

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.12.25>

УДК: 621.396; 519.21

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРЕДЕЛА ШЕННОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСОБЫХ СВОЙСТВ ПРИКЛАДНОЙ СИСТЕМЫ

Ю. М. Вешкурцев¹, Д.А. Титов²

¹Институт радиоэлектроники, сервиса и диагностики,
644077, Омск, проспект Мира, 57

²Омский государственный технический университет,
644050, Омск, проспект Мира, 11

Статья поступила в редакцию 29 сентября 2023 г.

Аннотация. Цель работы заключается в сохранении фундаментальности предела и ограничений в математической теории связи Шеннона и поиске компромиссного решения для изменения границы отношения сигнал/шум, при котором вероятность ошибок минимальна, за счет использования особых свойств прикладной системы, т.е. модулятора и демодулятора. При этом «идеальность» прикладной системы по определению Шеннона сохранена и дополнена особыми свойствами, полученными в наше время, от применения характеристической функции Ляпунова и действия открытого в конце 20 века эффекта стохастического резонанса. Рассмотрены прикладная система 1 и прикладная система 2 с использованием результатов проведенных ранее исследований и выявлены особые свойства систем. Прикладные системы адаптированы к демодуляторам сигналов с изменяющейся характеристической функцией Ляпунова. Рассчитана новая граница фундаментального предела Шеннона. С учетом свойств системы предложено предел Шеннона скорректировать до значения $-17,7$ дБ при передаче сообщений с малой вероятностью ошибок.

Ключевые слова: стохастический резонанс, характеристическая функция Ляпунова, цифровой фильтр, помехоустойчивость цифрового фильтра, квазидетерминированный сигнал.

Автор для переписки: Титов Дмитрий Анатольевич, dtitov2@yandex.ru

Введение

Ограничения и пределы, полученные Шенноном в математической теории связи (1950 г.), используются в настоящее время. Результаты современной теории цифровых систем сравнивают с фундаментальными границами Шеннона на полосу пропускания канала связи, с допустимой скоростью передачи данных по каналу связи, с фундаментальным отношением сигнал/шум на входе прикладной системы, при котором вероятность ошибок минимальна, и ищут компромиссы при их расхождении.

В работах [1, 2, 3] К. Шеннона при определении пределов в отношении сигнал/шум прикладная система считается идеальной в том смысле, что без каких-либо ошибок выполняет прямое преобразование (модуляцию) сигнала и обратное преобразование (демодуляцию) сигнала. Другими словами, можно говорить, что «идеальная» прикладная система Шеннона – это система, обеспечивающая высокую спектральную эффективность и высокую помехоустойчивость. В своей теории Шеннон не связывал кодирование с применением каких-либо специальных кодов, а рассматривал его как преобразование в двоичной системе счисления номера сообщения в значения координат сигнальной точки сигнала, который будет передан по каналу связи. В наше время, когда речь идет о применении специальных кодов, отличных от двоичного кода, в прикладную систему добавляют сколь угодно сложные устройства типа кодер и декодер. Такие устройства Шеннон в прикладную систему не включал. В работах Шеннона не рассматривались важные для практики вопросы обработки принятых сигналов при их демодуляции. В работе [4] показано, что дополнительные компоненты – кодер и декодер прикладной системы самостоятельно сдвигают фундаментальный предел Шеннона, равный $E_b / N_0 = 10 \times \lg(\ln 2) = -1,59$ дБ, в сторону малых отношений сигнал/шум, при которых вероятность ошибок сохраняется малой (в данном случае E_b – энергия бита, N_0 – спектральная плотность мощности шума). Например, известно [4], что турбо-коды сдвигают фундаментальный предел Шеннона до границы $-11,59$ дБ, при которой ошибки ещё минимальны.

Используя такую возможность управления границами, определим пределы Шеннона с учетом особых свойств прикладной системы, открытых впервые при изучении новых методов модуляции и демодуляции вероятностных характеристик сигналов [5]. Применение характеристической функции Ляпунова и появление интересных эффектов при демодуляции сигналов с новой модуляцией при наличии шума, например, так называемого стохастического резонанса или по-другому стохастической фильтрации [6, 7], наделяют прикладную систему не только идеальными, но и другими особыми свойствами. О конкретной такой прикладной системе написано в работах [5, 8-10], материалы публикации которых будут использованы далее для представления особых свойств демодулятора сигналов с модуляцией характеристической функции Ляпунова.

