

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.12.7>

УДК: 621.391.821; 621.396

АНАЛИЗ ПОСТРОЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВУМЕРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ И ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ ПОДАВЛЕНИЯ НЕГАУССОВСКИХ ИМПУЛЬСНЫХ ПОМЕХ

В.М. Артюшенко ¹, В.И. Воловач ^{2,3}

¹ Технологический университет имени дважды Героя Советского Союза,
летчика-космонавта А.А. Леонова,
141070, г. Королев Московской обл., ул. Гагарина, 42

² Поволжский государственный университет сервиса,
445017, г. Тольятти, ул. Гагарина, 4

³ Воронежский государственный университет,
394018, г. Воронеж, Университетская пл., 1

Статья поступила в редакцию 20 августа 2024 г.

Аннотация. Рассмотрены методы построения моделей двумерных распределений вероятностей. Определены необходимость учета независимого гауссовского шума при использовании имеющих существенные эмпирические предпосылки многомерных моделей негауссовских импульсных помех, а также потенциальная эффективность их подавления. Использован метод получения многомерных моделей негауссовских помех, состоящий в представлении помехи как результата фильтрации пуассоновского потока импульсов. Определены условия отсутствия сингулярности моделей. Показано, что для построения многомерных моделей негауссовских импульсных помех, не обладающих свойством сингулярности, необходимо вводить независимый при рассматриваемой размерности гауссовский шум или использовать

профильтрованный импульсный процесс с корреляционной функцией, имеющей начальный квадратичный участок. Произведена оценка потенциального выигрыша обработки с учетом зависимости между отсчетами атмосферных радиопомех относительно метода их амплитудного подавления, которая не превосходит 4...8 дБ.

Ключевые слова: двумерная модель распределения, негауссовские импульсные помехи, эффективность амплитудного подавления, гауссовский шум, сингулярность, атмосферный шум.

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00452, <https://rscf.ru/project/23-21-00452/>.

Автор для переписки: Воловач Владимир Иванович, volovach.vi@mail.ru

Введение

Одним из наиболее распространенных типов негауссовских помех являются так называемые естественные или атмосферные радиопомехи [1], содержащие гауссовскую флуктуационную и импульсную компоненты и отличающиеся от других негауссовских помех отсутствием нулей у характеристических функций распределения вероятностей [2].

Знание одномерного распределения вероятностей позволяет оценить эффективность амплитудного подавления помехи [3, 4]. При учете зависимости между отсчетами помехи на основе использования многомерных моделей можно достичь большей эффективности.

В [2, 5] рассмотрена многомерная модель атмосферных радиопомех и сделан вывод о значительном повышении эффективности. Очевидно, что минимально достижимый уровень помехи не может быть ниже уровня гауссовской компоненты. Однако, хотя модель [2, 5] строится на основе представления атмосферных радиопомех как гауссовского процесса со случайным среднеквадратическим отклонением, описываемым логарифмически нормальным распределением вероятностей, но в конечной форме гауссовской компоненты не содержит. Об этом свидетельствует нулевой радиус сходимости

разложения одномерного распределения вероятностей в ряд Маклорена, из которого можно найти уровень гауссовской компоненты.

Цель работы состоит в определении и анализе на примере двумерных распределений вероятностей необходимости учета независимого гауссовского шума при использовании имеющих существенные эмпирические предпосылки многомерных моделей негауссовских импульсных помех, а также нахождении потенциальной эффективности их подавления.

Причем независимость должна подтверждаться распределением вероятностей порядка не ниже, чем моделируемое распределение. Также найдем условия, позволяющие достичь адекватности действительности в плане потенциальной эффективности подавления реальных помех.

1. Условия адекватности действительности потенциальной эффективности подавления реальных помех

Первым условием адекватности является отсутствие сингулярных свойств у модели помех, то есть подавление помехи не должно стремиться к бесконечности в случае асимптотически малого сигнала и бесконечного увеличения числа разбиений N любого конечного интервала наблюдения T , что, например, имеет место для помехи с логарифмически нормальным распределением вероятностей [5].

