

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.2.1>

УДК: 621.396; 681.323

ВЛИЯНИЕ КВАНТОВАНИЯ ВЕСОВЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ НА ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

С.И. Зиятдинов, В.И. Исаков

Санкт-Петербургский государственный университет аэрокосмического
приборостроения, 190000, г. Санкт-Петербург. Ул. Большая Морская, д. 67

Статья поступила в редакцию 10 декабря 2025 г.

Аннотация. Введение. В настоящее время самое широкое применение находят цифровые методы обработки сигналов специализированными цифровыми вычислителями, в которых используется аналого-цифровое преобразование не только входных сигналов, но и весовых коэффициентов цифровых фильтров. В результате преобразования возникают шумы квантования входных сигналов, снижающие эффективность работы специализированного вычислителя. Алгоритмы работы специализированных вычислителей определяются дискретными передаточными функциями цифровых фильтров. Вид передаточной функции конкретного цифрового фильтра задается набором весовых коэффициентов, которые, как и входные сигналы, квантуются по уровню и загружаются в память вычислителя. При квантовании весовых коэффициентов возникают ошибки, величина которых определяется шагом квантования. Ошибки квантования весовых коэффициентов неизбежно оказывают влияние на частотные свойства цифровых фильтров. **Цель.** Произвести оценку влияния шага квантования весовых коэффициентов на частотные характеристики цифровых фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров различных порядков. **Метод.** В процессе

исследований использован метод билинейного z -преобразования частотных передаточных функций непрерывных фильтров-аналогов. **Результаты.** Получены передаточные функции в z -плоскости цифровых фильтров нижних и верхних частот, полосовых и режекторных фильтров различных порядков. Вычислены искажения частотных передаточных функций цифровых фильтров в зависимости от шага квантования весовых коэффициентов. **Выводы.** Квантование весовых коэффициентов приводит к неизбежным искажениям частотных передаточных функций цифровых фильтров, уровень которых определяется величиной шага квантования. Влияние шага квантования на возникающие искажения частотных передаточных функций цифровых фильтров необходимо учитывать при построении цифровых вычислителей, а именно выборе числа двоичных разрядов и шага квантования специализированного вычислителя. Результаты работы будут весьма полезны при создании цифровых систем обработки сигналов.

Ключевые слова: цифровой фильтр, частотная передаточная функция, квантование, весовые коэффициенты.

Автор для переписки: Зиатдинов Сергей Ильич, ziat.53@mail.ru

Введение

При решении задач обнаружения сигналов на фоне различных помех, оценки параметров сигналов, построении систем автоматического сопровождения объектов по дальности, угловым координатам и скорости и т.д. широко используются разнообразные фильтры [1-6]. Это могут быть фильтры нижних и верхних частот, полосовые и режекторные фильтры, адаптивные фильтры с изменяемыми частотными характеристиками.

Вопросы синтеза фильтров и анализа прохождения сигналов, помех в фильтрах глубоко рассмотрены в обширной литературе. При этом синтез фильтров с заданными частотными характеристиками реализуется как во временной, так и частотной областях с использованием импульсных и переходных характеристик, дифференциальных и интегральных уравнений

непрерывных аналогов [5-6]. В случае создания дискретных фильтров, как правило, применяется метод билинейного z -преобразования [7-11].

Разработка цифровых фильтров в настоящее время является актуальным направлением развития методов обработки сигналов. При цифровой фильтрации входные сигналы подвергаются дискретизации во времени и квантованию по уровню. Вопросы выбора периода дискретизации, шага квантования по уровню сигналов в достаточной степени освещены в известной литературе. Вопрос квантования сигналов по уровню, как правило, сводится к расчетам числа двоичных разрядов аналого-цифрового преобразователя (АЦП) и определения цены единицы младшего разряда (шага квантования по уровню) [7-11].

При этом оценка цены единицы младшего разряда АЦП определяется по уровню возникающих при преобразовании шумов квантования, которые можно минимизировать конкретными техническими решениями [8,11]. Однако на практике при построении специализированных вычислителей обработки сигналов всегда возникают ограничения на разрядность и, следовательно, цену единицы младшего разряда АЦП.

Вместе с тем при цифровой фильтрации квантованию по уровню подвергаются не только обрабатываемые сигналы, но и весовые коэффициенты цифровых фильтров. Наличие квантованных по уровню весовых коэффициентов приводит к неизбежному искажению желаемых частотных характеристик фильтров, что обуславливает появление дополнительных ошибок при обработке сигналов. Этот вопрос практически не обсуждается в литературе.

Исследование влияния квантования весовых коэффициентов цифровых фильтров на их частотные характеристики составляет основное содержание настоящей работы.

1. Постановка задачи

В статье рассматривается влияние квантования весовых коэффициентов на частотные характеристики наиболее часто используемых на практике цифровых фильтров нижних частот (ФНЧ), верхних частот (ФВЧ), полосовых фильтров (ПФ) и режекторных фильтров (РФ) различных порядков. В качестве фильтров-аналогов выбирались непрерывные фильтры Баттерворта соответствующих порядков.

Для непрерывных фильтров-аналогов частотные передаточные функции (ЧПФ) в общем виде определяются следующим выражением [7-11]

$$W(j\omega) = \frac{\sum_{i=0}^m c_i [j(\omega \pm \omega_0)]^i}{\sum_{i=0}^n p_i [j(\omega \pm \omega_0)]^i}; \quad m \leq n, \quad (1)$$

где n – порядок фильтра; ω_0 – частота настройки фильтра; c_i, p_i – весовые коэффициенты. Для ФНЧ и ФВЧ в соотношении (1) необходимо положить $\omega_0 = 0$.

Для перехода от непрерывных фильтров к дискретным используется билинейное z -преобразование, которое в случае ФНЧ и ФВЧ имеет вид [9,10]

$$j\omega = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}, \quad (2)$$

где T – период дискретизации (период следования отсчетов входного сигнала), $z = e^{j\omega T}$. В случае полосовых и режекторных фильтров билинейное z -преобразование записывается следующим образом

$$j(\omega \pm \omega_0) = \frac{2}{T} \frac{1 - z_0^{\pm 1} z^{-1}}{1 + z_0^{\pm 1} z^{-1}}. \quad (3)$$

При этом $z_0^{\pm 1} = e^{\pm \omega_0 T}$. После подстановки выражения (2) в формулу (1) и проведения громоздких преобразований можно получить следующую передаточную функцию дискретного фильтра в z -плоскости [7,11]

$$W(z) = \frac{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n b_i z^{-i}}, \quad (4)$$

где a_i, b_i – весовые коэффициенты дискретного фильтра.

В цифровых фильтрах весовые коэффициенты a_i, b_i квантованы по уровню и являются случайными величинами с равномерным распределением в пределах шага квантования δ с дисперсией [7-11]

$$\sigma_{\delta}^2 = \delta^2 / 12.$$

С учетом квантования весовые коэффициенты в выражении (4) принимают вид $a_i = A_i + \Delta a_i$, $b_i = B_i + \Delta b_i$. При этом A_i, B_i – точное значение весовых коэффициентов; $\Delta a_i, \Delta b_i$ – ошибки квантования, которые принимают случайные значения в пределах $\Delta a_i = \pm \delta / 2$ и $\Delta b_i = \pm \delta / 2$.

