

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.2.3>  
УДК 621.396.6

## ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УГЛОВОГО СВЕРХРАЗРЕШЕНИЯ КОРРЕЛИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА

И. М. Аверин, А. В. Елохин, А. Г. Флакман

Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского,  
603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Статья поступила в редакцию 4 февраля 2021 г.

**Аннотация.** Приведены экспериментальные результаты по сверхразрешению двух близкорасположенных источников сигналов, полученные с помощью автомобильного радиолокатора миллиметрового диапазона длин волн. Особенности условий экспериментов были высокая взаимная коррелированность источников сигналов и предельно короткий входной процесс, который состоял только из одной выборки. Оценка числа источников производилась с помощью метода минимального многочлена корреляционной матрицы сигналов в элементах антенной решетки (АР), который обеспечил вероятность правильной оценки числа источников равную 100% во всех сценариях сигнальной обстановки. Для нахождения угловых координат источников использовались метод сканирования лучом АР, спектральный и корневой методы минимального многочлена. Сравнительный анализ показал, что корневой метод является более эффективным и обеспечивает разрешение источников в случаях меньшего углового расстояния между ними.

**Ключевые слова:** антенная решетка, корреляционная матрица, минимальный многочлен, сверхразрешение, оценка числа источников, оценка угловых координат.

**Abstract.** Experimental results on the super-resolution of two closely spaced signal sources obtained using a car radar of the millimeter wavelength range are presented. The peculiarities of the experimental conditions were a high mutual correlation of

signal sources and an extremely short input process, which consisted of only one sample. The estimation of the number of sources was carried out using the method of the minimum polynomial of the correlation matrix of signals in the antenna array, which provided the probability of correct estimation of the number of sources equal to 100% in all scenarios of the signal situation. To find the angular coordinates of the sources, we used the method of scanning the AA beam, the spectral and root methods of the minimum polynomial. Comparative analysis showed that the root method is more efficient and provides resolution of sources in cases of smaller angular distance between them.

**Key words:** antenna array, correlation matrix, minimum polynomial, super-resolution, estimate of the number of sources, estimate of angular coordinates.

## Введение

При разработке перспективных радиолокационных систем актуальной является проблема оценки числа действующих источников сигналов и их угловых положений. Значительный интерес представляет случай близкорасположенных источников, расположенных в пределах ширины луча AP, когда используются методы сверхразрешения. К таким методам можно отнести методы Кейпона, MUSIC (MUltiple Signal Classification), ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques), RARE (Rank Reduction), минимального многочлена корреляционной матрицы (KM) входных сигналов в AP и др. [1-7].

При использовании многоэлементных AP часто не удается получить длинную выборку входного процесса, например, из-за нестационарности сигнальной обстановки. Источники сигналов могут быть взаимно коррелированными. Такая ситуация возникает в пространственном канале с многолучевым распространением сигналов. Источник создает несколько волновых фронтов, которые можно интерпретировать как сигналы от коррелированных источников. Поэтому является актуальным случаи короткой выборки, когда число  $L$  выборочных векторов меньше числа  $N$  элементов AP

( $L < N$ ), и коррелированных источников сигналов.

Проекционный сверхразрешающий метод минимального многочлена корреляционной матрицы (КМ) сигналов в элементах  $AP$ , предложенный в [6,8], основан на оценке параметров этого многочлена (степени и корней) и формировании матричного проектора на шумовое подпространство. Степень данного многочлена связана с числом источников сигналов, а проектор используется для оценки угловых координат этих источников.

Статистически обоснованный критерий среднеквадратической ошибки (СКО) для аппроксимации минимального многочлена КМ некоторым многочленом минимальной степени рассмотрен в [6,8]. Отметим, что методы MUSIC и ESPRIT не дают оценку числа источников, которое должно быть известно или предварительно оценено, например, с помощью критериев AIC (Akaike's Information Criterion) или MDL (Minimum Description Length) [3,4,9,10]. Оценку угловых координат источников можно сделать либо на основе формирования псевдоспектральной функции и поиска ее экстремумов (спектральный метод минимального многочлена), либо путем нахождения корней соответствующих полиномов (корневой метод минимального многочлена).

