, а на втором этапе учитывается взаимодействие ЭИ в составе решетки.

Особенности анализа ЭИ определяются способом описания взаимодействующего с ним поля. В литературе известно несколько вариантов решения данной задачи. В работах [2,4] используются разложения по сферическим гармоникам, являющимися общими решениями векторных уравнений Максвелла в однородном пространстве в сферических координатах. В работе [3] для представления взаимодействующего с ЭИ поля используется теорема эквивалентности. Во всех вариантах МОМР поле разделяется на две части: возбуждающее поле и рассеянное поле. При этом возбуждающее поле представляется набором стандартных воздействий, а рассеянное поле набором стандартных реакций. Стандартные воздействия и стандартные реакции не зависят от конструкции ЭИ и его положения в решетке. Они определяются выбранным способом описания поля.

В варианте МОМР, использующем разложения по векторным сферическим гармоникам (РВСГ) стандартными воздействиями являются гармоники с зависимостью от радиальной координаты в виде сферических функций Бесселя, а стандартными реакциями гармоники со сферическими функциями Ганкеля [5]. Разложение по векторным сферическим гармоникам (ВСГ) содержит амплитуды возбуждающих и рассеянных гармоник, значения которых определяют полное поле ЭИ. Первый этап МОМР состоит в определении обобщенной матрицы

рассеяния (ОМР) ЭИ, которая связывает вектора амплитуд возбуждающих и рассеянных гармоник [4].

В наиболее удобной для нас форме МОМР основанный на РВСГ (МОМР-РВСГ) описан в работе [4]. В ней обсуждается его применение для анализа решеток в большими электрическими размерами. Дальнейшее развитие этого варианта МОМР представлено в [1,6]. В работе [6] он дополнен методом компенсирующих источников (МКИ) [8]. Данный метод позволяет анализировать бесконечные, но неоднородные решетки, то есть структуры с дефектами. Под дефектом мы понимаем любой ЭИ с ОМР отличающейся от ОМР регулярного ЭИ.

В работе [1] рассмотрено применение МКИ на основе МОМР-РВСГ для анализа одномерных решеток со случайными параметрами. В рамках МОМР-РВСГ это означает, что ОМР ЭИ решетки является матрицей случайных чисел или случайной матрицей. Целью данной работы является развитие результатов, полученных в работе [1] для случая бесконечной двумерной решетки.

В разд. 2 данной работы мы изложим основные положения и уравнения МОМР и МКИ, полученные в работах [4,6] для двумерной бесконечной решетки. Далее в разд. 3 будут записаны уравнения МОМР-МКИ для непериодической решетки, составленной из ЭИ с разными параметрами. Мы решим их в линейном приближении, предполагая, что отклонения случайных параметров от средних значений достаточно малы. В разд. 4 на основании полученного решения будут определены дисперсии амплитуд отраженных от входов ЭИ волн в режиме квазипериодического возбуждения решетки.

1. Основные положения МОМР-МКИ.

Основные положения МОМР. В данном разделе мы приведем основные понятия и соотношения МОМР, необходимые нам для решения поставленных задач. Положение ЭИ в решетке обычно описывают при помощи двух индексов. В ряде случаев мы будем использовать такую нумерацию, однако, на этапе

вывода общих соотношений метода для сокращения записи удобнее ввести один векторный индекс ν :

$$\mathbf{v} = (v_x, v_y), \quad (1)$$

где индекс v_x задает положение ЭИ по оси $0x$, а v_y по оси $0y$. Решетка имеет периоды $P_{x,y}$ соответственно по осям декартовых координат $0x$ и $0y$. Также используем один векторный индекс \mathbf{N} для определения типа ВСГ вместо двух обычно используемых индексов:

$$\mathbf{N} = (n, m),$$

здесь n – угломестный индекс ВСГ, а m – азимутальный индекс.

Введем по аналогии с работой [4] векторы $\vec{\mathbf{E}}_{i,sv}$, $\vec{\mathbf{H}}_{i,sv}$, $\mathbf{A}_{i,sv}$. Векторы $\vec{\mathbf{E}}_{i,sv}$, $\vec{\mathbf{H}}_{i,sv}$ формируются из векторов электрического и магнитного полей возбуждающих и рассеянных ВСГ (нижние индексы i, s), а векторы $\mathbf{A}_{i,sv}$ состоят из амплитуд указанных ВСГ. Важно отметить, что поля ВСГ задаются в локальных системах координат, связанных с ЭИ с номером ν . Явные выражения для полей ВСГ можно найти в [5].