С учетом возникающих ошибок квантования передаточная функция цифрового фильтра записывается следующим образом

$$W(z) = \frac{\sum_{i=0}^m (A_i + \Delta a_i) z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n (B_i + \Delta b_i) z^{-i}}. \quad (5)$$

Рассмотрим решение задачи определения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) различных цифровых фильтров при возможных изменения ошибок квантования в максимальных пределах $\pm \delta / 2$.

2. Цифровой ФНЧ первого порядка

В качестве аналога цифровому фильтру возьмем непрерывный ФНЧ Баттерворта первого порядка с ЧПФ вида [7]

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$

где τ – постоянная времени. АЧХ рассматриваемого цифрового фильтра с учетом ошибок квантования согласно (5) определяется соотношением

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[(A_0 + \Delta a_0) + (A_1 + \Delta a_1)\cos(\omega T) + (A_1 + \Delta a_1)\sin(\omega T)]^2}{[1 + (B_1 + \Delta b_1)\cos(\omega T) + (B_1 + \Delta b_1)\sin(\omega T)]^2}}, \quad (6)$$

где $A_0 = A_1 = 1 / (1 - 2\tau / T) / (1 + 2\tau / T)$, $B_1 = (1 - 2\tau / T) / (1 + 2\tau / T)$.

На рис. 1 показана АЧХ рассматриваемого цифрового ФНЧ при изменении ошибок квантования в пределах шага квантования δ . При этом принимались значения параметров фильтра $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с.

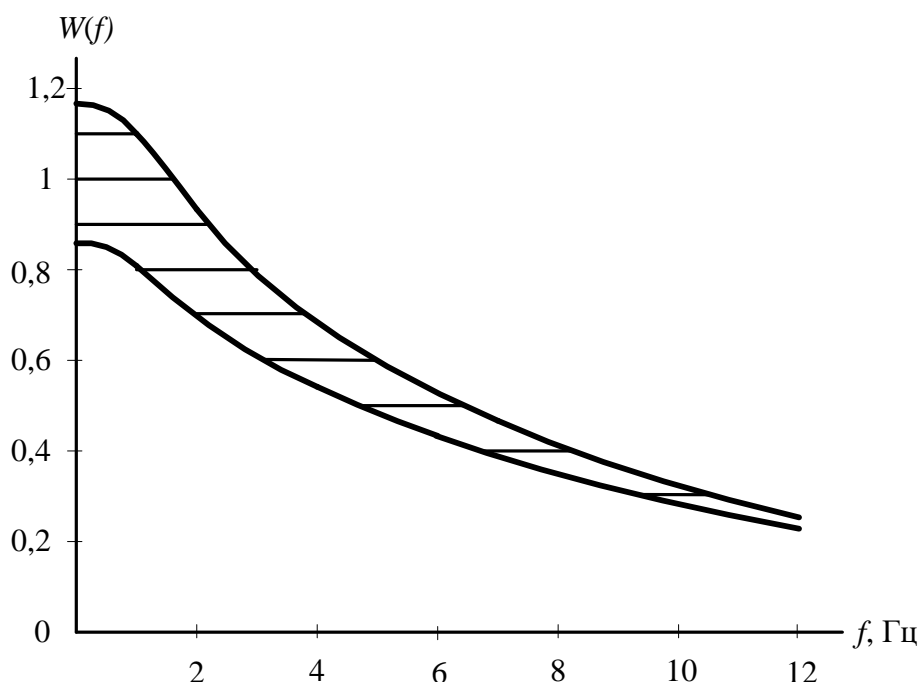


Рис. 1. Амплитудно-частотные характеристики цифрового ФНЧ первого порядка при $\delta = 0,002$.

Заштрихованная область АЧХ соответствует возможным изменениям коэффициента передачи фильтра с учетом ошибок квантования Δa_0 , Δa_1 и Δb_1 . Из представленных результатов расчетов следует, что квантование весовых коэффициентов приводит к максимальному отклонению АЧХ цифрового фильтра относительно АЧХ фильтра при отсутствии ошибок квантования. Так при шаге квантования $\delta = 0,002$ отклонение АЧХ $\Delta W = 38\%$, при $\delta = 0,001$ $\Delta W = 22\%$ и при $\delta = 0,0001$ $\Delta W = 4\%$. Следует отметить, что ошибки квантования в числителе и знаменателе ЧПФ (6) Δa_0 , Δa_1 и Δb_1 вносят практически одинаковый вклад в величину ΔW .

3. Цифровой ФНЧ второго порядка

Пусть аналогом данного фильтра является ФНЧ Баттерворта второго порядка, ЧПФ которого записывается следующим образом [7]

$$W(j\omega) = \frac{\omega_{sr}^2}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega\omega_{sr} + \omega_{sr}^2}, \quad (7)$$

где ω_{sr} – частота среза ($\omega_{sr} = 1/\tau$).

После применения к выражению (7) билинейного преобразования (2) с учетом ошибок квантования весовых коэффициентов АЧХ рассматриваемого цифрового ФНЧ приобретает вид

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[\sum_{i=0}^2 (A_i + \Delta a_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^2 (A_i + \Delta a_i) \sin(\omega iT)]^2}{[1 + \sum_{i=0}^2 (A_i + \Delta a_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^2 (B_i + \Delta b_i) \sin(\omega iT)]^2}},$$

где весовые коэффициенты A_i и B_i находятся из соотношений [9,10]

$$A_0 = T^2 \omega_{sr}^2 / d, \quad A_1 = 2A_0, \quad A_2 = A_0, \quad B_1 = (2T^2 \omega_{sr}^2 - 8) / d, \\ B_2 = (4 - 2T\omega_{sr} + T^2 \omega_{sr}^2) / d, \quad d = 4 + 2T\omega_{sr} + T^2 \omega_{sr}^2.$$

На рис. 2 представлена АЧХ цифрового ФНЧ второго порядка при изменении ошибок квантования $\Delta a_i, \Delta b_i$ в пределах шага квантования δ . При расчетах полагались параметры $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с.

Анализ полученных данных показывает, что при шаге квантования $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 39$ %. При этом в случае $\delta = 10^{-5}$ $\Delta W = 17$ % и при $\delta = 2 \cdot 10^{-6} = 4$ %. Аналогично ФНЧ первого порядка ошибки квантования $\Delta a_i, \Delta b_i$ вносят практически одинаковый вклад в величину ΔW .