Высокая эффективность методов минимального многочлена при коррелированных источниках сигналов и короткой выборке входного процесса показана на основе численного моделирования [6,7,11,12] и экспериментальных результатов, полученных с помощью активного радиолокатора миллиметрового диапазона длин волн [13]. В частности, показано, что метод минимального многочлена обеспечивал существенно более высокую вероятность правильной оценки числа близкорасположенных источников по сравнению с критериями AIC и MDL. Эффективность корневого метода минимального многочлена по точности оценки координат источников сигналов практически совпала с эффективностью конечного метода MUSIC при предположении, что истинное число источников является известным.

Математическое моделирование показало более высокую эффективность

корового метода минимального многочлена по сравнению со спектральным методом. Представляет интерес результаты экспериментальных исследований сравнительной эффективности этих методов в случаях короткой выборки входного процесса и произвольной взаимной корреляции источников. В настоящей работе приводятся соответствующие результаты, полученные на радиолокаторе миллиметрового диапазона длин волн.

## 1. Оценка числа источников сигналов

Выборку вектора  $\mathbf{X}(l)$  входного процесса в  $N$ -элементную АР в  $l$ -ый момент времени можно представить в виде

$$\mathbf{X}(l) = \sum_{j=1}^J a_j(l) \mathbf{S}_j + \mathbf{Z}(l), \quad (1)$$

где  $a_j(l)$  – случайная комплексная гауссова амплитуда сигнала  $j$ -го источника в элементах АР,  $\mathbf{S}_j$  – вектор  $j$ -го источника,  $\mathbf{Z}(l)$  – вектор собственных шумов приемных устройств. Для линейной и эквидистантной АР  $n$ -ая компонента вектора  $\mathbf{S}_j$  равна  $(\mathbf{S}_j)_n = \exp[j(n-1)2\pi d_\lambda \sin \varphi_j]$ , где  $\varphi_j$  – угловая координата  $j$ -го источника, отсчитываемая от нормали к АР,  $d_\lambda$  – период АР, выраженный в длинах волн.

Корреляционная матрица  $\mathbf{M} = \langle \mathbf{X}(l) \mathbf{X}(l)^H \rangle$  входного процесса равна [3,4]  $\mathbf{M} = \mathbf{I} + \mathbf{S}^{(0)} \mathbf{B} \mathbf{S}^{(0)H}$ , где  $\mathbf{I}$  – единичная КМ некоррелированных собственных шумов,  $\mathbf{S}^{(0)} = [\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_J]$  – матрица векторов источников сигналов, столбцами которой являются векторы  $\mathbf{S}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, J$ ),  $\langle \cdot \rangle$  – статистическое среднее,  $(\cdot)^H$  – эрмитово сопряжение. Матрица  $\mathbf{M}$  является эрмитовой и положительно определенной. В случае некоррелированных источников сигналов матрица  $\mathbf{B}$  принимает диагональный вид, а КМ  $\mathbf{M}$  представляет собой сумму КМ отдельных источников.

Минимальный многочлен  $\psi_m(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_m)$  КМ  $\mathbf{M}$  является делителем характеристического многочлена этой матрицы, имеет наименьшую степень  $m$  и единичный коэффициент при старшем члене [14,15]. Его корнями являются неравные между собой собственные числа  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_m$  матрицы  $\mathbf{M}$ .

Важным свойством минимального многочлена является то, что его степень определяется числом источников сигнала ( $m = J+1$ ).

Согласно теореме Гамильтона – Кэли [14,15] матрица  $\mathbf{M}$  удовлетворяет своему минимальному многочлену, то есть  $\psi_m(\mathbf{M})=\mathbf{0}$ , где  $\mathbf{0}$  – нулевая матрица, все элементы которой равны нулю. Разделим минимальный многочлен  $\psi_m(\lambda)$  КМ  $\mathbf{M}$  на неравное нулю произведение собственных чисел  $(-1)^m \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_m$  и подставим в полученный многочлен качестве аргумента матрицу  $\mathbf{M}$ . Получим нулевую матрицу вида  $(\mathbf{I} - \gamma_1 \mathbf{M})(\mathbf{I} - \gamma_2 \mathbf{M}) \dots (\mathbf{I} - \gamma_m \mathbf{M}) = \mathbf{0}$ , где коэффициенты  $\gamma_n$  являются обратными собственными числами КМ  $\mathbf{M}$  ( $\gamma_n = 1/\lambda_n$ ).