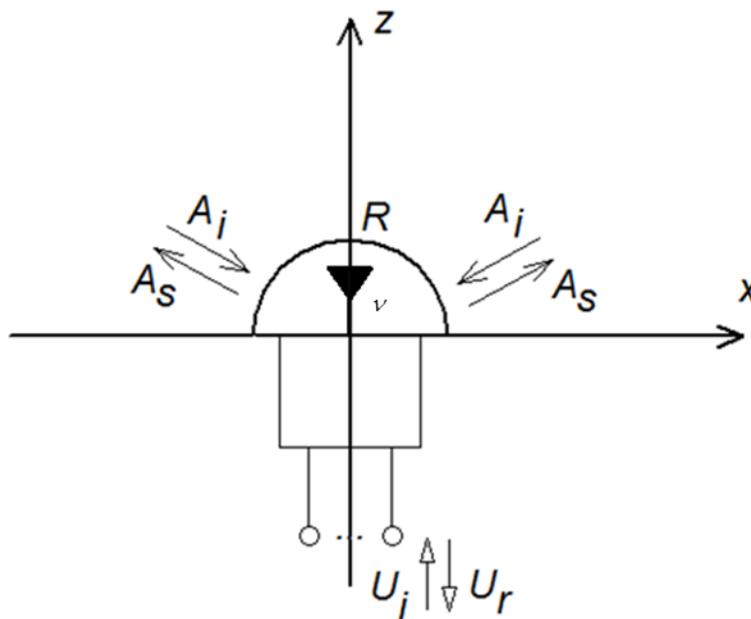


Рис. 1. Определение возбуждающих и рассеянных волн.

Каждый ЭИ окружен полусферой с электрическим радиусом R (рис. 1). Важно, что полусферы соседних ЭИ не имеют точек пересечения. Источником

возбуждающих волн для μ -ого ЭИ являются волны рассеянные всеми элементами решетки за исключением μ -ого. Источником рассеянных волн этого излучателя является дифракция возбуждающих волн на нем, а также падающие волны на его входы. Мы предполагаем, что таких входов может быть не один, а несколько. Объединяя амплитуды падающих волн $U_{i\mu,j}$, где j – номер входа, мы получаем вектор падающих волн μ -ого ЭИ – $U_{i\mu}$. Аналогично можно получить вектор отраженных волн $U_{r\mu}$.

Отметим, что при отсутствии пересечений сфер, окружающих ЭИ, они оказываются расположенными вне областей, занятых источниками, что позволяет нам представить поля на них в виде разложений по ВСГ:

$$\begin{aligned} (\vec{E}_v, \vec{H}_v) &= (\vec{E}_{iv}, \vec{H}_{iv}) + (\vec{E}_{sv}, \vec{H}_{sv}), \\ (\vec{E}_{i,sv}, \vec{H}_{i,sv}) &= \mathbf{A}_{i,sv} (\vec{E}_{i,sv}, \vec{H}_{i,sv}), \end{aligned} \quad (2)$$

Нам необходимо различать вектора в пространстве ВСГ, а также вектора отраженных/падающих волн от векторов заданных в физическом пространстве. Для обозначения векторов первых типов используем символы вида \mathbf{A} , а для обозначения векторов физического пространства используем стрелки \rightarrow . В этом случае символ \vec{E} обозначает вектор в пространстве ВСГ, элементами которого являются вектора из физического пространства, символ \mathbf{A} описывает вектор из пространства ВСГ, элементами которого являются скалярные величины. Произведение вида $\mathbf{A}\vec{E}$ – это скалярное произведение в пространстве ВСГ, результатом которого является вектор из физического пространства.

Следующий этап МОМР – определение связи между амплитудами рассеянных ν -ым ЭИ волн и амплитудами волн, падающих на μ -ый ЭИ. Для определения указанной связи нам необходимо осуществить разложение поля рассеянной волны ν -ого ЭИ в системе координат μ -ого ЭИ. Вне зависимости от способа решения этой задачи мы приходим к следующему соотношению:

$$\mathbf{A}_{i\mu} = \mathbf{K}_{\mu,\nu} \mathbf{A}_{sv}, \quad (3)$$

Матрицы \mathbf{K} описывают искомую связь между амплитудами рассеянных на \mathbf{v} -ом и возбуждающих на $\boldsymbol{\mu}$ -ом элементах волн. Назовем их матрицами связи.

Далее нам необходимо ввести оператор рассеяния ЭИ. Этот оператор связывает амплитуды возбуждающих и рассеянных волн ЭИ. Отметим, что наряду с ВСГ он может возбуждаться волноводными волнами со стороны своих портов. Оператор рассеяния находится в результате решения электродинамической граничной задачи. Будем полагать, что оно известно и может быть записано в следующей форме:

$$\mathbf{A}_{s\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{L}_{ss\boldsymbol{\mu}} \mathbf{A}_{i\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{L}_{sw\boldsymbol{\mu}} \mathbf{U}_{i\boldsymbol{\mu}}, \quad (4)$$

$$\mathbf{U}_{r\boldsymbol{\mu}} = \mathbf{L}_{ws\boldsymbol{\mu}} \mathbf{A}_{i\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{L}_{ww\boldsymbol{\mu}} \mathbf{U}_{i\boldsymbol{\mu}},$$

где \mathbf{L} – искомые операторы рассеяния. Для однородной решетки с одинаковыми ЭИ все операторы рассеяния также идентичны. Поэтому для них индекс $\boldsymbol{\mu}$ можно опустить.