1. Описание прикладной системы

Рассмотрим прикладную систему, общий вид которой представлен на рис. 1. На данном рисунке: АЦП – аналого-цифровой преобразователь; ФП1 – функциональный преобразователь 1; СНС – сумматор, накапливающий со стиранием; Д – делитель на постоянный коэффициент R ; ФП2 – функциональный преобразователь 2; БУ – блок управления.

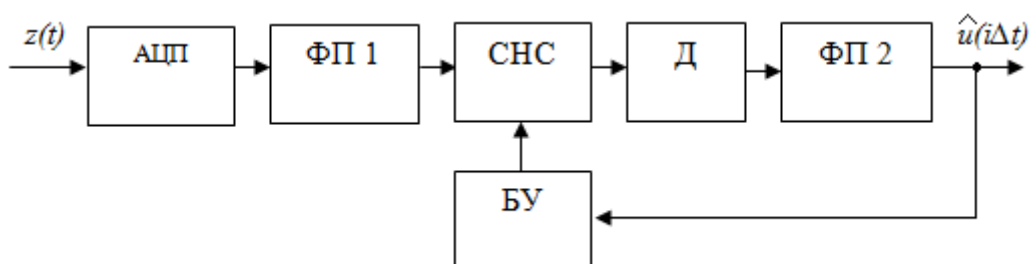


Рис. 1. Общий вид прикладной системы.

Для удобства описания системы введем новые термины. Если ФП1 использует функцию синус, а ФП2 – функцию арксинус, то устройство на рис. 1 будем называть прикладной системой 1. Если ФП1 использует функцию косинус, а ФП2 – функцию арккосинус, то устройство на рис. 1 будем называть

прикладной системой 2. Особые свойства прикладных систем частично изучены и опубликованы [5, 8-10], однако вопрос на этом не закрыт.

Воспользуемся результатами работ [5, 8-10] и представим характеристику новых свойств прикладной системы 1. Пусть на входе прикладной системы 1 действует аддитивная смесь:

$$z(t) = u_1(t) + n(t), \quad (1)$$

$$u_1(t) = e_0 + U_0 \sin(\omega t + \eta), \quad (2)$$

где $u_1(t)$ – нецентрированный квазидетерминированный сигнал с законом распределения арксинус; e_0 – математическое ожидание сигнала; U_0 , ω – амплитуда и круговая частота сигнала (постоянные величины); η – начальный угол сдвига фазы сигнала (случайная величина с равномерным законом распределения на интервале $-\pi \dots +\pi$); $n(t)$ – гауссов «белый» шум с математическим ожиданием по определению равным нулю. Если у сигнала (2) математическое ожидание равно нулю, то его следует называть центрированный квазидетерминированный сигнал.

Для дальнейшей характеристики особых свойств прикладной системы введем некоторые обозначения и определения. Используем отношение сигнал/шум, которое рассчитывается по формуле:

$$h^2 = m_2 / \sigma_{\text{ш}}^2 \text{ или } h^2 = \sigma_c^2 / \sigma_{\text{ш}}^2, \quad (3)$$

причем $h_{\text{вх}}$, $h_{\text{вых}}$ надо понимать как отношение сигнал/шум на входе и на выходе системы, где m_2 , σ_c^2 , $\sigma_{\text{ш}}^2$ – энергия сигнала (1), центрированного квазидетерминированного сигнала и «белого» шума соответственно.

Построим банк определений.

1) Фильтр в пространстве вероятностей – прикладная система с наличием особых свойств фильтрации в пространстве вероятностей мгновенных значений аддитивной смеси сигнала и шума за счет характеристической функции Ляпунова и явления стохастического резонанса, наблюдаемого в так называемом «полусе затухания» при вполне определенном значении меньше единицы отношения сигнал/шум на входе фильтра.

2) Стохастический резонанс – явление в прикладной системе, вызывающее усиление периодического сигнала за счет энергии шума.

3) Полюс затухания – отношение сигнал/шум на входе прикладной системы, при котором имеет место явление стохастического резонанса и энергия шума в аддитивной смеси тратится на усиление периодического сигнала.