На практике точная КМ  $\mathbf{M}$  является неизвестной и вместо нее используется максимально правдоподобная оценка  $\hat{\mathbf{M}}$ , полученная по  $L$  выборочным векторам  $\mathbf{X}(l)$  входного процесса (1) в АР и равная [16, 17]

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{X}(l) \mathbf{X}(l)^H. \quad (2)$$

Подстановка выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  в минимальный многочлен  $\psi_m(\mathbf{M})$  даст матрицу  $\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})$ , которая не будет являться нулевой матрицей. Поэтому, для выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$  будем иметь матричный многочлен вида

$$\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}}) = (\mathbf{I} - \gamma_1 \hat{\mathbf{M}})(\mathbf{I} - \gamma_2 \hat{\mathbf{M}}) \dots (\mathbf{I} - \gamma_m \hat{\mathbf{M}}). \quad (3)$$

Квадрат  $\|\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})\|^2$  евклидовой нормы многочлена  $\mathbf{I}^{(m)}(\hat{\mathbf{M}})$  представляет собой функционал СКО аппроксимации минимального многочлена точной КМ  $\mathbf{M}$  некоторым многочленом степени  $m$ . Для эрмитовой матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  имеем, что  $\|\hat{\mathbf{M}}\|^2 = Sp(\hat{\mathbf{M}}^2)$ , где  $Sp(\cdot)$  – след матрицы. Тогда получим, что минимум СКО можно обеспечить путем выбора степени  $m$  и коэффициентов  $\gamma_n$  ( $n=1,2,\dots,m$ ) [6,7]

$$I^{(m)} = \min_{m, \gamma_k} \left\| \mathbf{I}^{(m)}(\widehat{\mathbf{M}}) \right\|^2 = \min_{m, \gamma_k} Sp \left[ \prod_{k=1}^m (\mathbf{I} - \gamma_k \widehat{\mathbf{M}})^2 \right]. \quad (4)$$

Для коэффициентов  $\gamma_n$  обратных собственным числам КМ в [6,8] получена система нелинейных уравнений вида

$$\gamma_n = Sp \left[ \widehat{\mathbf{M}} \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{I} - \gamma_p \widehat{\mathbf{M}})^2 \right] \left\{ Sp \left[ \widehat{\mathbf{M}}^2 \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{I} - \gamma_p \widehat{\mathbf{M}})^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (5)$$

Метрики  $I^{(m)}$  являются убывающими величинами, рассчитываются по очереди в порядке увеличения  $m$  и сравниваются с установленным порогом  $Th$ , который зависит от сигнальной обстановки. Если при некотором  $m$  выполняются условия, что  $I^{(m)} < Th$  и  $I^{(m-1)} > Th$ , то принимается решение, что оценка степени минимального многочлена  $\widehat{m} = m$ . Следовательно, оцененное число источников сигналов будет равно  $\widehat{J} = \widehat{m} - 1$ . Более подробно итерационная процедура аппроксимации минимального многочлена КМ изложена в [6,11-13].

После итерационной процедуры получим оценку матричного проектора  $\widehat{\mathbf{P}}^{(n)}$  на шумовое подпространство в виде [6,7]

$$\widehat{\mathbf{P}}^{(n)} = \left[ \prod_{p=1}^{\widehat{J}} (\mathbf{I} - \gamma_p \widehat{\mathbf{M}}) \right] \cdot \left[ \prod_{p=1}^{\widehat{J}} \left( 1 - \frac{\gamma_p}{\gamma_{\widehat{J}+1}} \right) \right]^{-1}. \quad (6)$$

## 2. Методы минимального многочлена

Спектральный метод [6,7]. Сформируем псевдоспектральную функцию угловой координаты  $\varphi$  вида

$$\eta(\varphi) = \frac{1}{\mathbf{S}^H(\varphi) \widehat{\mathbf{P}}^{(n)} \widehat{\mathbf{P}}^{(n)H} \mathbf{S}(\varphi)}, \quad (7)$$

где  $\mathbf{S}(\varphi)$  – вектор произвольного направления  $\varphi$  (вектор поиска). В случае линейной эквидистантной АР  $n$ -ая компонента вектора  $\mathbf{S}(\varphi)$  равна  $\mathbf{S}(\varphi)_n = \exp[j(n-1)2\pi d_\lambda \sin \varphi]$ .

Если производится сканирование лучом AP по угловой координате  $\varphi$ , то в направлении на  $j$ -ый источник вектор  $\mathbf{S}(\varphi)$  будет принадлежать сигнальному подпространству и его проекция на шумовое подпространство будет равна нулю. Поэтому, функция  $\eta(\varphi)$  в точке  $\varphi=\varphi_j$  будет неограниченно возрастать. По этому пику находится угловая координата  $j$ -го источника сигналов.