В соответствии с [6] при этих условиях величина $P_{\text{ВЫХ}}^{-1}$, обратная мощности помехи на выходе обнаружителя известного сигнала на фоне односвязной марковской помехи, для достаточно больших N , при которых соседние отсчеты сигнала мало отличаются, то есть T/N мало, имеет вид

$$P_{\text{ВЫХ}}^{-1} = 2NI_2 - (N-1)I_1, \quad (1)$$

где I_1 равняется $P_{\text{ВЫХ}}^{-1}$ в одномерном случае [7];

$$I_1 = \left\langle \left[\frac{d}{dx} \ln W_1(x) \right]^2 \right\rangle; \quad (2)$$

$$I_2 = 0,5 \sum_{i,j=1}^2 \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i} \ln W_2(x_1, x_2) \frac{\partial}{\partial x_j} \ln W_2(x_1, x_2) \right\rangle,$$

в свою очередь, $W_1(\cdot)$ и $W_2(\cdot, \cdot)$ – одномерная и двумерная плотности распределения вероятностей; $\langle \cdot \rangle$ – математический знак усреднения.

Из (1) следует одно из необходимых условий отсутствия сингулярности, заключающееся в справедливости соотношения

$$I_2 = I_1/2$$

при коэффициенте корреляции $R \rightarrow 1$.

2. Метод получения одномерных моделей негауссовских помех

Одним из широко используемых методов получения одномерных моделей негауссовских помех, допускающим обобщение на многомерный случай, является представление помехи как гауссовского процесса со случайной дисперсией D .

Выбор распределения вероятностей величины D позволяет получить необходимый вид одномерного распределения вероятностей помехи. Характер изменения D во времени также может быть различным.

Так для диапазона сверхнизких частот [2] при $T \leq 1 \dots 4$ мс D можно считать неизменным и получить многомерное распределение вероятностей, аналогичное [3], усреднением произведения многомерного распределения вероятностей гауссовского процесса и плотности распределения вероятностей величины $1/D$.

Для варианта модели [3] при значении параметра модели $k_T = 1$, соответствующего описанию распределения вероятностей огибающей моделью Холла [7], усреднение в (2) выполняется аналитически и

$$I_1 = \frac{a + 0,5}{(a + 1,5)\sigma_3^2};$$

$$I_2 = \frac{a+1}{(a+2)(1+R)\sigma_3^2},$$

где k_I , a и σ_3 – параметры модели [3].

Заметим, что распределение Холла – это непрерывное распределение вероятностей для суммы n независимых и одинаково распределенных $U(0,1)$ случайных величин:

$$X = \sum_{k=1}^n U_k.$$

При $n=1$ значение X соответствует равномерному распределению:

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{любые другие } x. \end{cases}$$

При $n=2$ значение X соответствует треугольному распределению:

$$f_X(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

При $n=3$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^4, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{2}(-2x^2 + 6x - 3), & 1 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{2}(3-x)^2, & 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

При $n=4$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{6}(-3x^3 + 12x^2 - 12x + 4), & 1 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{6}(3x^3 - 24x^2 + 60x - 44), & 2 \leq x \leq 3; \\ \frac{1}{6}(4-x)^3, & 3 \leq x \leq 4. \end{cases}$$

При $n = 5$:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{24}x^4, & 0 \leq x \leq 1; \\ \frac{1}{24}(-4x^4 + 20x^3 - 30x^2 + 20x - 5), & 1 \leq x \leq 2; \\ \frac{1}{24}(6x^4 - 60x^3 + 210x^2 - 300x + 155), & 2 \leq x \leq 3; \\ \frac{1}{24}(-4x^4 + 60x^3 - 330x^2 + 7800x - 555), & 3 \leq x \leq 4; \\ \frac{1}{24}(5-x)^4, & 4 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

Внешний вид распределения $f_X(x)$ для различных значений величины n представлен на рис. 1.