4) Полюс бесконечно малой ошибки – значение вероятности ошибки при демодуляции квазидетерминированного сигнала с модулированной характеристической функцией Ляпунова при наличии «белого» шума, соотношение мощностей между которыми в аддитивной смеси определяет полюс затухания.

Ранее на основании аналитического исследования и полученных формул в работе [7] сделан вывод, что «настройку на «стохастический резонанс» можно проводить путем изменения интенсивности (энергии) шума [7, С. 46]». Эту гипотезу проверили авторы работы [8]. Они установили, что явление резонанса отчетливо наблюдается на выходе «фильтра, построенного в пространстве вероятностей», за счет изменения интенсивности шума при вариации отношения сигнал/шум на входе. С целью уточнения сделанных выше определений повторим в графическом виде из работы [9] главные результаты моделирования фильтра. Кривые на рис. 2 отображают стохастический резонанс в системе при разной энергии центрированного квазидетерминированного сигнала на входе фильтра. На рис. 2 кривая 1 соответствует значению $\sigma_c^2 = 0,045$, кривая 2 – значению $\sigma_c^2 = 0,08$, кривая 3 – значению $\sigma_c^2 = 0,18$.

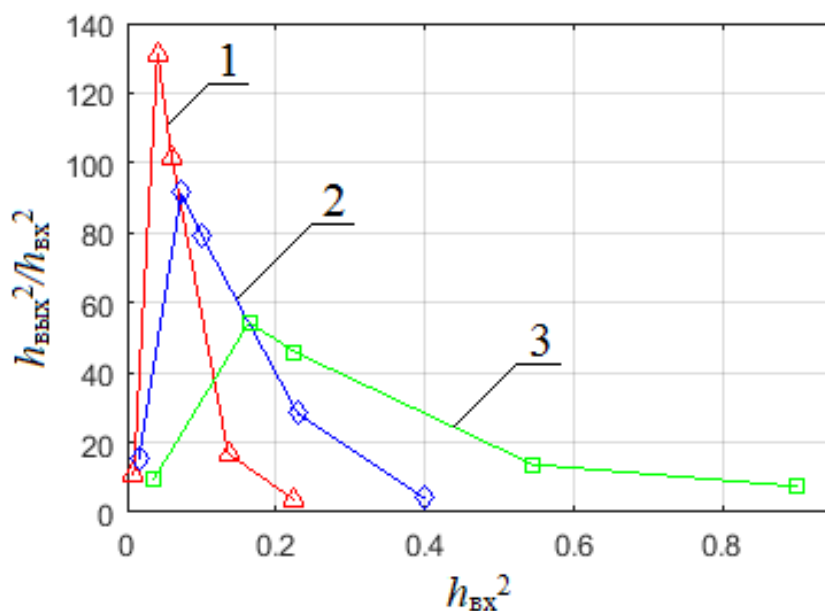


Рис. 2. Стохастический резонанс в цифровом фильтре.

Данные для построения кривых 1-3 табулированы в работе [9]. В дальнейшем координаты данных кривых потребуются нам для анализа.

2. Доказательство утверждения

Утверждение 1. Прикладная система 1 в процессе преобразования аддитивной смеси (1) максимально затрачивает энергию шума на усиление квазидетерминированного сигнала и в результате этого повышает отношение сигнал/шум на выходе системы по сравнению с его начальным значением меньше единицы на входе.

Доказательство утверждения 1 и проверка его с помощью моделирования прикладной системы 1 содержатся в работах [5, 9], в которых использовано сделанное выше определение фильтра в пространстве вероятностей. Повторим из монографии [8] уравнение фильтрации:

$$B_u(V_k) = B_z(V_m) / A_n(V), \quad (4)$$

где $A_n(V)$ – действительная часть характеристической функции шума, $B_u(V_k)$, $B_z(V_m)$ – мнимая часть характеристической функции сигнала и аддитивной смеси (1) соответственно. Здесь и далее индексы z, u, n соответствуют обозначениям в смеси (1). Уравнение (4) записано в частном виде, а именно

для случая, когда $n(t)$ – «белый» шум. Его надо понимать следующим образом. Характеристическая функция (х.ф.) есть вероятностная характеристика случайного процесса, для каждого случайного процесса она своя, единственная. Следовательно, можно утверждать, что после определения х.ф. можно говорить о фильтрации сигнала с вероятностью, равной значению х.ф. Заметим, что х.ф. измерима, и это наглядно будет показано далее при рассмотрении демодулятора.