Корневой метод [12]. В случае линейной и эквидистантной AP можно ввести комплексную переменную  $z=\exp(j2\pi d_\lambda \sin\varphi)$ . Тогда вектор поиска  $\mathbf{S}(z)=(1, z, z^2, \dots, z^{N-1})^T$  ( $\langle \cdot \rangle^T$  – транспонирование). Обозначим через  $f(z)$  знаменатель псевдоспектральной функции  $\eta(\varphi)$  в (7) и преобразуем его к виду

$$f(z) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_k z^k, \quad a_m = \sum_{k=1}^{N-m} (\hat{\mathbf{P}}^{(n)} \hat{\mathbf{P}}^{(n)H})_{k,k+m}, \quad (m \geq 0). \quad (8)$$

Вследствие эрмитовости матрицы  $\mathbf{P}^{(n)H} \mathbf{P}^{(n)}$  коэффициенты  $a_m$  удовлетворяют условию  $a_{-m} = a_m^*$ .

Таким образом, функция  $f(z)$  является полиномом степени  $(2N-2)$ , коэффициенты которого представляют собой сумму элементов соответствующих диагоналей матрицы  $\hat{\mathbf{P}}^{(n)} \hat{\mathbf{P}}^{(n)H}$ . Корни полинома  $f(z)$  можно разбить на пары, так как если  $z_1$  – корень полинома  $f(z)$ , то  $1/(z_1)^*$  – также его корень. Один из этих корней находится снаружи окружности единичного радиуса на комплексной плоскости  $z$ , а другой – внутри нее. Оба корня имеют одинаковые аргументы, поэтому для оценки угловых координат источников можно использовать любой из них.

Для точного проектора  $\mathbf{P}_n$ , соответствующего точной КМ  $\mathbf{M}$ , функция  $f(z)$  имеет  $2J$  корней, которые, лежат на единичной окружности. Для оценочного проектора  $\hat{\mathbf{P}}^{(n)}$ , соответствующего выборочной КМ  $\hat{\mathbf{M}}$ , имеется по  $(N-1)$  корней снаружи и внутри единичной окружности. Поэтому для нахождения угловых координат источников, следует учесть полученную оценку  $\hat{J}$  числа источников сигналов и выбрать  $\hat{J}$  корней, наиболее близких к этой окружности и находящихся снаружи или внутри нее. Угол  $j$ -го источника находится с

помощью формулы:  $\varphi_j = \arcsin[\arg(z_j)/2\pi d_\lambda]$ , где  $\arg(z_j)$  – фаза  $z_j$ .

### 3. Результаты экспериментов

Эксперименты проводились на автомобильном радиолокаторе миллиметрового диапазона длин волн с азимутальной линейной АР, конфигурация которой показана на рис. 1. Решетка состояла из 11 слабонаправленных антенн, 9 из которых расположены с одинаковым периодом  $d_\lambda = 0.55$ , а 2 крайние антенны отнесены на удвоенное расстояние. Ширина главного луча диаграммы направленности АР по уровню половинной мощности составляла  $\Delta\varphi_{beam} = 7.7^\circ$ .

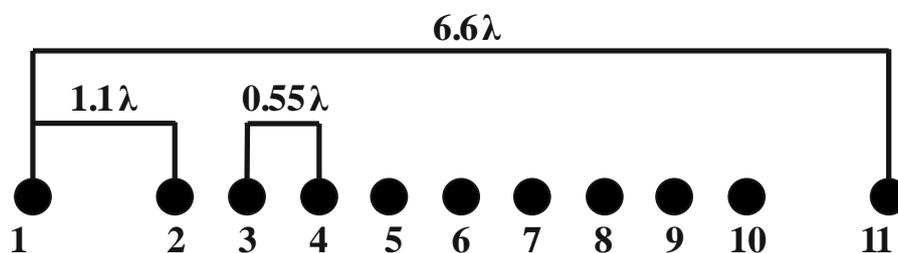


Рис.1. Конфигурация экспериментальной АР.

В качестве целей (вторичных источников сигналов) применялись два одинаковых уголкового отражателя треугольной формы, которые возвращают после трехкратного отражения падающий луч в направлении источника излучения [18]. Отражатели и АР радиолокатора располагались на высоте  $\approx 0.5$  м над асфальтированной поверхностью земли. Для каждого сценария задавались дальность  $R$  до уголков и расстояние  $2D$  между ними. Схема экспериментальных сценариев показана на рис. 2.