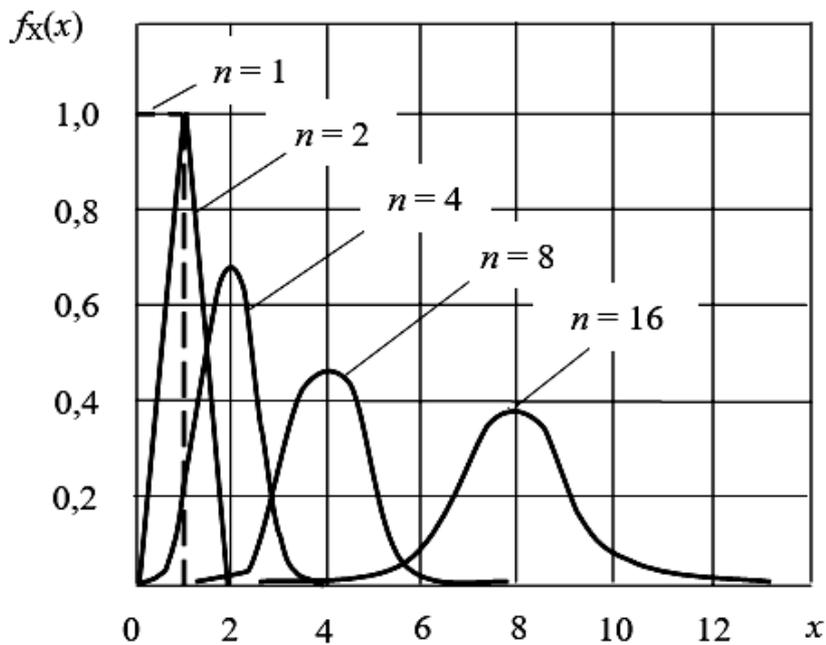


Рис. 1. Распределение Холла.

Заметим, что при этом в отличие от [5] распределение вероятностей помехи и ее огибающей разлагаются в ряд Маклорена и помеха содержит зависящую от импульсной гауссовскую компоненту.

Поскольку при $R=1$ $I_2 > I_1/2$ и, согласно (1) $P_{\text{вых}}^{-1} \rightarrow \infty$ при $N \rightarrow \infty$, то модель оказывается сингулярной. К тому же результату, как показали численные расчеты, приводят и случаи $k_I < 1$, соответствующие наличию

независимой, но только при рассмотрении одномерного распределения вероятностей, гауссовской компоненты.

Сингулярность не исчезает и при учете марковского характера процесса $1/D$, который может иметь место при использовании выбранных в [3] распределений вероятностей этой величины [7].

Следовательно, рассмотренный метод не годится для адекватного многомерного моделирования помех, поскольку не обеспечивает наличия независимой гауссовской компоненты при рассмотрении распределения вероятностей той же размерности.

2. Метод получения многомерных моделей негауссовских помех

Рассмотрим метод получения многомерных распределений вероятностей моделей более близкий к реальному механизму их формирования. Он основан на представлении помехи как результата фильтрации пуассоновского потока импульсов.

Двумерная характеристическая функция профильтрованного пуассоновского процесса [7]

$$f_2(s_1, s_2) = \exp \left\{ \nu \int_0^{\infty} \left[\exp \langle iA(s_1 h(t) + s_2 h(t + \theta)) \rangle_A - 1 \right] dt + \right. \\ \left. + \nu \int_0^{\theta} \left[\exp \langle i s_2 A h(t) \rangle_A - 1 \right] dt, \right. \quad (3)$$

где ν – интенсивность потока; A – случайная амплитуда импульсов; $h(\cdot)$ – импульсная характеристика; θ – разность моментов времени наблюдения

Если предположить, что $h(t) \sim \exp(-\Omega t)$ – марковский процесс (Ω – параметр полосы), то $f_2(s_1, s_2)$ выражается через одномерную характеристическую функцию:

$$f_2(s_1, s_2) = \frac{f_1(s_1 + R s_2) f_1(s_2)}{f_1(R s_2)}, \quad (4)$$

где корреляционная функция

$$R(\theta) = \exp(-\Omega t).$$

Дальнейшие преобразования удастся выполнить для

$$f_1(s) = \exp(-b|s|), \quad (5)$$

где b – параметр.