4. Цифровой ФНЧ третьего порядка

В качестве аналога возьмем ФНЧ Баттерворта третьего порядка с ЧПФ вида [7]

$$W(j\omega) = \frac{\omega_{sr}^3}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2\omega_{sr} + 2j\omega\omega_{sr}^2 + \omega_{sr}^3}.$$

Переходя к цифровому фильтру в соответствии с ранее изложенной методикой, получим с учетом ошибок квантования весовых коэффициентов АЧХ цифрового фильтра

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[\sum_{i=0}^3 (K_i + \Delta k_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^3 (K_i + \Delta k_i) \sin(\omega iT)]^2}{[1 + \sum_{i=0}^3 (P_i + \Delta p_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^3 (P_i + \Delta p_i) \sin(\omega iT)]^2}},$$

где весовые коэффициенты

$$K_0 = A_0 C_0, \quad K_1 = A_1 C_0 + A_0 C_1, \quad K_2 = A_2 C_0 + A_1 C_1, \quad K_3 = A_2 C_1, \quad P_1 = B_1 + D_1,$$

$$P_2 = B_2 + B_1 D_1, \quad P_3 = B_2 D_1, \quad A_0 = T^2 \omega_{sr}^2 / d, \quad A_1 = 2A_0, \quad A_2 = A_0,$$

$$B_1 = (2T^2 \omega_{sr}^2 - 8) / d, \quad B_2 = (4 - 2T\omega_{sr} + T^2 \omega_{sr}^2) / d, \quad d = 4 + 2T\omega_{sr} + T^2 \omega_{sr}^2;$$

$\Delta k_i, \Delta p_i$ – ошибки квантования соответствующих весовых коэффициентов.

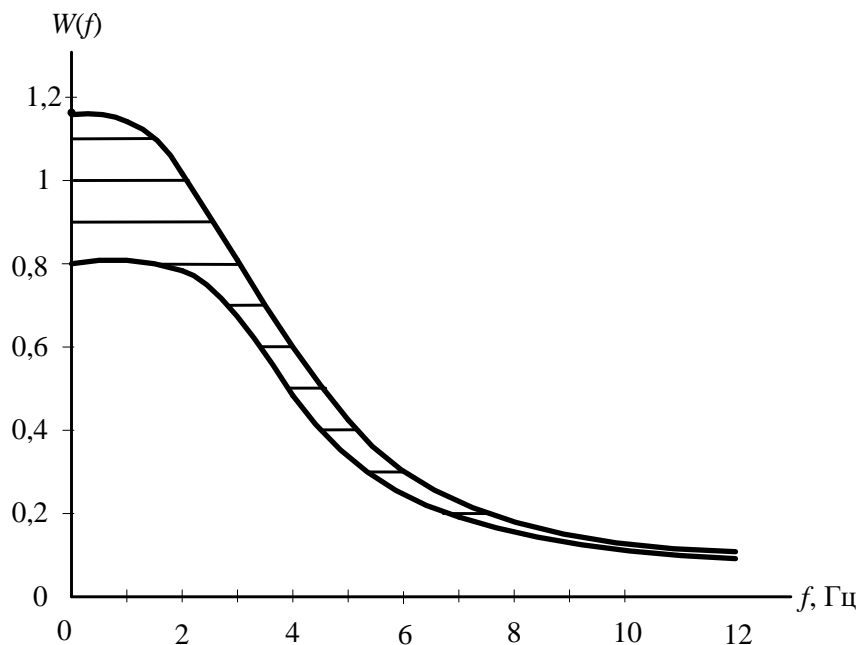


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики цифрового ФНЧ второго порядка при $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$.

На рис. 3 показаны АЧХ рассматриваемого цифрового фильтра для случая изменения ошибок квантования в пределах шага квантования. Как и раньше, были приняты параметры фильтра $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с.

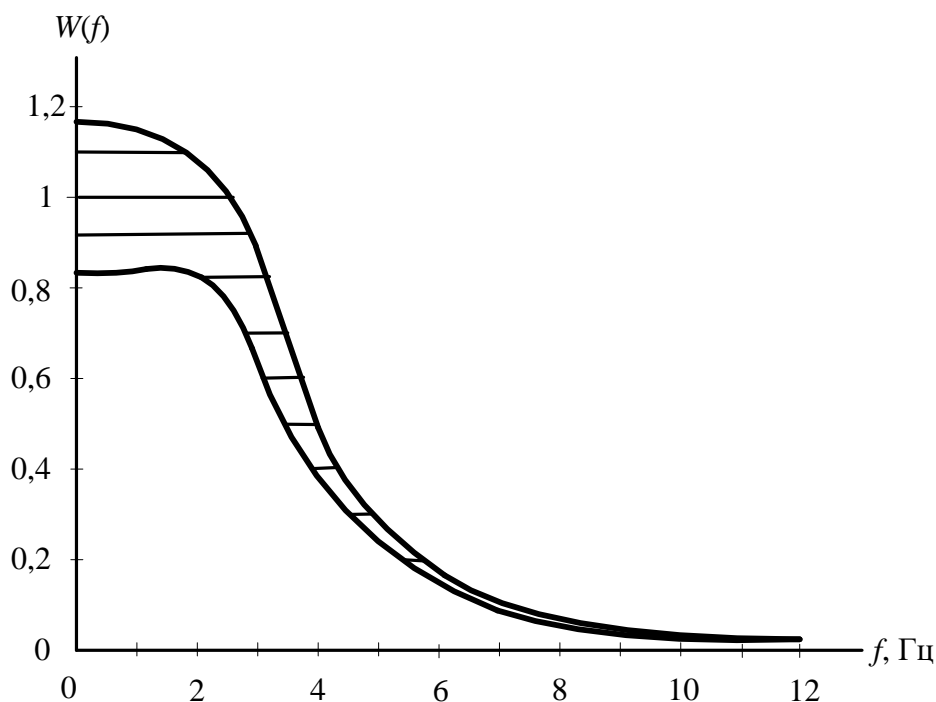


Рис. 3. Амплитудно-частотные характеристики цифрового ФНЧ третьего порядка при $\delta = 4 \cdot 10^{-7}$.

Анализ полученных данных показывает, что при шаге квантования $\delta = 4 \cdot 10^{-7}$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 32$ %. Вместе с тем при $\delta = 2 \cdot 10^{-7}$ $\Delta W = 12$ % и при $\delta = 10^{-7}$ $\Delta W = 7$ %. Аналогично ФНЧ первого и второго порядков ошибки квантования $\Delta a_i, \Delta b_i$ вносят практически одинаковый вклад в величину ΔW .

5. Цифровой ФВЧ первого порядка

Аналогом данного фильтра возьмем непрерывный ФВЧ Баттерворта первого порядка с ЧПФ [7]

$$W(j\omega) = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau},$$

модуль которой с учетом возможных ошибок квантования для цифрового ФВЧ приобретает вид

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[(A_0 + \Delta a_0) + (A_1 + \Delta a_1)\cos(\omega T) + (A_1 + \Delta a_1)\sin(\omega T)]^2}{[1 + (B_1 + \Delta b_1)\cos(\omega T) + (B_1 + \Delta b_1)\sin(\omega T)]^2}},$$

где весовые коэффициенты

$$A_0 = 2\tau / T / (1 + 2\tau / T), \quad A_1 = -A_0, \quad B_1 = (1 - 2\tau / T) / (1 + 2\tau / T).$$

Результаты расчета АЧХ данного фильтра с учетом возможных ошибок квантования при $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с представлены на рис. 4.