При проведении экспериментов плоскость АР ориентировалась приближенно, поэтому уголки располагались неточно относительно нормали к АР и дальности до уголков могли различаться на величину превышающую длину волны (3.9 мм). Следовательно, фаза коэффициента корреляции вторичных источников в каждом сценарии принимала постоянное значение, которое было произвольным в интервале  $[0 \div 2\pi]$  для разных сценариев. Это означает, что источники сигналов были коррелированы с некоторым (неизвестным) коэффициентом корреляции, близким к единице по амплитуде и

имеющим произвольную фазу. Поэтому, при обработке сигналов применялась процедура совместного (прямого и обратного) пространственного сглаживания КМ входного процесса, которая применительно к методам минимального многочлена изложена в [12]. Антенная решетка, конфигурация которой представлена на рис. 1, разделялась на 5 эквидистантных подрешеток по 4 элемента в каждой с номерами элементов [1,2,4,6], [2,4,6,8], [3,5,7,9], [4,6,8,10] и [6,8,10,11], соответственно.

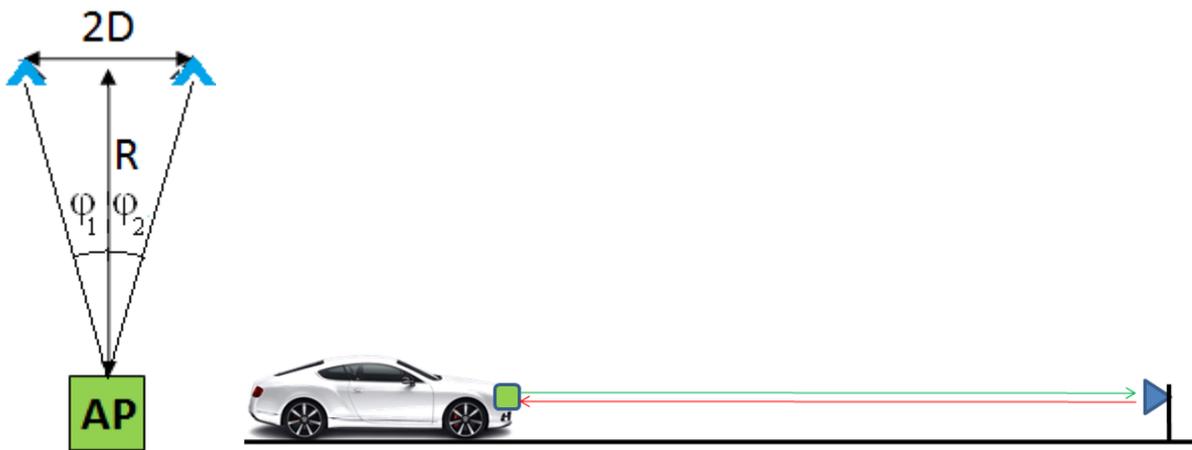


Рис.2. Схема сценариев, вид сверху (слева) и сбоку (справа).

Особенностью проведенных экспериментов был предельно короткий входной процесс, который состоял только из одной выборки ( $L=1$ ). При этом уровень отношения сигнала к шуму (ОСШ) в элементах AP обеспечивался большим 20 дБ. Для обработки полученных данных использовались метод сканирования лучом AP (метод Фурье [3]), спектральный и корневой методы минимального многочлена. Вначале производилось сканирование по всей области азимутальных углов и находилась область расположения источников, затем с помощью методов минимального многочлена оценивалось число источников и их угловые координаты.

Параметры сценариев представлены в таблице, где  $\delta\varphi = |\varphi_1 - \varphi_2| / \Delta\varphi_{beam}$  – угловое расстояние между источниками, нормированное к ширине  $\Delta\varphi_{beam}$  луча AP по уровню половинной мощности (7.7 град),  $\Delta = |\varphi_2 - \varphi_1|$  – оцененное угловое расстояние между источниками,  $Prob$  – вероятность правильной оценки числа источников, вычисленная для каждого сценария по большому

числу экспериментов (порядка 500). Таким образом, источники были расположены достаточно близко друг к другу, так что соответствующая величина  $\delta\varphi$  была значительно меньше единицы.