Из полученных результатов стоит обратить внимание на эффективность фильтра на рис. 2. Под эффективностью фильтра будем понимать выполнение неравенства $h_{\text{ВЫХ}}^2 / h_{\text{ВХ}}^2 > 1$. И, наоборот, если $h_{\text{ВЫХ}}^2 / h_{\text{ВХ}}^2 < 1$, то фильтр неэффективен. Физически эффективность означает повышение отношения сигнал/шум на выходе прикладной системы при наличии большого усиления центрированного квазидетерминированного сигнала аддитивной смеси за счет энергии «белого» шума. Другими словами, можно сказать, что энергия периодического сигнала увеличивается и будет максимальной в «полосе затухания». Здесь внутренние энергетические поставки системы в обеспечение своего правильного функционирования максимальны.

При моделировании эффективность фильтра (кривая 1) составила 10,7 при отношении $h_{\text{ВХ}}^2 = 0,009$, если оценивать энергетические добавки характеристической функции и эффекта стохастического резонанса в преобразование аддитивной смеси (1). Повторим, энергетические добавки в системе получены при усилении в 10,7 раза сигнала в аддитивной смеси за счет индуцированного шумом эффекта стохастического резонанса. Записанное ранее [6] утверждение о возможном улучшении отношения сигнал/шум в работе [5] подтвердилось. Такой результат получен впервые и количественно характеризует особое свойство прикладной системы 1. Заметим, что особое свойство прикладной системы появляется при $h_{\text{ВХ}}^2 < 1$, а при $h_{\text{ВХ}}^2 \geq 1$ это свойство постепенно пропадает.

3. Идентификация устройств и систем

Идентифицируем прикладную систему с демодулятором модема сигналов с модулированной характеристической функцией Ляпунова. Рассмотрим построенный автором впервые и подробно описанный в монографии [8] демодулятор, структурная схема его показана на рис. 3. На данном рисунке: 1 – аналого-цифровой преобразователь (АЦП); 2 – умножитель на $V_m = 1$; 3,4 – функциональные преобразователи; 5, 6 – накапливающие усредняющие сумматоры; 7, 8 – пороговые устройства; 9 – инвертор; Π_{1c} , Π_{2c} – значения порогов.

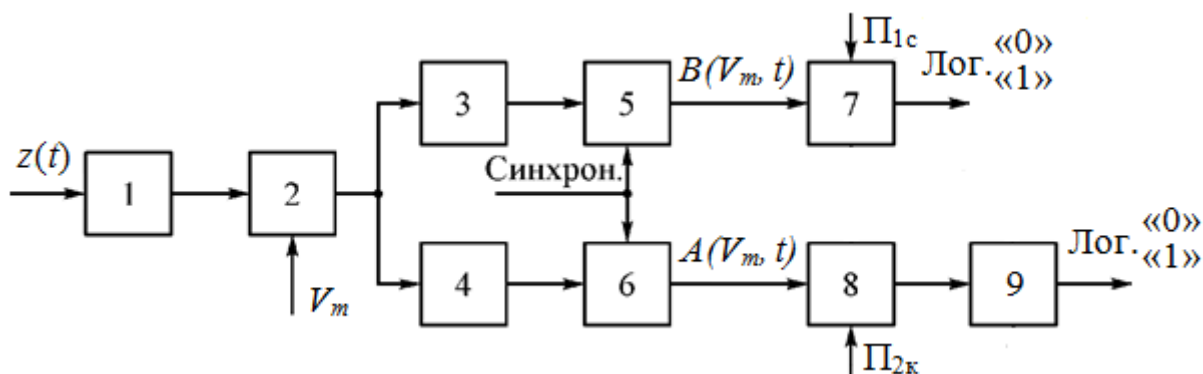


Рис. 3. Двухканальный демодулятор сигнала.