Подставив (5) в (4), учитывая наличие независимого гауссовского шума, путем умножения (4) на двумерную характеристическую функцию нормального распределения вероятностей и выполнив двумерное преобразование Фурье, после достаточно громоздких преобразований получаем:

$$W_2(x_1, x_2) = \frac{1}{8\pi\sigma_g^2\sqrt{1-R^2}} \sum_{\delta_1, \delta_2 = \pm 1} \exp\left[\frac{b+i\delta_1 x_1^2}{2\sigma_g^2}\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{b+i\delta_1 x_1}{\sqrt{2}\sigma_g}\right] \times \operatorname{erfc}\left[\frac{[(1-R)b+i\delta_2(x_2-Rx_1)]^2}{2\sigma_g^2(1-R^2)}\right] \operatorname{erfc}\left[\frac{[(1-R)b+i\delta_2(x_2-Rx_1)]}{\sqrt{2}\sigma_g\sqrt{1-R^2}}\right], \quad (6)$$

где σ_g^2 – дисперсия независимого гауссовского шума; $\operatorname{erfc}(\cdot)$ – дополнительный интеграл вероятностей.

Результаты моделирования двумерных негауссовских плотностей распределения вероятностей в соответствии с соотношениями (6) для различных коэффициентов корреляции $R = r$ представлены на рис. 2.

Соответствующее (6) одномерное распределение вероятностей близко к модели [3] при $a = 0,5$ и потому ввиду удовлетворительного согласия этого одномерного распределения вероятностей с определенным массивом экспериментальных данных, описываемых моделью [3], при выполнении примерного неравенства $0,45 \leq a \leq 0,65$ двумерная модель (6) имеет практический интерес.

Численные расчеты, выполненные с помощью (6), (2) и (1), показали, что этой моделью описывается помеха с $P_{\text{вбх}}^{-1} = 1/c\sigma_g^2$ при $N \rightarrow \infty$, где $1 < c \leq 2$.