Суммируя в выражении (3) по всем ЭИ, кроме $\boldsymbol{\mu}$ -ого и подставляя в него соотношения (4), получаем основные уравнения МОМР:

$$\mathbf{A}_{s\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\mathbf{v}}^{(\boldsymbol{\mu})} \mathbf{L}_{ss} \mathbf{K}_{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}} \mathbf{A}_{s\mathbf{v}} + \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\boldsymbol{\mu}}, \quad (5)$$

$$\mathbf{U}_{r\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\mathbf{v}}^{(\boldsymbol{\mu})} \mathbf{L}_{ws} \mathbf{K}_{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}} \mathbf{A}_{s\mathbf{v}} + \mathbf{L}_{ww} \mathbf{U}_{i\boldsymbol{\mu}}. \quad (6)$$

Верхний символ $(\boldsymbol{\mu})$ означает суммирование по всем ЭИ кроме $\boldsymbol{\mu}$ -ого. Наибольший интерес представляет записанная в матричной форме система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (5), которая описывает взаимодействие ЭИ через свободное пространство.

Основные положения МКИ. Определим компенсирующий источник (КИ) следующим образом. Он ассоциирован с некоторым ЭИ с индексом $\boldsymbol{\xi}$ и создает рассеянные волны с амплитудным вектором $\mathbf{V}_{\boldsymbol{\xi}}$. Тогда уравнение (5) при наличии КИ приобретает новый вид:

$$\mathbf{A}_{s\boldsymbol{\mu}} = \sum_{\mathbf{v}}^{(\boldsymbol{\mu})} \mathbf{W}_{\boldsymbol{\mu},\mathbf{v}} \mathbf{A}_{s\mathbf{v}} + \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\boldsymbol{\mu}} + \mathbf{V}_{\boldsymbol{\xi}} \delta_{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\xi}}, \quad (7)$$

$$\mathbf{W}_{\mu,\nu} = \mathbf{L}_{ss} \mathbf{K}_{\mu,\nu},$$

где $\delta_{\mu,\xi}$ – символ Кронекера, равный единице при совпадении индексов μ, ξ .

Назовем матрицы $\mathbf{W}_{\mu,\nu}$ матрицами взаимодействий. Отметим, что в силу периодичности решетки матрица взаимодействий зависит только от разности индексов $\mu - \nu$, то есть является матрицей Тейлора.

Определим матрицу взаимодействий при $\mu - \nu = 0$ как нулевую матрицу. Тогда в СЛАУ (7) мы можем распространить суммирование на все элементы решетки. Применим далее к соотношению (7) двумерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ). Предварительно введем функции $\mathbf{a}_{i,s}(\mathbf{k})$, $\omega(\mathbf{k})$, $\mathbf{u}(\mathbf{k})$, являющиеся ДПФ соответственно двумерных последовательностей $\mathbf{A}_{i,s\mu}$, \mathbf{W}_{μ} , $\mathbf{U}_{i\mu}$. Под $\mathbf{k} = (\kappa_x, \kappa_y)$ мы понимаем векторный спектральный параметр, где $\kappa_{x,y}$ – скалярные спектральные параметры двумерного ДПФ. Они изменяются на интервалах $(-\pi/P_{x,y}, \pi/P_{x,y})$.

Теперь мы можем записать результат применения ДПФ к выражению (7) и найти вектор \mathbf{a}_s :

$$\mathbf{a}_s(\mathbf{k}) = (\mathbf{E} - \omega(\mathbf{k}))^{-1} (\mathbf{L}_{sw} \mathbf{u}(\mathbf{k}) + \mathbf{V}_{\xi} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\xi})), \quad (8)$$

$$\mathbf{r}_{\xi} = (\xi_x P_x, \xi_y P_y),$$

здесь \mathbf{r}_{ξ} – радиус-вектор, соединяющий начало координат с центром ξ -го ЭИ.

При помощи обратного ДПФ находим искомого вектора $\mathbf{A}_{s\mu}$:

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \sum_{\nu} \mathbf{G}_{s\mu,\nu} \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\nu} + \mathbf{G}_{s\mu,\xi} \mathbf{V}_{\xi}. \quad (9)$$

$$\mathbf{G}_{s\mu,\xi} = (S/4\pi^2) \int_{\mathbf{k}} (\mathbf{E} - \omega(\mathbf{k}))^{-1} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mu-\xi}) d\mathbf{k}, \quad (10)$$

$$S = P_x P_y.$$

Интеграл по $d\mathbf{k}$ в выражении (10) означает двойной интеграл по переменным κ_x, κ_y на интервалах их определения. Если в решетке присутствует