Таблица. Параметры сценариев

| Номер сценария | Координаты $\varphi_1, \varphi_2$ , град |      | $\delta\varphi$ | <i>Prob</i> | $\Delta$ , град | СКО, град |
|----------------|--|------|-----------------|-------------|-----------------|-----------|
|                |  |      |                 |             |                 |           |
| 1              | 0  | 2.50 | 0.32            | 1.00        | 1.83            | 0.16      |
| 2              | 0  | 2.90 | 0.38            | 1.00        | 2.04            | 0.17      |
| 3              | 0  | 3.60 | 0.47            | 1.00        | 2.85            | 0.13      |
| 4              | 0  | 4.60 | 0.60            | 1.00        | 4.47            | 0.09      |

Рассмотрим полученные экспериментальные результаты. В левом столбце на рис.3 показаны результаты для метода сканирования лучом AP и спектрального и корневого методов минимального многочлена для ситуации 1, а в правом – для ситуации 2. Эти методы обозначены как спектральный ММ-метод и корневой ММ-метод. Аналогичные результаты для сценариев 3 и 4 приведены на рис. 4.

Из этих результатов следует, что метод минимального многочлена обеспечивал вероятность правильной оценки числа источников равную 100% во всех рассмотренных сценариях сигнальной обстановки. Сканирование лучом AP не привело к угловому разрешению этих источников. Спектральный метод минимального многочлена также не разрешил источники при их угловом расстоянии  $2.5^\circ$  и  $2.9^\circ$  (сценарии 1 и 2), но разрешил их при угловом расстоянии  $3.6^\circ$  и  $4.6^\circ$  (сценарии 3 и 4). Корневой метод минимального многочлена обеспечил разрешение источников во всех случаях.

Оценка углового расстояния между источниками дала меньшую величину по сравнению с реальной, что является характерным для сверхразрешающих методов. СКО измерения координат источников сигналов, полученная с помощью корневого метода минимального многочлена, не превышала 2% от ширины луча AP.