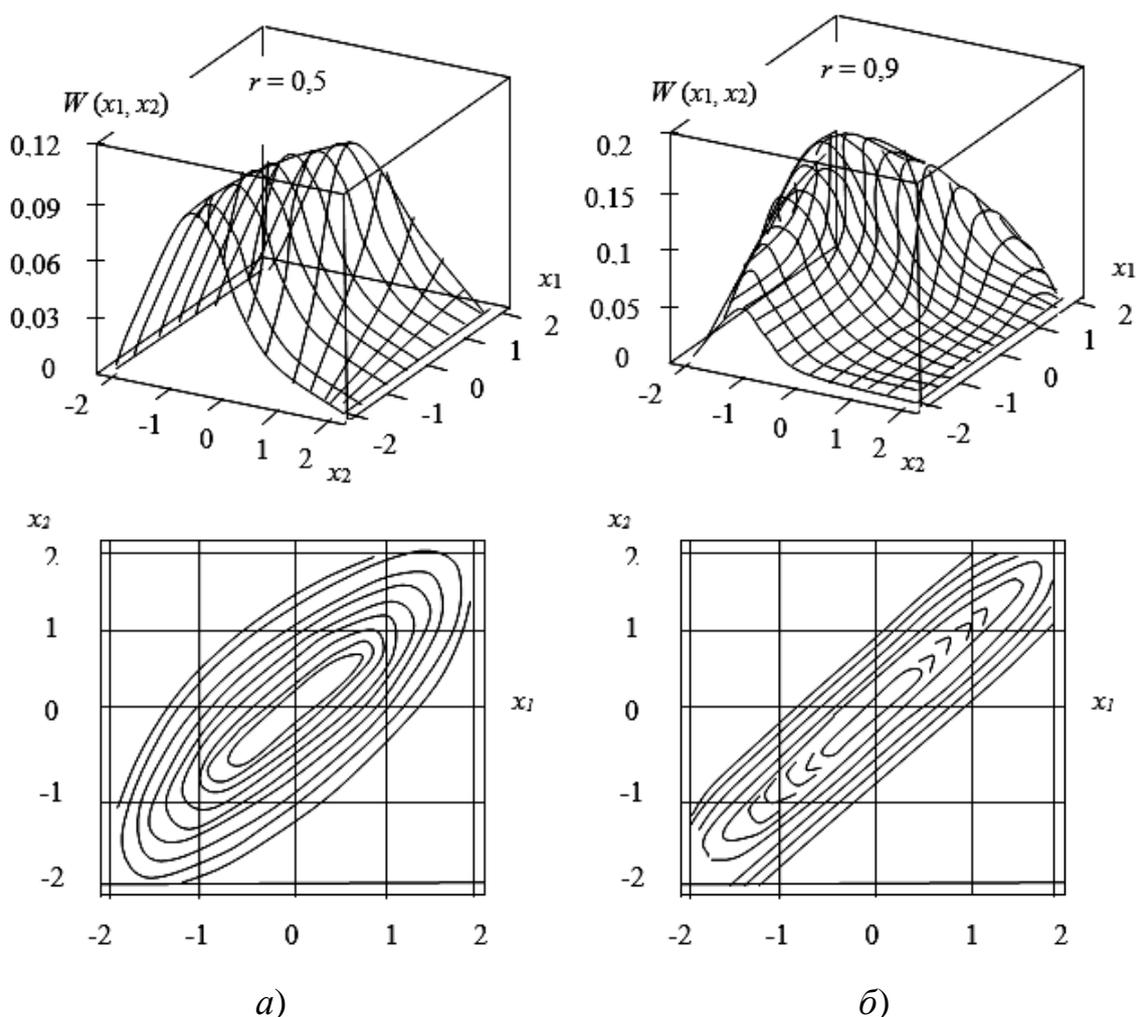


Рис. 2. Результаты моделирования двумерных негауссовских плотностей распределения вероятностей и изолинии их поверхностей при:
а – $r = 0,5$; б – $r = 0,9$.

Как и ожидалось, модель (6) несингулярная. Однако распределение вероятностей собственно гауссовской части помехи, которое соответствует характеристической функции (5) и может быть получено из (6) при $\sigma_g \rightarrow 0$, оказывается сингулярным.

Это достаточно неожиданно, поскольку специальный анализ, подобный выполненному в [8], показывает теоретическую возможность формирования (5) только при $\nu \rightarrow \infty$, а при этом условии должен самостоятельно формироваться и гауссовский шум.

Можно предположить, что причиной этого является использование физически нереализуемой экспоненциальной корреляционной функции. С учетом квантовой поправки к спектральной плотности «белого шума» [9] эта функция всегда квадратичная на начальном участке.

В случае квадратичного начального участка зависимости $R(t)$ в (3) не удается выполнить интегрирование по t аналитически. Поэтому соответствующий расчет l_2 , учитывая возможность аналитического усреднения по A , сводится к пятикратному вычислению несобственных интегралов, что осуществить непосредственно не реально.

Поэтому было использовано разложение по полиномам Эрмита:

$$W_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma^2\sqrt{1-R^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x_i^2 + \frac{(x_2 - Rx_1)^2}{1-R^2}\right]\right\} \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} C_{kn} H_n\left(\frac{x_2 - Rx_1}{\sigma\sqrt{1-R^2}}\right); \quad (7)$$

$$f_2(s_1, s_2) = \exp\left[-(s_1^2 + 2Rs_1s_2 + s_2^2)\sigma^2 / 2\right] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} i^{k+n} C_{kn} H_n \times \times [(s_1 + Rs_2)\sigma] H_n(s_2\sigma\sqrt{1-R^2}). \quad (8)$$

Параметры σ и C_{kn} в (7) и (8) тождественны.

В этом случае вычисления разбиваются на три этапа. Сначала с помощью (3) вычисляется двумерный массив значений $f_2(s_1, s_2)$. Затем, исходя из (8), стандартным способом [10] определяются коэффициенты C_{kn} и, наконец, с помощью (1) и (2) находится $P_{\text{вых}}^{-1}$.

Заметим, что отличие (7) от соответствующего двумерного ряда Эджворта [5] ускоряет сходимость ряда в случае конкретной, квадратичной, корреляционной функции.