Не повторяя известного описания устройства, скажем, что демодулятор измеряет оценки действительной и мнимой частей характеристической функции (х.ф.) аддитивной смеси сигнала и шума:

$$\hat{A}_z(V_m, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos[V_m z(k\Delta t)], \quad (5)$$

$$\hat{B}_z(V_m, t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sin[V_m z(k\Delta t)], \quad (6)$$

где N – объём выборки мгновенных значений аддитивной смеси; Δt – интервал дискретизации аддитивной смеси. В результате применения вместо математического ожидания оператора идеального усреднения при измерении получаются только оценки х.ф., в отличие от (4) обозначенные сверху дополнительным значком. Свойства оценок (5, 6) исследованы в работе [11], при

этом установлено, что при $N > 1$ они асимптотически состоятельные, эффективные и несмещенные, т. е. имеют фундаментальный статус.

Сравнение структурной схемы демодулятора (рис. 3) и прикладных систем 1 или 2 показывает их аналогию в построении блоков вплоть до функционального преобразователя ФП2. В демодуляторе вместо блока ФП2 используются пороговые устройства. При моделировании цифрового фильтра использованы алгоритмы (5, 6) при $N = 5$, которые отличаются от алгоритма (4) значением знаменателя, а именно в формулах (5, 6) он равен $A_n(V) = 1$ [9]. Таким образом, можно утверждать, что данный демодулятор обладает особым свойством, описанным выше при рассмотрении цифрового фильтра.

4. Компромиссное решение о пределе Шеннона

Напомним, в математической теории связи предел Шеннона имеет значение $E_b/N_0 = 10 \times \lg(\ln 2) = -1,59$ дБ. Это означает, что для отношения $h_{\text{вх}}^2 = \ln 2 = 0,6931$ у идеальной прикладной системы вероятность ошибок остается минимальной. Переходя к определению предела Шеннона применительно к отношению сигнал/шум на входе прикладной системы с особыми свойствами, при котором вероятность ошибок минимальна, используем полученные выше данные (рис. 2) демодуляции аддитивной смеси, в составе которой есть центрированный квазидетерминированный сигнал. При этом методика расчета предела Шеннона с учетом особых свойств прикладной системы должна сохранить фундаментальность ранее установленного предела в математической теории связи. Обозначим: $h_{\text{вых}}^2 / h_{\text{вх}}^2 = \lambda$ – численное значение особого свойства прикладной системы; $[h_{\text{вх}}^2]_{\text{ПС}}$ – отношение сигнал/шум на входе прикладной системы (ПС), при котором значение особого свойства ПС равно λ . Для сохранения фундаментальности предела Шеннона необходимо выполнить условие:

$$[h_{\text{вх}}^2]_{\text{ПС}} \times \lambda = \ln 2, \quad (7)$$

а потом рассчитать предел Шеннона по формуле:

$$E_b/N_0 = 10 \cdot \lg[h_{\text{вх}}^2]_{\text{ПС}}. \quad (8)$$

Применение условия (7) в математической теории связи Шеннона возможно при согласии, что идеальная прикладная система в рамках этой теории не имеет особых свойств, у такой системы коэффициент усиления $\lambda = 1$. Значение предела Шеннона с учетом особого свойства прикладной системы далее будет определено по формуле (8).

Для каждой кривой на рис. 2 определим координаты точек, для которых будет выполняться условие (7). Или, по-другому, для каждой кривой на рис. 2 выберем одну точку с координатами $[h_{\text{вх}}^2]_{\text{ПС}}$ и λ , для которой произведение $[h_{\text{вх}}^2]_{\text{ПС}}$ и λ будет равно $\ln 2$ (при этом предполагаем, что точка обязательно должна принадлежать кривой). Результаты определения координат таких точек записаны в табл. 1. Выбранные точки также показаны на рис. 4, где они отмечены символом *.

Таблица 1. Координаты кривых для определения предела Шеннона.