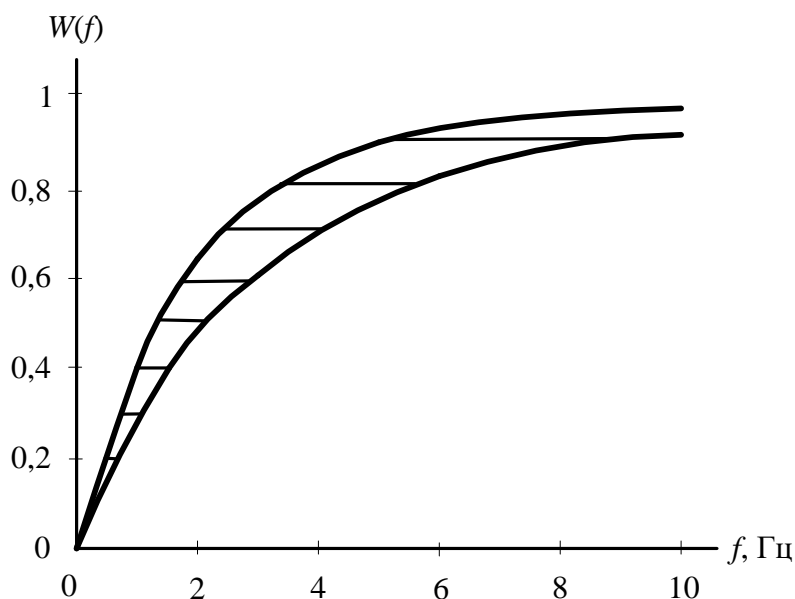


Рис. 4. Амплитудно-частотные характеристики цифрового ФВЧ первого порядка при $\delta = 0,01$.

Из полученных данных следует, что при шаге квантования $\delta = 0,01$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 25\%$. При $\delta = 0,005$ $\Delta W = 10\%$ и при $\delta = 0,002$ $\Delta W = 4\%$. Следует отметить, что основной вклад в значение ΔW вносят ошибки квантования Δb_i .

6. Цифровой ФВЧ второго порядка

Аналогом данного фильтра возьмем непрерывный ФВЧ Баттерворта второго порядка с ЧПФ [7]

$$W(j\omega) = \frac{(j\omega)^2}{(j\omega)^2 + \sqrt{2}j\omega\omega_{sr} + \omega_{sr}^2}.$$

С учетом ранее изложенной методики АЧХ цифрового фильтра второго порядка с учетом возможных ошибок квантования для цифрового ФВЧ может быть записана следующим образом

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[\sum_{i=0}^2 (A_i + \Delta a_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^2 (A_i + \Delta a_i) \sin(\omega iT)]^2}{[1 + \sum_{i=0}^2 (B_i + \Delta b_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^2 (B_i + \Delta b_i) \sin(\omega iT)]^2}},$$

где весовые коэффициенты A_i и B_i находятся из соотношений [8]

$$A_0 = 4/d, \quad A_1 = -2A_0, \quad A_2 = A_0, \quad B_1 = (2T^2\omega_{sr}^2 - 8)/d,$$

$$B_2 = (4 - 2T\omega_{sr} + T^2\omega_{sr}^2)/d, \quad d = 4 + 2T\omega_{sr} + T^2\omega_{sr}^2.$$

На рис. 5 представлена АЧХ цифрового ФВЧ второго порядка при изменении ошибок квантования в пределах шага квантования δ . При расчетах полагались параметры $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с.

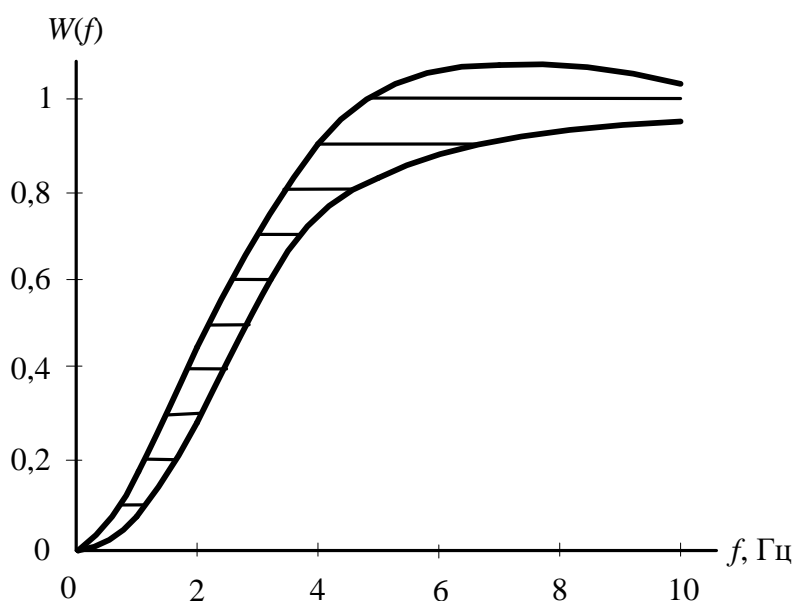


Рис. 5. Амплитудно-частотные характеристики цифрового ФВЧ второго порядка при $\delta = 4 \cdot 10^{-4}$.

В результате можно отметить, что при шаге квантования $\delta = 4 \cdot 10^{-4}$ величин отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 34$ %. Расчеты показывают, что при $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$ $\Delta W = 18$ % и при $\delta = 6 \cdot 10^{-5}$ $\Delta W = 6$ %. Как и в предыдущем случае основной вклад в значение ΔW вносят ошибки квантования Δb_i .

7. Цифровой ФВЧ третьего порядка

Аналогом данного фильтра возьмем непрерывный ФВЧ Баттерворта третьего порядка с ЧПФ с частотной передаточной функцией вида [7]

$$W(j\omega) = \frac{(j\omega)^3}{(j\omega)^3 + 2(j\omega)^2\omega_{sr} + 2j\omega\omega_{sr}^2 + \omega_{sr}^3},$$

для которой при переходе к цифровому фильтру с учетом ошибок квантования весовых коэффициентов АЧХ записывается следующим образом [9,10]

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[\sum_{i=0}^3 (K_i + \Delta k_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^3 (K_i + \Delta k_i) \sin(\omega iT)]^2}{[1 + \sum_{i=0}^3 (P_i + \Delta p_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^3 (P_i + \Delta p_i) \sin(\omega iT)]^2}},$$

где весовые коэффициенты

$$K_0 = A_0 C_0, \quad K_1 = A_1 C_0 + A_0 C_1, \quad K_2 = A_2 C_0 + A_1 C_1, \quad K_3 = A_2 C_1, \quad P_1 = B_1 + D_1,$$

$$P_2 = B_2 + B_1 D_1, \quad P_3 = B_2 D_1, \quad A_0 = 4/d, \quad A_1 = -2A_0, \quad A_2 = A_0, \quad C_1 = -C_0,$$

$$B_1 = (2T^2\omega_{sr}^2 - 8)/d, \quad B_2 = (4 - 2T\omega_{sr} + T^2\omega_{sr}^2)/d, \quad D_1 = (1 - 2\tau/T)/(1 + 2\tau/T),$$

$$d = 4 + 2T\omega_{sr} + T^2\omega_{sr}^2;$$

$\Delta k_i, \Delta p_i$ – ошибки квантования соответствующих весовых коэффициентов.

На рис. 6 показаны АЧХ рассматриваемого цифрового фильтра для случая изменения ошибок квантования в пределах шага квантования. Как и раньше, были приняты параметры фильтра $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с.