множество КИ, то в формуле (9) необходимо осуществить суммирование по всем источникам. Назовем функцию своих индексов $\mathbf{G}_{s\mu,\xi}$ функцией Грина бесконечной двумерной решетки для рассеянных волн. Нам будет полезно получить выражение для функции Грина возбуждающих волн $\mathbf{G}_{i\mu,\xi}$, которая связывает вектора $\mathbf{A}_{i\mu}$ с КИ:

$$\mathbf{G}_{i\mu,\xi} = (S/4\pi^2) \int_{\mathbf{k}} \mathbf{Q}(\mathbf{k})(\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}))^{-1} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_{\mu-\xi}) d\mathbf{k}. \quad (11)$$

$$\mathbf{A}_{i\mu} = \sum_{\nu} \mathbf{G}_{i\mu,\nu} \mathbf{L}_{s\nu} \mathbf{U}_{i\nu} + \sum_{\xi} \mathbf{G}_{i\mu,\xi} \mathbf{V}_{\xi}. \quad (12)$$

Приведем полезное соотношение, связывающее функции $\mathbf{G}_{i\mu,\xi}$ и $\mathbf{G}_{s\mu,\xi}$:

$$\mathbf{L}_{ss} \mathbf{G}_{i\mu,\xi} + \mathbf{E} \delta_{\mu,\xi} = \mathbf{G}_{s\mu,\xi}. \quad (13)$$

Режим квазипериодического возбуждения решетки является типовым режимом работы ФАР. В этом режиме вектора $\mathbf{U}_{i\nu}$ имеют вид:

$$\mathbf{U}_{i\nu} = \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\nu}), \quad (14)$$

здесь \mathbf{k}_0 – заданный параметр, определяющий фазовые сдвиги между каналами решетки в квазипериодическом режиме. Отметим, что этот вектор определяет также углы излучения решетки в свободное пространство. Находим ДПФ последовательности векторов $\mathbf{U}_{i\nu} - \mathbf{u}(\mathbf{k})$, применяя формулу суммирования Пуассона [9]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{k}) = 2\pi \mathbf{U}_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) / S, \quad (15)$$

где $\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$ – двумерная дельта функция. Выражения для амплитудных векторов в квазипериодическом режиме имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}_{i,s\mu} = \mathbf{q}_{s0} \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\mu}) + \sum_{\xi} \mathbf{G}_{i,s\mu,\xi} \mathbf{V}_{\xi}, \quad (16)$$

$$\mathbf{q}_{i0} = \mathbf{Q}(\mathbf{k}_0)(\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}_0))^{-1} \mathbf{L}_{s\nu},$$

$$\mathbf{q}_{s0} = (\mathbf{E} - \boldsymbol{\omega}(\mathbf{k}_0))^{-1} \mathbf{L}_{s\nu}.$$

Приведем далее СЛАУ, к которой сводится граничная задача о решетке с дефектами. Под дефектом мы понимаем любой ЭИ, имеющий операторы

рассеяния \mathbf{L}^d , отличающиеся от операторов рассеяния \mathbf{L} регулярной решетки. Соотношения (4) для дефекта имеют вид:

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \mathbf{L}_{ss\mu}^d \mathbf{A}_{i\mu} + \mathbf{L}_{sw\mu}^d \mathbf{U}_{i\mu}, \quad (17)$$

$$\mathbf{U}_{r\mu} = \mathbf{L}_{ws\mu}^d \mathbf{A}_{i\mu} + \mathbf{L}_{ww\mu}^d \mathbf{U}_{i\mu}.$$

Их можно рассматривать в качестве граничных условий для амплитудных векторов на дефекте в регулярной решетке. Нас в большей степени интересует первое уравнение из (17), так как оно позволяет найти вектора $\mathbf{A}_{i,s\mu}$. После их определения при помощи второго соотношения (17) не составляет труда найти вектора $\mathbf{U}_{r\mu}$.

Допустим, что анализируемая неоднородная решетка является по-прежнему однородной, но в ЭИ с дефектами введены КИ. Тогда из уравнений (7) и (17) получаем:

$$\mathbf{V}_{\xi} = (\mathbf{L}_{ss\xi}^d - \mathbf{L}_{ss}) \mathbf{A}_{i\xi} + (\mathbf{L}_{sw\xi}^d - \mathbf{L}_{sw}) \mathbf{U}_{i\xi}. \quad (18)$$

При помощи найденной выше функции Грина мы можем выразить амплитудные вектора $\mathbf{A}_{i\xi}$ через КИ и получить для них искомую СЛАУ, описывающую решетку с дефектами:

$$\mathbf{V}_{\xi} - \Delta\mathbf{L}_{ss\xi} \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{G}_{i\xi,\mathbf{v}} \mathbf{V}_{\mathbf{v}} = \Delta\mathbf{L}_{ss\xi} \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{G}_{i\xi,\mathbf{v}} \mathbf{L}_{sw} \mathbf{U}_{i\mathbf{v}} + \Delta\mathbf{L}_{sw\xi} \mathbf{U}_{i\xi}. \quad (19)$$

$$\Delta\mathbf{L}_{ss\xi} = \mathbf{L}_{ss\xi}^d - \mathbf{L}_{ss}, \quad \Delta\mathbf{L}_{sw\xi} = \mathbf{L}_{sw\xi}^d - \mathbf{L}_{sw}.$$