С помощью (7) и (8) были выполнены расчеты для колебательного режима в колебательном контуре

$$R(t) = (1 + \Omega t) \exp(-\Omega t), \quad (9)$$

при двухстороннем экспоненциальном распределении вероятностей величины A .

3. Определение потенциальной эффективности подавления помехи

Для определения потенциальной эффективности подавления помехи желательно выбрать $R(T/N) \rightarrow 1$, а $\sigma_g^2 \rightarrow 0$.

Однако практически степень близости этих величин к указанным пределам определялись диапазоном представления чисел при использовании арифметики одинарной точности на персональном компьютере.

Было выбрано $R \approx 0,9$ и $\sigma_g^2 = 0,01$ при условно единичной мощности пуассоновской помехи $m_2 = 1$. Из этих же соображений количество членов ряда в (7) и (8) ограничивалось: $k, n \leq 12$.

Наилучшая сходимость рядов достигалась при выборе

$$\sigma^2 = m_2 + \sigma_g^2.$$

Величина N не имеет принципиального значения при сравнительном анализе. Для определенности было рассмотрено $T \approx 3\tau_k$, где τ_k – время корреляции помех; $N = 10$.

Заметим, что моделируемая ситуация может иметь место в случае приема в сверхнизкочастотном диапазоне.

Соотношение $\sigma_g^2/m_2 = 0,01$ реально для соотношения мощностей шумов приемника и дальних атмосфериков, а выбор $R = 0,9$ с учетом значений $\tau_k = 0,12$ мс [2] и квадратичности $R(t)$ приводит к частоте дискретизации 25 кГц, которая также реально используется при цифровой обработке сигналов, принимаемых в полосе 0,4...0,95 кГц [11].

Для решения принципиального вопроса об адекватности моделей был рассмотрен случай $\nu/\Omega = 10$, который соответствует существенной степени нормализации совокупности дальних атмосфериков [8].

Для экспоненциальной $R(t)$ было получено $P_{\text{ВЫХ}}^{-1} = 8,63$ ($l_1 = 1,0675$, $l_2 = 0,91$), а для (9) $P_{\text{ВЫХ}}^{-1} = 1,477$ ($l_1 = 0,9983$, $l_2 = 0,5231$).

Существенное различие этих значений между собой и относительно небольшое при существенном отличии соответствующих (6) и (7) одномерных распределений вероятностей расхождение первого значения со случаем (6), где при тех же величинах σ_g , R и N , $\sigma_g/b \ll 1$ имеем $P_{\text{ВЫХ}}^{-1} \approx 5$, подтверждает справедливость использования метода и свидетельствует о решающем влиянии вида начального участка $R(t)$.

Результат для (9) практически не отличается от случая полностью нормализованной помехи, когда

$$l_2 = \frac{l_1}{1+R},$$

из чего следует, что флуктуационная компонента поля атмосферной радиопомехи при достаточном значении индекса перекрытия ν/Ω , точная граница зависит от $h(t)$, ведет себя аналогично гауссовскому шуму.

Для исследования возможностей подавления импульсной компоненты атмосферных радиопомех были выполнены расчеты при $\nu/\Omega=2$, когда нормализация еще отсутствует, и получено $P_{\text{ВЫХ}}^{-1} = 6,01$ ($l_1 = 1,133$, $l_2 = 0,8105$), что соответствует случаю (6) и показывает значительное возрастание подавления импульсной помехи при переходе от амплитудного подавления к подавлению с учетом зависимости соседних отсчетов помехи.

Поскольку флуктуационная компонента формируется за счет независимого гауссовского шума и в достаточной степени перекрывающихся импульсов, ее уровень σ_j^2 будет определять потенциальную эффективность подавления негауссовской помехи.

Нижняя оценка величины σ_j , выполненная с использованием [8], для модели [3] имеет вид:

$$\sigma_j^2 = \sigma_3^2 a / (a + 0,5k_l), \quad (10)$$

а соответствующая верхняя оценка из [3] $-\sigma_j \leq \sigma_3$.