Результаты показывают, что при шаге квантования $\delta = 2 \cdot 10^{-6}$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 30$ %. В тоже время при $\delta = 1 \cdot 10^{-6}$ $\Delta W = 13$ % и при $\delta = 4 \cdot 10^{-7}$ $\Delta W = 6$ %. Аналогично предыдущим случаям основной вклад в значение ΔW вносят ошибки квантования Δb_i .

8. Цифровой ПФ второго порядка

В связи с тем, что полосовой фильтр имеет в полосе пропускания коэффициент передачи близкий к единице, а за ее пределами коэффициент передачи стремится к нулю, ЧПФ полосового фильтра представим в виде суммы двух ЧПФ полосовых фильтров Баттеворта первого порядка [5]

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) + W_2(j\omega),$$

где $W_1(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega - \omega_0)\tau}$; $W_2(j\omega) = \frac{1}{1 + j(\omega + \omega_0)\tau}$. В данных выражениях

ω_0 – частота настройки ПФ, ω_{sr} – частота среза ($\omega_{sr} = 1/\tau$).

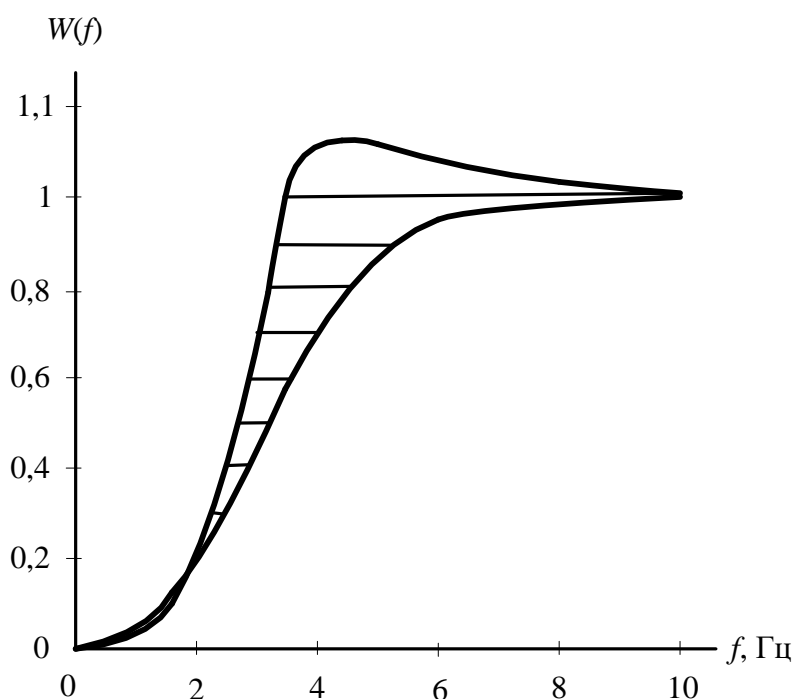


Рис. 6. Амплитудно-частотные характеристики цифрового ФВЧ третьего порядка при $\delta = 2 \cdot 10^{-6}$.

После перехода от непрерывных фильтров к дискретным можно записать

$$W_1(z) = \frac{A_0 + A_1 z_0 z^{-1}}{1 + B_1 z_0 z^{-1}}; \quad W_2(z) = \frac{A_0 + A_1 z_0^{-1} z^{-1}}{1 + B_1 z_0^{-1} z^{-1}},$$

где $A_0 = A_1 = 1/(1 - 2\tau/T)/(1 + 2\tau/T)$, $B_1 = (1 - 2\tau/T)/(1 + 2\tau/T)$.

После сложения передаточных функций $W_1(z)$ и $W_2(z)$ с учетом ошибок квантования весовых коэффициентов получим АЧХ цифрового ПФ второго порядка

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[\sum_{i=0}^2 (C_i + \Delta c_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^2 (C_i + \Delta c_i) \sin(\omega iT)]^2}{[1 + \sum_{i=0}^2 (D_i + \Delta d_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^2 (D_i + \Delta d_i) \sin(\omega iT)]^2}}$$

При этом

$$C_0 = 2A_0, \quad C_1 = 2(A_1 + A_0 B_1) \cos(\omega_0 T), \quad C_2 = 2A_1 B_1, \quad D_1 = 2B_1 \cos(\omega_0 T), \quad D_2 = B_1^2.$$

На рис. 7 представлена АЧХ цифрового ПФ второго порядка при изменении ошибок квантования в пределах шага квантования δ . При расчетах полагались параметры $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с.

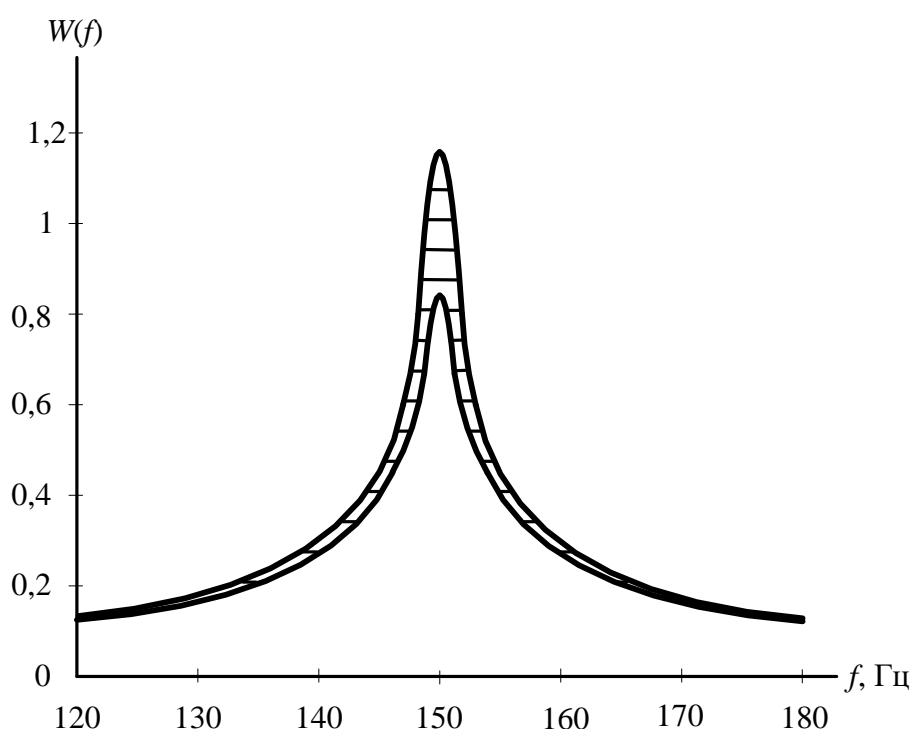


Рис. 7. Амплитудно-частотные характеристики цифрового ПФ второго порядка при $\delta = 0,004$.

В результате при шаге квантования $\delta = 0,004$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 27\%$. В тоже время при $\delta = 0,002$ $\Delta W = 14\%$ и при $\delta = 0,0005$ $\Delta W = 5\%$. Расчеты показывают, что ошибки квантования $\Delta c_i, \Delta d_i$ вносят практически одинаковый вклад в величину ΔW .