В правой части (19) находятся известные величины. В квазипериодическом режиме уравнение (19) имеет следующий вид:

$$\mathbf{V}_{\xi} - \Delta\mathbf{L}_{ss\xi} \sum_{\mathbf{v}} \mathbf{G}_{i\xi,\mathbf{v}} \mathbf{V}_{\mathbf{v}} = (\Delta\mathbf{L}_{ss\xi} \mathbf{q}_{i0} + \Delta\mathbf{L}_{sw\xi}) \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_{\xi}). \quad (20)$$

2. Анализ решетки со случайными параметрами.

Рассмотрим далее непериодическую решетку. Пусть причина непериодичности связана с тем, что некоторый параметр x разный у разных ЭИ. Таким образом, мы можем говорить о множестве значений параметра x_μ . Представим x_μ следующим образом:

$$x_\mu = x + \Delta x_\mu,$$

где x – некоторое номинальное среднее значение параметра, а Δx_μ – его отклонение, которое как мы предполагаем, является малой величиной.

Отклонение параметра x_μ от номинала приводит к изменениям операторов рассеяния (4):

$$\mathbf{L}_\mu^d = \mathbf{L} + \Delta x_\mu \mathbf{L}', \quad (21)$$

где \mathbf{L}' – производная оператора \mathbf{L} в точке $x_\mu = x$. Мы предполагаем, что соотношения вида (21) могут быть записаны для всех четырех типов операторов (4).

Нетрудно видеть, что выражение (21) является разложением оператора \mathbf{L}_μ в ряд Тейлора, в котором удержаны только линейные слагаемые. Отклонение Δx_μ должно быть достаточно малым, чтобы приближенное равенство (21) выполнялось с приемлемой точностью.

В соответствии с МКИ каждый ЭИ, отличающийся от номинального является дефектом решетки, который мы описываем при помощи КИ \mathbf{V}_ξ . С учетом (21) и (18) получаем:

$$\mathbf{V}_\xi = \Delta x_\xi (\mathbf{L}'_{ss} \mathbf{A}_{i\xi} + \mathbf{L}'_{sw} \mathbf{U}_{i\xi}). \quad (22)$$

С точностью до слагаемых пропорциональных первой степени малых параметров Δx_ξ нам достаточно найти вектора $\mathbf{A}_{i\xi}$ в нулевом приближении, то есть для периодической решетки с номинальными параметрами. Сделаем это для

наиболее интересного режима квазипериодического возбуждения, воспользовавшись соотношением (16):

$$\mathbf{A}_{i\xi} = \mathbf{q}_{i0} \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_\xi). \quad (23)$$

В формуле (16) мы приняли во внимание только первое слагаемое, имеющее нулевой порядок малости. Подставим далее выражение (23) в (22):

$$\mathbf{V}_\xi = \Delta x_\xi (\mathbf{L}'_{ss} \mathbf{q}_{i0} + \mathbf{L}'_{sw}) \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_\xi). \quad (24)$$

Соотношение (24) теперь представляет КИ через известные параметры решетки. Амплитуды рассеянных волн в нулевом приближении имеют следующий вид:

$$\mathbf{A}_{s\mu} = \mathbf{q}_{s0} \mathbf{U}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_\mu). \quad (25)$$

Добавка к ним $\Delta \mathbf{A}_{s\mu}$, обусловленная отклонениями параметра Δx_μ находится при помощи функции Грина (10):

$$\Delta \mathbf{A}_{s\mu} = \sum_{\xi} \Delta x_\xi \mathbf{G}_{s\mu,\xi} \mathbf{v}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_\xi), \quad (26)$$

$$\mathbf{v}_0 = (\mathbf{L}'_{ss} \mathbf{q}_{i0} + \mathbf{L}'_{sw}) \mathbf{U}_0.$$

Добавка к амплитудам возбуждающих волн $\Delta \mathbf{A}_{i\mu}$ находится аналогично (26) при помощи соотношения (11):

$$\Delta \mathbf{A}_{i\mu} = \sum_{\xi} \Delta x_\xi \mathbf{G}_{i\mu,\xi} \mathbf{v}_0 \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_\xi). \quad (27)$$

Соотношения (26), (27) дают в первом приближении решение граничной задачи для непериодической бесконечной решетки. Далее будем считать параметр Δx случайной величиной с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ_x . Соотношения (26), (27) являются базовыми для вывода интересующих нас статистических оценок характеристик решетки.

3. Дисперсия отраженных от входов решетки волн.