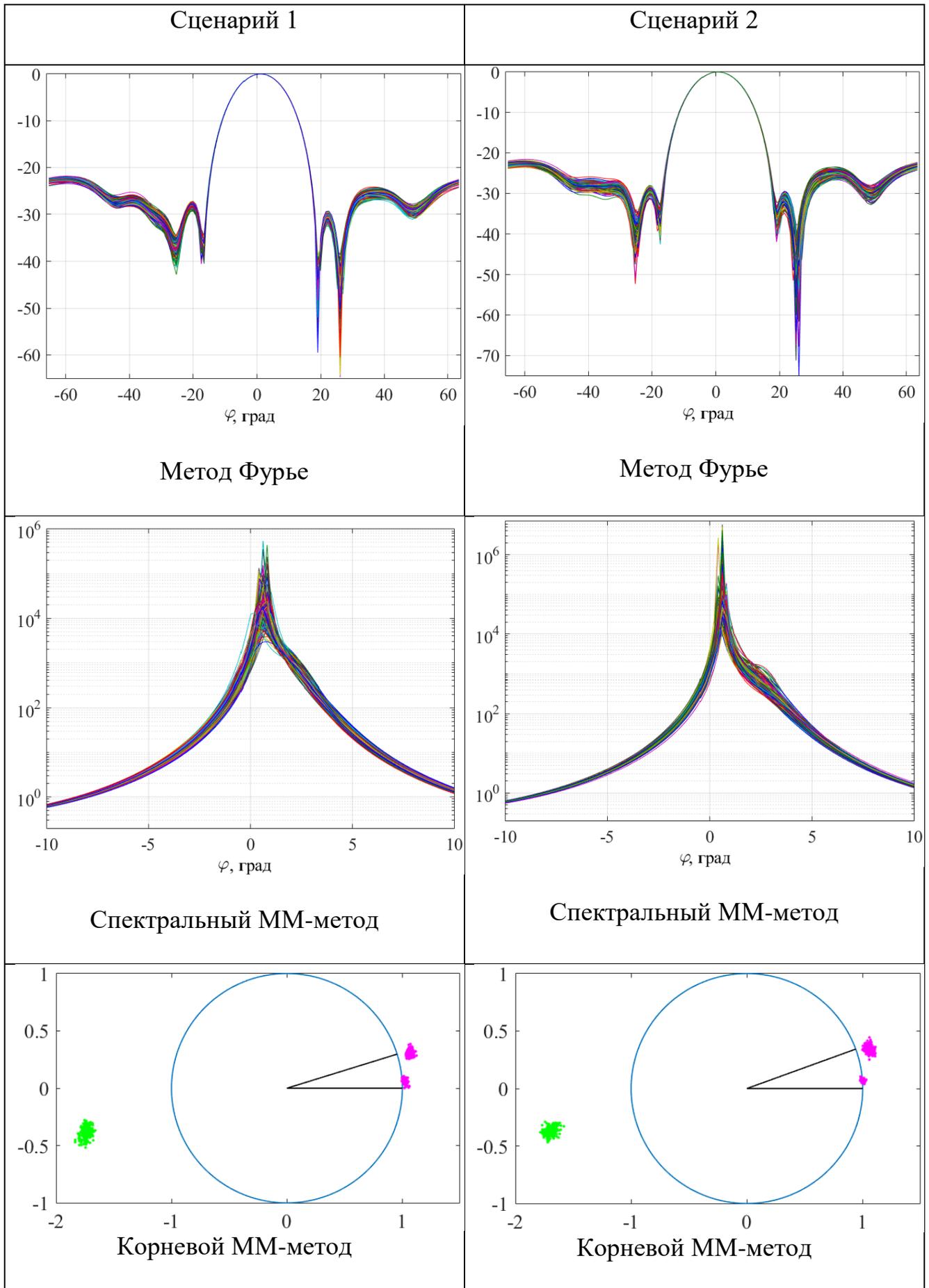


Рис. 3. Экспериментальные результаты для сценариев 1 (слева) и 2 (справа).