9. Цифровой ПФ четвертого порядка

Аналогично предыдущему случаю ЧПФ рассматриваемого фильтра представим в виде суммы двух ЧПФ непрерывных полосовых фильтров Баттерворта второго порядка [7]

$$W_1(j\omega) = \frac{\omega_{sr}^2}{[j(\omega - \omega_0)]^2 + \sqrt{2}j(\omega - \omega_0)\omega_{sr} + \omega_{sr}^2},$$

$$W_2(j\omega) = \frac{\omega_{sr}^2}{[j(\omega + \omega_0)]^2 + \sqrt{2}j(\omega + \omega_0)\omega_{sr} + \omega_{sr}^2}.$$

После применения к данным выражениям билинейного преобразования (2) с учетом ошибок квантования весовых коэффициентов АЧХ рассматриваемого цифрового ПФ приобретает вид

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[\sum_{i=0}^4 (C_i + \Delta c_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^4 (C_i + \Delta c_i) \sin(\omega iT)]^2}{[1 + \sum_{i=1}^4 (D_i + \Delta d_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^4 (D_i + \Delta d_i) \sin(\omega iT)]^2}},$$

где весовые коэффициенты C_i и D_i находятся из соотношений

$$C_0 = 2A_0, \quad C_1 = 2(A_1 + A_0B_1) \cos(\omega_0 T), \quad C_2 = 2(A_2 + A_0B_2) \cos(2\omega_0 T) + 2A_2B_2,$$

$$C_3 = 2(A_2B_1 + A_1B_2) \cos(\omega_0 T), \quad C_4 = 2A_2B_2, \quad D_1 = 2B_1 \cos(\omega_0 T),$$

$$D_2 = 2B_2 \cos(2\omega_0 T) + 2B_1^2, \quad D_3 = 2B_1B_2 \cos(\omega_0 T), \quad D_4 = B_2^2, \quad A_0 = T^2 \omega_{sr}^2 / d,$$

$$A_1 = 2A_0, \quad A_2 = A_0, \quad B_1 = (2T^2 \omega_{sr}^2 - 8) / d, \quad B_2 = (4 - 2T\omega_{sr} + T^2 \omega_{sr}^2) / d,$$

$$d = 4 + 2T\omega_{sr} + T^2 \omega_{sr}^2.$$

На рис. 8 представлена АЧХ цифрового ПФ четвертого порядка при изменении ошибок квантования в пределах шага квантования δ . При расчетах полагались параметры $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с.

Результаты показывают, что при шаге квантования $\delta = 7 \cdot 10^{-5}$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 32$ %, при $\delta = 4 \cdot 10^{-5}$ $\Delta W = 18$ % и при $\delta = 5 \cdot 10^{-6}$ $\Delta W = 5$ %. При этом ошибки квантования $\Delta c_i, \Delta d_i$ вносят практически одинаковый вклад в величину ΔW .

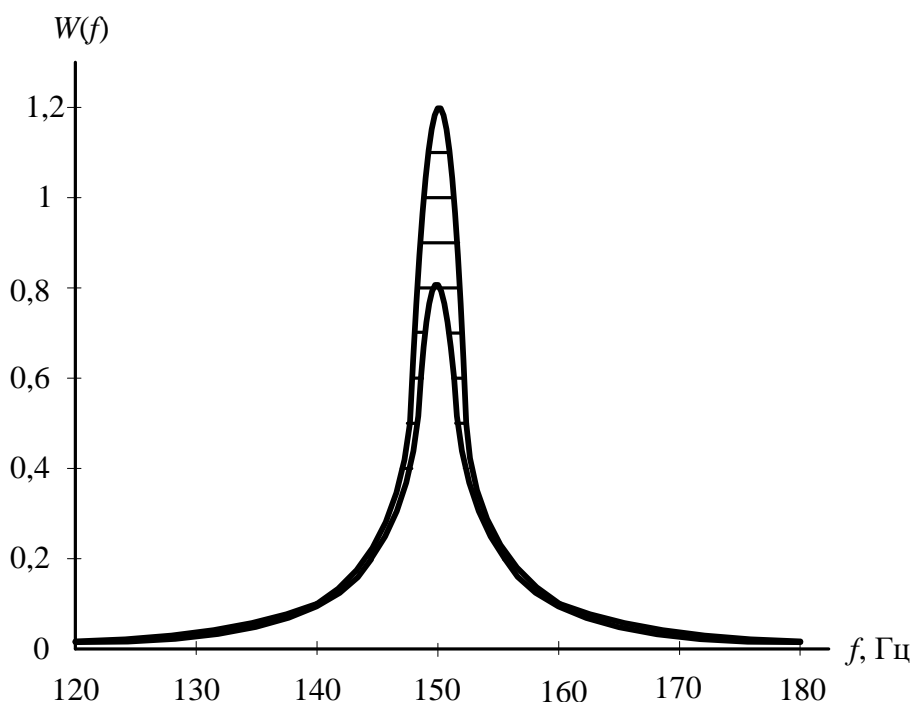


Рис. 8. Амплитудно-частотные характеристики цифрового ПФ четвертого порядка при $\delta = 7 \cdot 10^{-5}$.

10. Цифровой ПФ второго порядка

С учетом того, что режекторный фильтр в полосе задержания имеет коэффициент передачи близкий к нулю, а за ее пределами – близкий к единице ЧПФ режекторного фильтра представим произведением двух ЧПФ режекторных фильтров с частотами настройки, симметрично расположенными относительно нуля частот [5]

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) * W_2(j\omega),$$

где $W_1(j\omega) = \frac{j(\omega - \omega_0)\tau}{1 + j(\omega - \omega_0)\tau}$; $W_2(j\omega) = \frac{j(\omega + \omega_0)\tau}{1 + j(\omega + \omega_0)\tau}$.

При этом ω_0 – частота настройки ПФ. Перейдем от непрерывных фильтров к дискретным. Тогда можно записать

$$W_1(z) = \frac{A_0 + A_1 z_0 z^{-1}}{1 + B_1 z_0 z^{-1}}; W_2(z) = \frac{A_0 + A_1 z_0^{-1} z^{-1}}{1 + B_1 z_0^{-1} z^{-1}},$$

где $A_0 = \frac{2\tau/T}{(1 + 2\tau/T)}$, $A_1 = -A_1$, $B_1 = \frac{1 - 2\tau/T}{1 + 2\tau/T}$.

После перемножения передаточных функций $W_1(z)$ и $W_2(z)$ с учетом ошибок квантования весовых коэффициентов получим АЧХ цифрового РФ второго порядка

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[\sum_{i=0}^2 (C_i + \Delta c_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^2 (C_i + \Delta c_i) \sin(\omega iT)]^2}{[1 + \sum_{i=0}^2 (D_i + \Delta d_i) \cos(\omega iT)]^2 + [\sum_{i=1}^2 (D_i + \Delta d_i) \sin(\omega iT)]^2}}$$

При этом

$$C_0 = A_0^2, C_1 = 2A_0A_1 \cos(\omega_0 T), C_2 = 2A_1^2, D_1 = 2B_1 \cos(\omega_0 T), D_2 = B_1^2.$$

На рис. 9 изображена АЧХ цифрового РФ второго порядка при изменении ошибок квантования в пределах шага квантования δ . При расчетах полагались параметры $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с.