Найдем теперь поправки к амплитудам отраженных от входов ЭИ волн $\Delta U_{r\mu}$. Для этого воспользуемся соотношением (6):

$$\Delta U_{r\mu} = \sum_v^{(\mu)} \left(\mathbf{L}_{ws} \mathbf{K}_{\mu,v} \Delta \mathbf{A}_{sv} + \Delta x_\mu \mathbf{L}'_{ws} \mathbf{K}_{\mu,v} \mathbf{A}_{sv} \right) + \Delta x_\mu \mathbf{L}'_{ww} \mathbf{U}_{i\mu}. \quad (28)$$

В квазипериодическом режиме мы можем воспользоваться соотношениями (30), (31):

$$\Delta U_{r\mu} = \sum_\xi \Delta x_\xi \left(\mathbf{L}_{ws} \mathbf{G}_{i\mu,\xi} \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0 \delta_{\mu,\xi} \right) \exp(-i\mathbf{k}_0 \mathbf{r}_\xi). \quad (29)$$

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{L}'_{ws} \mathbf{q}_{i0} + \mathbf{L}'_{ww},$$

где $\delta_{\mu,\xi}$ – символ Кронекера.

Выражение (29) описывает добавки к амплитудам отраженных от входов ЭИ волн, которые обусловлены отклонениями параметра x от своего номинального значения.

Найдем далее усредненные значения величин $|\Delta U_{r\mu}|^2$, которые равны $\sigma_{u\mu}^2$, где $\sigma_{u\mu}$ – дисперсия модуля случайной составляющей амплитуды отраженной волны. При этом будем исходить из того, что случайные параметры Δx_ξ статистически независимы и имеют одинаковые значения дисперсии.

С учетом этих допущений получаем:

$$\sigma_{u\mu}^2 = \sigma_x^2 \sum_\xi \left| \mathbf{L}_{ws} \mathbf{G}_{i\mu,\xi} \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0 \delta_{\mu,\xi} \right|^2. \quad (30)$$

Для вычисления ряда в формуле (30) воспользуемся выражением (11) и также учтем, что

$$\delta_{\mu,\xi} = \frac{S}{4\pi^2} \int_{\mathbf{k}} \exp(-i\mathbf{k} \mathbf{r}_{\mu-\xi}) d\mathbf{k}. \quad (31)$$

В результате получаем:

$$\sigma_u^2 = \frac{\sigma_x^2 S}{4\pi^2} \int_{\mathbf{k}} \left| \mathbf{L}_{ws} \mathbf{Q}(\mathbf{k}) \mathbf{d}(\mathbf{k}) \mathbf{v}_0 + \mathbf{w}_0 \right|^2 d\mathbf{k}, \quad (32)$$

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = (\mathbf{E} - \omega(\mathbf{k}))^{-1}.$$

Как видно из выражения (32) дисперсия отраженной волны не зависит от номера ЭИ μ . Поэтому соответствующий индекс в обозначении дисперсии опущен.

Соотношение (32) описывает интересующую нас дисперсию случайной составляющей отраженной волны. Важно отметить, что статистически, то есть в рамках усредненных параметров решетка осталась однородной также как исходная структура с номинальными значениями параметров. Данный результат не означает, что однородной будет каждая конкретная реализация решетки, которая должна состоять из неодинаковых ЭИ.

Если ЭИ имеет несколько независимых случайных параметров, то в рамках линейного приближения необходимо суммировать квадраты дисперсий σ_{ii}^2 , где i – номер параметра. При этом все они находятся при помощи выражения (32).

4. Некогерентное поле излучения и его статистические характеристики.

Соотношение (31), которое описывает приращения амплитуд рассеянных волн, является основой для определения статистических параметров поля излучения. Случайное нарушение периодичности решетки приводит к появлению в пространстве случайного некогерентного поля. Наша задача состоит в том, чтобы выразить его через отклонения параметра Δx_ξ и найти дисперсию его вектора Пойнтинга.

Исходными для последующего анализа соотношения являются формулы связывающие приращения электрического и магнитного полей $\Delta \vec{E}$ и $\Delta \vec{H}$ через приращения амплитуд (26):

$$\Delta \vec{E} = \sum_{\mu} \Delta \mathbf{A}_{s\mu} \vec{\mathbf{E}}_{s\mu}, \quad (33)$$

$$\Delta \vec{H} = \sum_{\mu} \Delta \mathbf{A}_{s\mu} \vec{\mathbf{H}}_{s\mu},$$

вектора $\vec{\mathbf{E}}_{s\mu}$, $\vec{\mathbf{H}}_{s\mu}$ введены выше (см. формулу (2)).