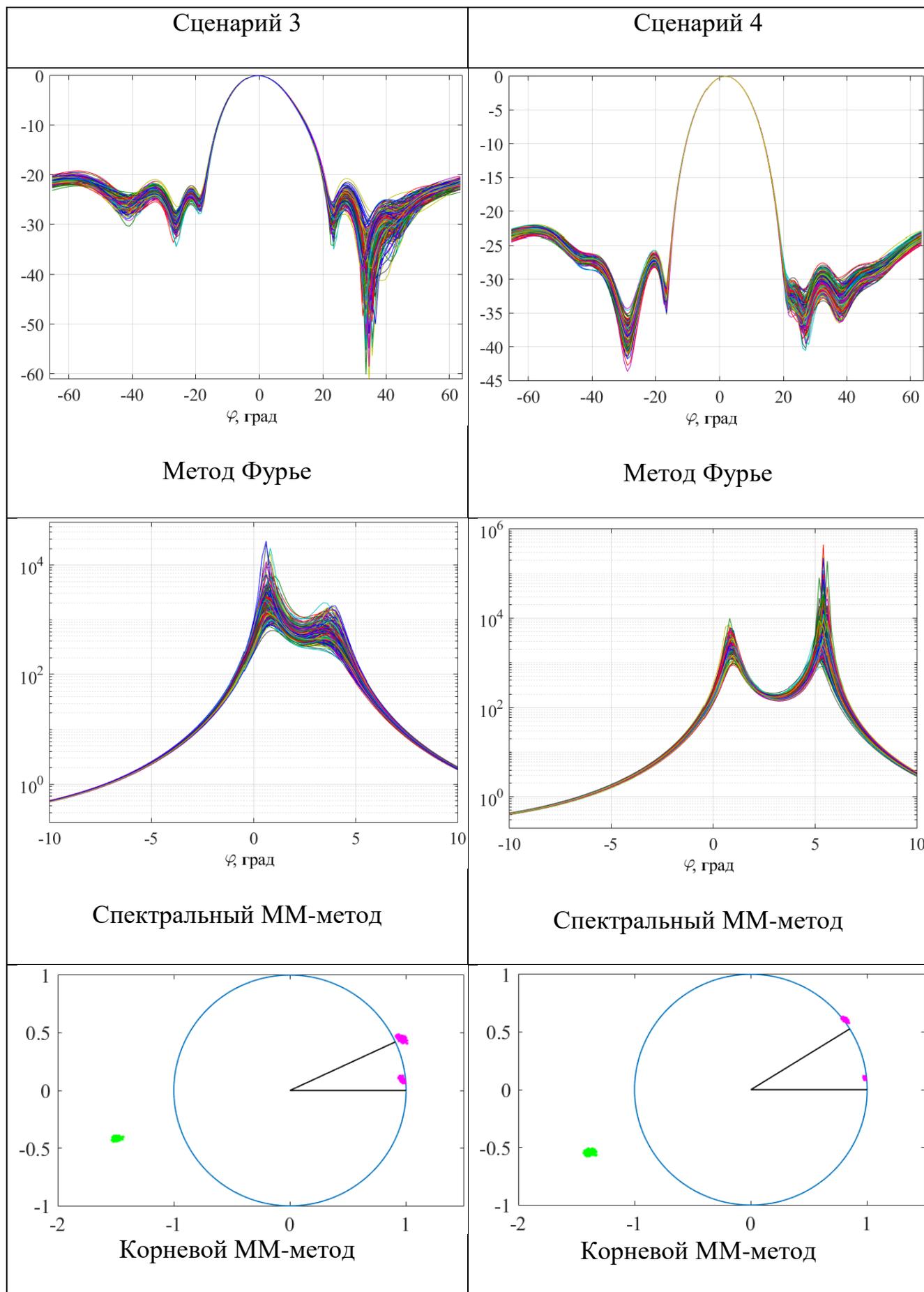


Рис. 4. Экспериментальные результаты для сценариев 3 (слева) и 4 (справа).

## Заключение

В настоящей работе приведены экспериментальные результаты по сверхразрешению близкорасположенных источников сигналов, полученные на автомобильном радиолокаторе миллиметрового диапазона длин волн. Особенностями условий экспериментов были высокая взаимная коррелированность источников сигналов и предельно короткий входной процесс, который состоял только из одной выборки. Оценка числа источников производилась с помощью метода минимального многочлена корреляционной матрицы сигналов в элементах АР. Показано, что этот метод обеспечивал вероятность правильной оценки числа источников равную 100% во всех рассмотренных сценариях сигнальной обстановки. Для нахождения угловых координат источников использовались спектральный и корневой методы минимального многочлена. Сравнительный анализ показал, что корневой метод является более эффективным, так как обеспечивает разрешение источников в случаях значительно меньшего углового расстояния между ними.

## Литература

1. Ратынский М.В. *Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках*. Москва, Радио и связь. 2004. 199 с.
2. Караваев В.В. Сазонов В.В. *Статистическая теория пассивной локации*. Москва, Радио и связь. 1987. 240 с.
3. Godara L.C. *Smart antennas*. London, CRC Press. 2004. 458 p.
4. Tuncer T.E., Friedlander B. *Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation*. London, Elsevier Inc. 2009. 429 p.
5. Турчин В.И. *Введение в современную теорию оценки параметров сигналов*. Н.Новгород, ИПФ РАН. 2005. 116 с.
6. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Анурийн А.А. Оценивание параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1996. Т.39. №9. С.1144–1160.

7. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Елохин А.В., Купцов В.В. Метод минимального многочлена для оценки параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой. *Акустический журнал*. 2018. Т. 64, № 1. С. 78-85.
8. Ермолаев В.Т. Оценивание параметров минимального многочлена сигнальной корреляционной матрицы многоканальной адаптивной приемной системы. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1995. Т. 38. № 8. С. 841–859.
9. Wax M., Kailath T. Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Trans. Acoust. Speech and Signal Process.* 1985. Vol.33. No.2. P. 387–392.
10. Xu G., Roy R., Kailath T. Detection of number of sources via exploitation of centro-symmetry property. *IEEE Transactions on Signal Processing*. 1994. Vol.42. No.1. P. 102-112.
11. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Елохин А.В., Купцов В.В. Метод минимального многочлена для оценки числа источников сигналов в антенной решетке. *Сборник трудов X Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь»*. Москва, ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН. 2016. С. 100-103.
12. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Елохин А.В., Шмонин О.А. Угловое сверхразрешение сигналов в антенной решётке с помощью корневого метода минимального многочлена корреляционной матрицы. *Изв. вузов. Радиофизика*. 2018. Т. 61, № 3. С. 261-272.
13. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Елохин А.В., Шмонин О.А. Экспериментальное исследование углового сверхразрешения двух коррелированных сигналов методом минимального многочлена. *Изв. вузов. Радиофизика*. 2018. Т.61. № 11. С. 945-957.
14. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Москва, Наука. 1988. 552 с.
15. Воеводин В.В. *Линейная алгебра*. Москва, Наука. 1980. 400 с.
16. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. *Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию*. Пер. с англ. Москва, Радио и связь. 1986. 448 с.
17. Уидроу Б., Стирнз С. *Адаптивная обработка сигналов*. Пер. с англ. Москва, Радио и связь. 1989. 440 с.

18. Кобак В.О. *Радиолокационные отражатели*. Москва, Советское радио. 1975. 348 с.

**Для цитирования:**

Аверин И.М., Елохин А.В., Флакман А.Г. Экспериментальное исследование углового сверхразрешения коррелированных источников сигналов методом минимального многочлена. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2021. №2. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.2.3>