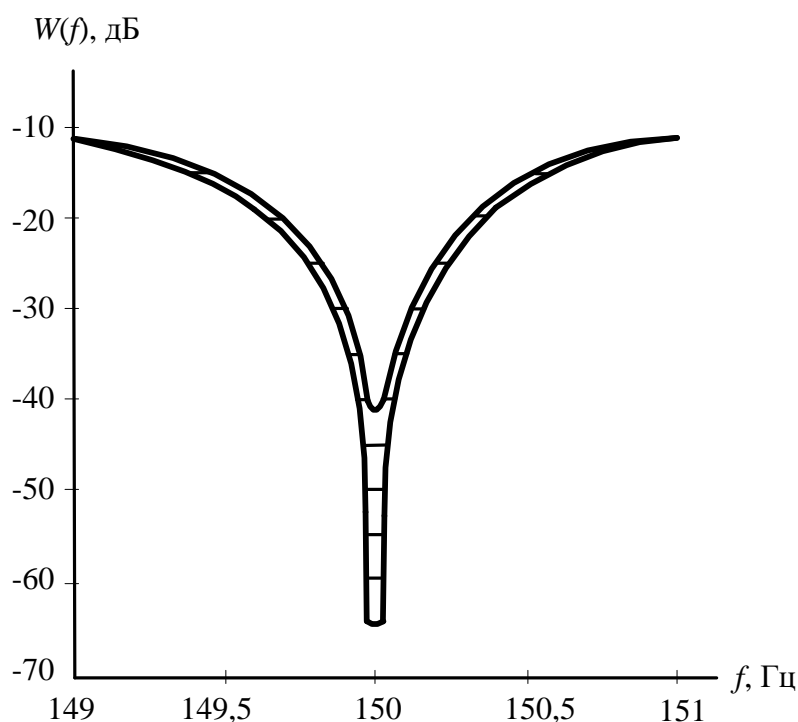


Рис. 9. Амплитудно-частотные характеристики цифрового РФ второго порядка при $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$.

Можно отметить, что при шаге квантования $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 35$ дБ, при $\delta = 8 \cdot 10^{-5}$ $\Delta W = 24$ дБ и при $\delta = 6 \cdot 10^{-6}$ $\Delta W = 8$ дБ. При этом ошибки квантования Δc_i вносят основной вклад в величину ΔW .

11. Цифровой РФ четвертого порядка.

Аналогично предыдущему случаю ЧПФ рассматриваемого фильтра представим в виде произведения двух ЧПФ непрерывных режекторных фильтров Баттерворта второго порядка [5]

$$W_1(j\omega) = \frac{[j(\omega - \omega_0)]^2}{[j(\omega - \omega_0)]^2 + \sqrt{2}j(\omega - \omega_0)\omega_{sr} + \omega_{sr}^2},$$

$$W_2(j\omega) = \frac{[j(\omega + \omega_0)]^2}{[j(\omega + \omega_0)]^2 + \sqrt{2}j(\omega + \omega_0)\omega_{sr} + \omega_{sr}^2}.$$

После применения к данным выражениям билинейного преобразования (2) с учетом ошибок квантования весовых коэффициентов АЧХ рассматриваемого цифрового РФ приобретает вид

$$W(\omega) = \sqrt{\frac{[\sum_{i=0}^4 (C_i + \Delta c_i) \cos(\omega i T)]^2 + [\sum_{i=1}^4 (C_i + \Delta c_i) \sin(\omega i T)]^2}{[1 + \sum_{i=1}^4 (D_i + \Delta d_i) \cos(\omega i T)]^2 + [\sum_{i=1}^4 (D_i + \Delta d_i) \sin(\omega i T)]^2}},$$

где весовые коэффициенты C_i и D_i находятся из соотношений [5,6]

$$C_0 = A_0^2, \quad C_1 = 2A_0A_1 \cos(\omega_0 T), \quad C_2 = A_1^2 + 2A_0A_2 \cos(2\omega_0 T),$$

$$C_3 = 2A_1A_2 \cos(\omega_0 T), \quad C_4 = A_2^2, \quad D_1 = 2B_1 \cos(\omega_0 T),$$

$$D_2 = 2B_2 \cos(2\omega_0 T) + 2B_1^2, \quad D_3 = 2B_1B_2 \cos(\omega_0 T), \quad D_4 = B_2^2, \quad A_0 = T^2 \omega_{sr}^2 / d,$$

$$A_1 = 4/d, \quad A_2 = -2A_0, \quad B_1 = (2T^2 \omega_{sr}^2 - 8) / d,$$

$$B_2 = (4 - 2T\omega_{sr} + T^2 \omega_{sr}^2) / d, \quad d = 4 + 2T\omega_{sr} + T^2 \omega_{sr}^2.$$

На рис. 10 представлена АЧХ цифрового РФ четвертого порядка при изменении ошибок квантования в пределах шага квантования δ . При расчетах полагались параметры $\tau = 0,05$ с и $T = 0,001$ с.

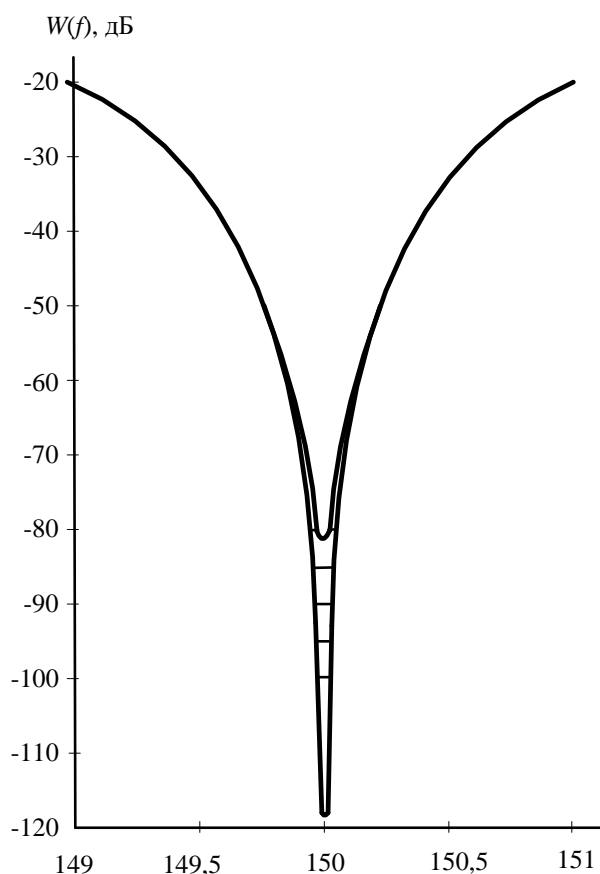


Рис. 10. Амплитудно-частотные характеристики цифрового РФ четвертого порядка при $\delta = 4 \cdot 10^{-8}$.

Анализ полученных данных показывает, что при шаге квантования $\delta = 4 \cdot 10^{-8}$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 45$ дБ, при $\delta = 2 \cdot 10^{-8}$ $\Delta W = 30$ дБ и при $\delta = 2 \cdot 10^{-9}$ $\Delta W = 15$ дБ. При этом ошибки квантования Δc_i вносят решающий вклад в величину ΔW .