На практике для атмосферных радиопомех естественного происхождения $a \geq 0,5$ и $k_I < 1,5$, и, учитывая, что в случае амплитудного подавления атмосферных радиопомех [3]

$$P_{\text{ВЫХ}} = \sigma_3^2 [1 + k_I / (a + 0,5)],$$

а также оценки σ_j выигрыш за счет учета зависимости отсчетов помехи не превосходит 4...8 дБ.

Что касается реализации этого выигрыша, то для единственной несингулярной аналитической двумерной модели (6), используя методику оценки параметров из [3], найдем $k_I = b/\sigma_3$ и

$$\sigma_3^2 = \frac{\sigma_g^2}{1 + \frac{b}{\sqrt{2/\pi}\sigma_g} \exp\{b^2 / 2\sigma_g^2\} \operatorname{erfc}(b / \sqrt{2}\sigma_g)}.$$

Откуда, учитывая (10) и оценку величины c , получим, что модель достаточно адекватно описывает помехи с $k_I < 0,44...0,7$, для которых выигрыш составит не более 1,6...4,6 дБ.

Так как при инженерной реализации будут возникать определенные потери, которые в связи с существенно большими трудностями определения параметров двумерного распределения вероятности будут превосходить соответствующие потери в одномерном случае [3], преимущество учета корреляции отсчетов помехи может оказаться проблематичным, оставляя в силе для большинства практических случаев вывод о достаточности мер амплитудного подавления атмосферных радиопомех [3].

В определенных же случаях, таких как достаточно широкая полоса и малый вклад флуктуационных помех, достижение преимуществ тесно связано с решением проблемы поиска простых алгоритмов, обладающих аналогично одномерному случаю свойством устойчивости результата к виду распределения вероятностей помехи [3].

Заключение

Проведен анализ построения математической модели двумерных распределений и потенциальной эффективности подавления негауссовских импульсных помех.

Показано, что для построения не обладающих свойством сингулярности многомерных моделей негауссовских импульсных помех необходимо вводить независимый при рассматриваемой размерности гауссовский шум или использовать профильтрованный импульсный процесс с корреляционной функцией, имеющей начальный квадратичный участок.

Потенциальная эффективность подавления с учетом корреляции помехи определяется уровнем нормализованной флуктуационной компоненты и для атмосферных радиопомех превосходит эффект амплитудного подавления не более чем на 4...8 дБ.

Финансирование: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-21-00452, <https://rscf.ru/project/23-21-00452/>.

Литература

1. Ремизов Л.Т. Естественные радиопомехи. – М.: Наука, 1985. – 196 с.
2. Диксон Р.К. Широкополосные системы / Пер. с англ.; Под ред. В.И. Журавлева. – М.: Связь, 1979. – 302 с.
3. Кабанов В.В. Многомерные модели и потенциальная эффективность подавления негауссовских импульсных помех. // Радиотехника. – 1990. – № 6. – С. 42-45.
4. Артюшенко В.М., Воловач В.И. Анализ влияния флуктуационных модулирующих помех на статистические характеристики распределения выходного сигнала линейного фильтра // Журнал радиоэлектроники. – 2020. – № 7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2020.7.12>

5. Хаджи Б.А., Добряк Д.С., Вершинин Е.А. Естественные ОНЧ шумы как помехи радиоприему. – М.: ИРЭ АН СССР, 1986. – 234 с.
6. Теория обнаружения сигналов / Под ред. П.А. Бакута. – М.: Радио и связь, 1984. – 440 с.
7. Тихонов В.И., Миронов М.А. Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
8. Тузов Г.И. Статистическая теория приема сложных сигналов. – М.: Сов. радио. 1977. – 400 с.
9. Ван дер Зил А. Шумы при измерениях. – М.: Мир. 1979. – 292 с.
10. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Сов. радио, 1989. – 656 с.
11. Трифонов В.В. Исследование статистических характеристик радиопомех ДВ-диапазона // Доклады ТУСУР. – 2007. – № 2. – С. 134-138.

Для цитирования:

Артюшенко В.М., Воловач В.И. Анализ построения математической модели двумерных распределений и потенциальной эффективности подавления негауссовских импульсных помех // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 12. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.12.7>