Для дальнейшего анализа нам удобно воспользоваться представлением ВСГ в виде двойных интегралов Фурье:

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathbf{E}}_{s\mu} \\ \vec{\mathbf{H}}_{s\mu} \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{e}}_s \\ \vec{\mathbf{h}}_s \end{bmatrix} \exp(-i\kappa_1(x - \mu_x P_x) - i\kappa_2(y - \mu_y P_y) - iqz) d\kappa_1 d\kappa_2, \quad (34)$$

$$q = \sqrt{k^2 - \kappa_1^2 - \kappa_2^2}.$$

Функции $\vec{\mathbf{e}}_s, \vec{\mathbf{h}}_s$ известны [15] и выражаются весьма громоздким образом.

Поэтому мы их не приводим в явном виде.

Нам также будет полезны соотношения (10), (32) представляющие функцию Грина в виде интеграла Фурье. Подставим их и выражение (34) в формулы (38). После подстановки осуществим суммирование по индексам $\mu_{x,y}$ при помощи формулы Пуассона [5], которая сводит сумму экспонент к сумме дельта-функций. Используя свойство дельта-функции берем интегралы по $\kappa_{1,2}$.

В результате получаем:

$$\Delta \vec{\mathbf{E}} = \sum_{\xi} \Delta x_{\xi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\pi/P}^{\pi/P} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \vec{\mathbf{e}}_s(\kappa_{1n}, \kappa_2) \exp(-i(\xi P(\kappa_0 - \alpha) + \kappa_{1n}x + \kappa_2y + q_n z)) d\alpha d\kappa_2, \quad (35)$$

$$\kappa_{1n} = \alpha + 2\pi n / P,$$

$$q_n = \sqrt{k^2 - \kappa_{1n}^2 - \kappa_2^2}.$$

Соотношение (40) описывает полное поле, создаваемое решеткой. Нас интересует только его часть – поле излучения, которое переносит энергию на бесконечность. Используем данное обстоятельство для преобразования соотношения (35). Соотношение (35) является разложением поля по гармоникам Флоке. Номер гармоники совпадает с индексом суммирования в выражении (35) n . В типовом случае только небольшая часть гармоник является распространяющимися. Ограничимся анализом ситуации, в которой распространяется только одна гармоника Флоке с нулевым номером. Отметим, что при произвольном угле сканирования этому ограничению удовлетворяет решетка с периодом меньшим половины длины волны в свободном пространстве.

Таким образом, мы можем избавиться от ряда в соотношении (35), оставив только нулевой его член.

$$\Delta \vec{E} = \sum_{\xi} \Delta x_{\xi} \int_{-k}^k \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \vec{e}_s(\alpha, \kappa_2) \exp(-i(\xi P(\kappa_0 - \alpha) + \alpha x + \kappa_2 y + q_0 z)) d\alpha d\kappa_2. \quad (36)$$

Дальнейшие преобразования связаны с интегралом по переменной κ_2 . Как следует из соотношения (36) он описывает зависимость поля от координат y, z . Найдем его приближенное выражения в дальней зоне. Для этого введем полярные координаты:

$$\begin{aligned} y &= \rho \sin \varphi, \\ z &= \rho \cos \varphi. \end{aligned} \quad (37)$$

Здесь угол φ отсчитывается от оси Oz . Его не следует путать с углом в сферической системе координат. Радиус ρ задает расстояние от оси Ox до точки наблюдения.

Введем также новую переменную интегрирования:

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= k_e \sin \psi, \\ q_0 &= k_e \cos \psi, \\ k_e &= \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \sum_{\xi} \Delta x_{\xi} \int_{-k}^k \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \vec{e}_s(\alpha, \kappa_2) \\ &\exp(-i(\xi P(\kappa_0 - \alpha) + \alpha x + k_e \rho \cos(\psi - \varphi))) k_e \cos \psi d\alpha d\psi. \end{aligned} \quad (39)$$

В формуле (36) мы изменили пределы интегрирования по переменной α . Данное изменение обусловлено тем, что параметр k_e является действительной величиной при $|\alpha| < k$. При мнимых значениях k_e соотношение (39) описывает затухающие на бесконечности поля. Вычислим далее интеграл (39) при условии $k_e \rho \gg 1$ при помощи метода перевала [14]:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{E} &= \sum_{\xi} \Delta x_{\xi} \int_{-k}^k \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \vec{e}_s(\alpha, \lambda) \exp(-i(\xi P(\kappa_0 - \alpha) + \alpha x + k_e \rho) \cos \varphi) \sqrt{\frac{2\pi k_e}{\rho}} d\alpha. \\ \lambda(\varphi) &= k_e \sin \varphi. \end{aligned} \quad (40)$$