12. Обсуждение результатов

Из проведенных исследований следует, что квантование весовых коэффициентов приводит к отклонению АЧХ цифрового фильтра относительно АЧХ фильтра при отсутствии ошибок квантования. Так в случае ФНЧ первого порядка при шаге квантования $\delta = 0,002$ отклонение АЧХ $\Delta W = 38$ %, при $\delta = 0,001$ $\Delta W = 22$ % и при $\delta = 0,0001$ $\Delta W = 4$ %. Для ФНЧ второго порядка при шаге квантования $\delta = 2 \cdot 10^{-5}$ $\Delta W = 39$ %, при $\delta = 10^{-5}$ $\Delta W = 17$ % и при $\delta = 2 \cdot 10^{-6}$ $\Delta W = 4$ %. Для ФНЧ третьего порядка анализ полученных данных показывает, что при шаге квантования $\delta = 4 \cdot 10^{-7}$ величина отклонения

АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 32\%$, при $\delta = 2 \cdot 10^{-7}$ $\Delta W = 12\%$ и при $\delta = 10^{-7}$ $\Delta W = 7\%$.

Следует отметить, что при повышении порядка ФНЧ требуемая величина шага квантования, обеспечивающая приемлемые отклонения АЧХ цифрового ФНЧ ΔW , резко уменьшается. При этом на значение отклонения АЧХ цифрового фильтра ΔW ошибки квантования $\Delta a_i, \Delta b_i$ вносят практически одинаковый вклад.

Для ФВЧ первого порядка из полученных данных следует, что при шаге квантования $\delta = 0,01$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 25\%$, при $\delta = 0,005$ $\Delta W = 10\%$ и при $\delta = 0,002$ $\Delta W = 4\%$. Δb_i . В тоже время при шаге квантования $\delta = 4 \cdot 10^{-4}$ $\Delta W = 34\%$, при $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$ $\Delta W = 18\%$ и при $\delta = 6 \cdot 10^{-5}$ $\Delta W = 6\%$. В случае использования ФВЧ третьего порядка при шаге квантования $\delta = 2 \cdot 10^{-6}$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 30\%$, при $\delta = 1 \cdot 10^{-6}$ $\Delta W = 13\%$ и при $\delta = 4 \cdot 10^{-7}$ $\Delta W = 6\%$.

Можно отметить, что при реализации ФВЧ основной вклад в значение ΔW вносят ошибки квантования Δb_i . В тоже время при повышении порядка ФВЧ требуемая цена шага квантования, обеспечивающая приемлемые отклонения АЧХ цифрового фильтра ΔW , резко уменьшается.

Аналогичные результаты для ПФ второго порядка выглядят следующим образом – при шаге квантования $\delta = 0,004$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 27\%$, при $\delta = 0,002$ $\Delta W = 14\%$ и при $\delta = 0,0005$ $\Delta W = 5\%$. В случае ПФ четвертого порядка при шаге квантования $\delta = 7 \cdot 10^{-5}$ величина отклонения $\Delta W = 32\%$, при $\delta = 4 \cdot 10^{-5}$ $\Delta W = 18\%$ и при $\delta = 5 \cdot 10^{-6}$ $\Delta W = 5\%$.

При этом ошибки квантования $\Delta c_i, \Delta d_{i1}$ вносят практически одинаковый вклад в величину ΔW АЧХ ПФ. Аналогично ФНЧ и ФВЧ при повышении порядка ПФ требуемая величина шага квантования, обеспечивающая приемлемые отклонения АЧХ цифрового фильтра ΔW , резко уменьшается.

В случае фильтрации сигнала режекторными фильтрами для РФ второго порядка при шаге квантования $\delta = 2 \cdot 10^{-4}$ величина отклонения АЧХ $\Delta W = 35$ дБ, при $\delta = 8 \cdot 10^{-5}$ $\Delta W = 24$ дБ и при $\delta = 6 \cdot 10^{-6}$ $\Delta W = 8$ дБ. Анализ полученных данных показывает, что для РФ четвертого порядка при шаге квантования $\delta = 4 \cdot 10^{-8}$ величина отклонения АЧХ цифрового фильтра $\Delta W = 45$ дБ, при $\delta = 2 \cdot 10^{-8}$ $\Delta W = 30$ дБ и при $\delta = 2 \cdot 10^{-9}$ $\Delta W = 15$ дБ. При этом в случае использования РФ ошибки квантования Δc_i вносят решающий вклад в величину ΔW . Можно отметить, что при повышении порядка РФ требуемая цена шага квантования, обеспечивающая приемлемые отклонения АЧХ цифрового фильтра ΔW , резко уменьшается.

Заключение

При ограниченной разрядности АЦП в составе цифрового фильтра возникают неизбежные ошибки квантования как обрабатываемых сигналов, так и весовых коэффициентов, связанные с конечной величиной шага квантования. Появление ошибок квантования приводит не только к возникновению шумов квантования сигналов, снижающих эффективность обработки, но и к искажениям АЧХ используемых фильтров. Поэтому при исследовании и практической реализации различных цифровых фильтров необходимо учитывать ошибки квантования не только фильтруемых сигналов, но и весовых коэффициентов фильтров. Проведенный анализ показал, что повышение порядка фильтров требует резкого снижения шага квантования и, следовательно, увеличения разрядности АЦП, что в значительной степени усложняет реализацию специализированных вычислителей.

Литература

1. Бакулев П.А. Радиолокационные системы. М.: Радиотехника, 2004. 319 с.
2. Котоусов А.С., Морозов А.К. Оптимальная фильтрация и компенсация помех. М.: Горячая линия – Телеком, 2008. 166 с.

3. Попов Д.И. Адаптация рекурсивных режекторных фильтров // Известия вузов. Поволжский регион. Технические науки. 2022. №4. С. 45-56. <https://doi.org/10.21685/2072-3059-2022-4-5>
4. Попов Д.И. Оптимизация цифровых систем обработки сигналов // Изв. вузов. Поволжский регион. Технические науки. 2017. №14. С.96-105. <https://doi:10.21685/2072-3059-2017-1-8>
5. Зиятдинов С.И. Синтез дискретных полосовых и режекторных фильтров с использованием инвариантных импульсных и переходных характеристик // Изв. Вузов России. Приборостроение. 2022. Т. 65. № 12. С. 19-27. <https://doi:17585/0021-3454-2022-65-1-19-27>
6. Зиятдинов С.И. Синтез дискретных фильтра методами инвариантных дифференциальных и интегральных уравнений // Изв. Вузов России. Приборостроение. 2019. Т. 62. № 5. С. 424-432. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.12.6>
7. Воробьев С.Н. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Издательский дом «Академия», 2013. 318 с.
8. Куприянов М.С., Матюшкин Б. Д. Цифровая обработка сигналов. СПб.: Политехника, 2000. 592 с.
9. Гадзиковский В.И. Теоретические основы цифровой обработки сигналов. М.: Радиоисвязь, 2004. 344 с.
10. Гадзиковский В.И. Методы проектирования цифровых фильтров. М.: Горячая линия – Телеком, 2007. 416 с.
11. Сергиенко А.В. Цифровая обработка сигналов. СПб.: БХВ-Петербург, 2015. 756 с.

Для цитирования:

Зиятдинов С.И., Исаков В.И. Влияние квантования весовых коэффициентов на частотные характеристики цифровых фильтров // Журнал радиоэлектроники. – 2026. – №. 2. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.2.1>