σ_c^2	$[h_{\text{вх}}^2]_{\text{ПС}}$	$h_{\text{вых}}^2 / h_{\text{вх}}^2 = \lambda$	Примечание
0,045	0,01698	40,83	Кривая 1
0,080	0,02510	27,62	Кривая 2
0,180	0,04964	13,96	Кривая 3

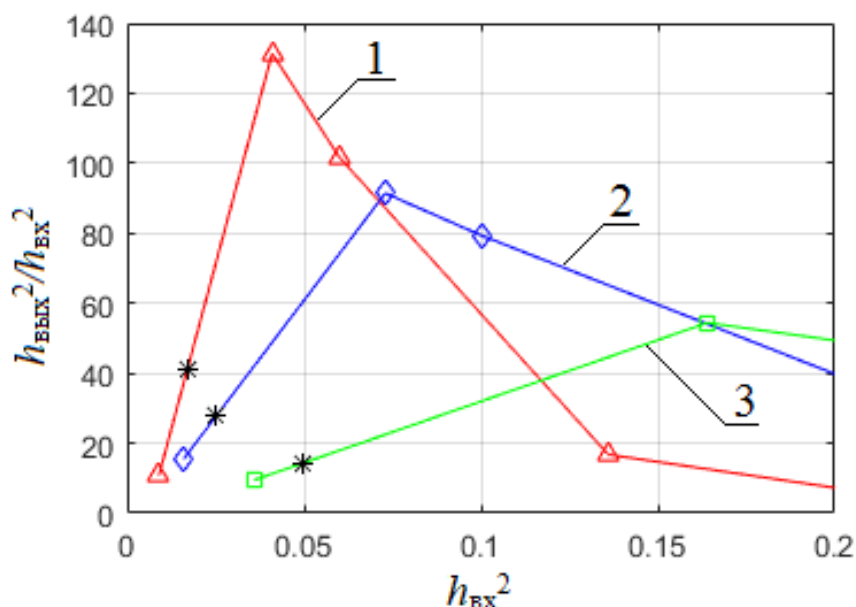


Рис. 4. Кривые стохастического резонанса в цифровом фильтре с отмеченными точками из табл. 1.

Используя данные табл. 1, получим:

$$E_b / N_0 = 10 \times \lg[h_{\text{вх}}^2]_{\text{ПС}} = 10 \times \lg 0,01698 = -17,7 \text{ дБ.}$$

При идентичности обоих каналов демодулятора (рис. 3) в результате расчетов получим равные энергетические вклады каналов в повышение отношения сигнал/шум за счет энергии шума. Тогда поиск рациональных компромиссов при определении предела Шеннона для нового метода модуляции характеристической функции Ляпунова с использованием особого свойства двухканального демодулятора с учетом сделанного ранее в работе [12] анализа его помехоустойчивости и приведенных здесь расчетов позволяет подтвердить значение порога $-17,7$ дБ. При этом вероятность ошибок минимальна, т.к. особое свойство прикладной системы равно $h_{\text{ВЫХ}}^2 / h_{\text{ВХ}}^2 = 40,83$ (табл. 1). Следовательно, компромиссное решение не исключает фундаментальный предел Шеннона, а сдвигает его для нового метода модуляции до границы $-17,7$ дБ за счет перекалфикации «идеальной» прикладной системы Шеннона в прикладную систему с особыми свойствами.

Численное значение особого свойства прикладной системы при применении нового метода модуляции определяется характеристической функцией Ляпунова и стохастическим резонансом, который имеет некоторый элемент случайности и его характеристики зависят от многих переменных, в том числе от энергии сигнала (рис. 2). В табл. 1 приведена энергия сигнала для кривых 1, 2, 3 на рис. 2. Повторив всё сказанное и сделанное выше при расчете предела Шеннона с использованием особых свойств прикладной системы, получим границу $-16,0$ дБ с использованием кривой 2 на рис. 2 или предел $-13,0$ дБ с использованием кривой 3 на рис. 2. Таким образом, получается некоторый разброс значений предела Шеннона за счет элемента случайности явления стохастического резонанса. С учетом постоянного совершенствования особых свойств прикладной системы рекомендуем предел Шеннона выбирать максимальный, т.е. в данном случае значением $-17,7$ дБ. Ранее в работе [12] этот предел Шеннона был подтвержден теоретическим анализом помехоустойчивости демодулятора в канале с «белым» шумом.