Аналогичное выражение можно без труда получить для вектора магнитного поля, заменяя $\vec{e}_s(\alpha, \lambda)$ на $\vec{h}_s(\alpha, \lambda)$. Найдем продольную компоненту вектора Пойнтинга Π_ρ :

$$\Pi_\rho = \frac{1}{2} [\vec{E} \vec{H}^*]_\rho. \quad (41)$$

Будем искать усредненное по реализациям значение вектора Пойнтинга. Тогда с учетом отсутствия корреляции между отклонениями Δx_ξ получаем:

$$\bar{\Pi}_\rho = \frac{\sigma_x^2}{2} \sum_\xi \int_{-k}^k \int_{-k}^k [\vec{R}_e(\alpha) \vec{R}_h^*(\beta)]_\rho \exp(-i(\xi P(\beta - \alpha))) d\alpha d\beta, \quad (42)$$

$$\vec{R}_{e,h}(\alpha) = \mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \begin{bmatrix} \vec{e}_s(\alpha, \lambda) \\ \vec{h}_s(\alpha, \lambda) \end{bmatrix} \exp(-i(\alpha x + k_e \rho)) \cos \varphi \sqrt{\frac{2\pi k_e}{\rho}}.$$

Сумма по ξ вычисляется при помощи упомянутой выше формулы Пуассона, которая также позволяет взять интеграл по β , используя свойство дельта функции $\delta(\beta - \alpha)$:

$$\Pi_\rho = \frac{2\pi^2 \sigma_x^2 \cos^2 \varphi}{P\rho} \int_{-k}^k k_e^2 \left[(\mathbf{d}(\alpha) \mathbf{v}_0 \vec{e}_s(\alpha, \lambda)) (\mathbf{d}^*(\alpha) \mathbf{v}_0^* \vec{h}_s^*(\alpha, \lambda)) \right]_\rho d\alpha. \quad (43)$$

Формула (48) описывает пространственное распределение дисперсии энергетического потока мощности некогерентного поля. Как можно увидеть, дисперсия вектора Пойнтинга не зависит от координаты x , но она изменяется в плоскости YOZ. Энергетическая диаграмма направленности некогерентного поля может быть получена из (43).

Заключение

Представленные в данной работе результаты теоретического исследования позволяют с минимальными затратами вычислительных ресурсов находить статистические параметры антенных решеток, такие как дисперсия амплитуд отраженных от входов решетки волн и дисперсия некогерентного поля излучения. Отметим, что на сегодняшний день альтернативой развитому в работе методу является метод статистических испытаний, связанный с

многократным электродинамическим анализом случайных реализаций решеток больших электрических размеров. По результатам таких испытаний затем находятся указанные выше дисперсии. Нетрудно увидеть, что такой подход требует использования чрезвычайно больших вычислительных ресурсов, поскольку достоверное определение дисперсии требует проведения нескольких сотен испытаний. С этой точки зрения теоретические методы определения статистических характеристик имеют явное преимущество и их развитие поэтому является актуальной научной проблемой.

Финансирование: Государственное задание ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН.

Литература

1. Гупта К., Гардж Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ устройств. М.: Радио и связь. 1987.
2. Воскресенский Д. И., Котов Ю. В., Овчинникова Е. В. Широкополосные волноводные излучатели фазированных антенных решеток с вращающейся поляризацией // Антенны. – 2005. – №. 11(102). – С. 7.
3. Шифрин Я.С. Вопросы статистической теории антенн. М.: Сов. Радио. 1970.
4. Инденбом М.В. Антенные решетки подвижных обзорных РЛС. Теория, расчет, конструкции. М.: Радиотехника. 2015.
5. Амитей Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. М.: Мир. 1974.
6. Mailoux R.J. Phased array antennas handbook. Artech House. NY. 2005.
7. Банков С.Е., Курушин А.А., Гутцайт Э.М. Решение оптических и СВЧ задач с помощью HFSS. М.: Оркада, 2012. 240 С.
8. Банков С.Е., Курушин А.А. Электродинамика для пользователей САПР СВЧ. М.: Солон-Пресс. 2018.
9. Банков С.Е. Метод компенсирующих источников для анализа неоднородных периодических излучающих решеток. // РЭ. – 2020. – Т. 65. – №2. – С.118-127.

10. Банков С.Е. Математическое моделирование PBG фотонных кристаллов с дефектами методом компенсирующих источников. // РЭ. – 2005. – Т. 50. – № 9. – С. 23-30.
11. Xiao G. B., Mao J. F. and Yuan B. Generalized transition matrix for arbitrarily shaped scatterers or scatterer groups. // IEEE Trans. – 2008. V. AP-56. – no. 12. – P. 3723.
12. Xiang S., Xiao G., Tian X. and Mao J. Analysis of large-scale phased antenna array with generalized transition matrix. // IEEE Trans. – 2013. – V. AP-61. – no. 11. – P. 5453.
13. Банков С.Е. Анализ щелевых и ленточных решеток методом обобщенной матрицы рассеяния. // РЭ. – 2020. – Т. 65. – № 1. – С. 31-48.
14. Марков Г.Т., Чаплин А.Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь. 1983.
15. Стрэттон Дж. А. Теория электромагнетизма. М.: ГИТТЛ, 1948.

Для цитирования:

Банков С.Е. Электродинамический анализ бесконечной двумерной антенной решетки со случайными параметрами // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – №12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.12.19>