Заключение

В данной работе проанализированы особые свойства прикладной системы, «идеальной» по определению Шеннона. При этом учитывались данные проведенных ранее исследований нового метода модуляции характеристической функции Ляпунова квазидетерминированного сигнала. В ходе проведенного анализа получены следующие результаты:

1) В математической теории связи фундаментальный статус предела Шеннона сохраняется, если выполняется условие (7) и для расчета используется формула (8), а идеальная прикладная система Шеннона особых свойств не имеет и характеризуется коэффициентом усиления $\lambda = 1$;

2) Прикладная система модема нового поколения при преобразовании аддитивной смеси квазидетерминированного сигнала с модулированной характеристической функцией Ляпунова и «белого» шума имеет особое свойство, так как она повышает в λ раз отношение сигнал/шум на выходе путем усиления сигнала за счет индуцированного шумом эффекта стохастического резонанса. Значение коэффициента усиления λ определяется характеристиками стохастического резонанса и в определенных границах варьирует, например, от $\lambda = 13,96$ до $\lambda = 40,83$;

3) Компромиссное решение с использованием особых свойств прикладной системы позволяет установить в канале связи предельное значение отношения сигнал/шум, при котором вероятность ошибок при передаче сообщений новым методом модуляции характеристической функции Ляпунова будет минимальна, с помощью фундаментального предела Шеннона с новым значением $-17,7$ дБ.

Литература

1. Шеннон, К. Математическая теория связи / К. Шеннон // Работы по теории информации и кибернетике: пер. с англ. / К. Шеннон; под ред. Р.Л. Добрушина, О.Б. Лупанова. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1963. – С. 243–332.

2. Шеннон, К. Связь при наличии шума / К. Шеннон // Работы по теории информации и кибернетике: пер. с англ. / К. Шеннон; под ред. Р.Л. Добрушина, О.Б. Лупанова. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1963. – С. 433–460.
3. Шеннон, К. Вероятность ошибки для оптимальных кодов в гауссовском канале / К. Шеннон // Работы по теории информации и кибернетике: пер с англ. / К. Шеннон; под ред. Р.Л. Добрушина, О.Б. Лупанова. – Москва: Издательство иностранной литературы, 1963. – С. 540–586.
4. Теоретические основы цифровой связи: лекции. Раздел 9: Компромиссы при использовании модуляции и кодирования. – URL: <https://www.siblec.ru> (дата обращения: 25.09.2023).
5. Вешкурцев, Ю.М. Фильтрация в пространстве вероятностей аддитивной смеси нецентрированного квазидетерминированного сигнала и шума / Ю.М. Вешкурцев, Н.Д. Вешкурцев, Д.А. Титов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2018. – №. 3. – С. 18–23.
6. Стохастический резонанс как индуцированный шумом эффект увеличения степени порядка / В.С. Анищенко, А.Б. Нейман, Ф. Мосс, Л. Шиманский-Гайер // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169, №. 1. – С. 7–38.
7. Климонтович, Ю.Л. Что такое стохастическая фильтрация и стохастический резонанс? / Ю. Л. Климонтович // Успехи физических наук. – 1999. – Т. 169, № 1. – С. 39–47.
8. Вешкурцев, Ю.М. Приборостроение на базе характеристической функции случайных процессов: моногр. / Ю.М. Вешкурцев, Н.Д. Вешкурцев, Д.А. Титов. – Новосибирск: Сибирская академическая книга, 2018. – 182 с. – ISBN 978-5-4379-0592-0.
9. Вешкурцев, Ю.М. Спектральные характеристики выходных сигналов цифрового фильтра в условиях возникновения стохастического резонанса / Ю.М. Вешкурцев, Д.А. Титов, А.С. Табакова // Теория и техника радиосвязи. – 2023. – № 2. – С. 28–37.

10. Вешкурцев, Ю.М. Стохастический резонанс в цифровом фильтре на основе характеристической функции Ляпунова / Ю.М. Вешкурцев, Д.А. Титов, А.С. Табакова. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.6.7> // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – №. 6.
11. Вешкурцев, Ю.М. Прикладной анализ характеристической функции случайных процессов: моногр. / Ю.М. Вешкурцев. – Москва: Радио и связь, 2003. – 204 с. – ISBN 5-256-01705.
12. Вешкурцев, Ю.М. Обобщение теории нового метода модуляции и демодуляции случайного сигнала / Ю.М. Вешкурцев. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.12.8> // Журнал радиоэлектроники. – 2022. – №. 12.

Для цитирования:

Вешкурцев Ю.М., Титов Д.А. Определение предела Шеннона с использованием особых свойств прикладной системы. // Журнал радиоэлектроники. – 2023. – №. 12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.12.25>