

DOI <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.1.3>

УДК 621.396.6

ОБОБЩЕНИЕ СВЕРХРАЗРЕШАЮЩЕГО МЕТОДА МИНИМАЛЬНОГО МНОГОЧЛЕНА ДЛЯ ПЕЛЕНГАЦИИ ЦЕЛЕЙ В УСЛОВИЯХ ПРОСТРАНСТВЕННО-ОКРАШЕННОГО ШУМА И ПОМЕХ

О. А. Шмонин

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

Статья поступила в редакцию 21 декабря 2020 г.

Аннотация. В работе рассмотрена проблема оценки углового положения близкорасположенных источников излучения на фоне пространственно-окрашенного шума и помех. Предложено два варианта обобщения сверхразрешающего метода минимального многочлена на случай произвольной корреляционной матрицы шума/помех. Первый вариант основан на особенностях формирования сигнального векторного подпространства в условиях пространственно-окрашенного шума, второй – на обеляющем преобразовании. Приведено теоретическое обоснование обоих подходов и доказана их эквивалентность. Эффективность предложенного метода исследована с помощью численного моделирования в сравнении с классическим методом минимального многочлена. Показано, что в условиях пространственно-распределённых помех предложенный алгоритм позволяет обеспечить значительный выигрыш в разрешающей способности и уменьшить величину систематической ошибки. При этом среднеквадратичная ошибка оценки угловых координат для классического и обобщённого методов примерно совпадают.

Ключевые слова: антенная решётка, сверхразрешение, пеленгация, оценка угловых координат, пространственно-окрашенный шум, помехи.

Abstract. The article is dedicated to super-resolution and direction of arrival (DOA) estimation problems under spatially colored noise and interference conditions. Super-

resolution minimal polynomial method (MPM) is considered. The base method uses a signal received by antenna array assuming that noise in each array element is independent and has certain power. It also supposes that there are only signals which directions of arrival need to be estimated. In other words, there is no interference. The practice shows that these assumptions may not be satisfied in real-world systems. Interference problem arises both in radar and radio communication applications. In a dense scattering environment (e.g. the urban) there is multipath propagation effect. It makes interference spatially-distributed and decreases DOA estimation algorithms resolution ability. In order to overcome these problems the generalized minimal polynomial method (GMPM) is developed and proposed in this paper. Two approaches for generalization are considered. The first is based on features of the signal subspace forming under spatially colored noise conditions. The second is relied on the signal transformation which leads to identity noise correlation matrix. Theoretical description is presented for both approaches. Furthermore, the approaches equivalence is proved. Efficiency of the proposed algorithm is investigated in comparison with base MPM. It is shown that in case of spatially-distributed interference the proposed method gives opportunity to achieve a sufficient gain in resolution ability and DOA estimation accuracy in comparison with the base MPM algorithm.

Key words: antenna array, super-resolution, bearing, direction of arrival estimation, spatially colored noise, interference.

Введение

Методы оценки параметров источников радиоизлучения (ИРИ) с помощью антенных решёток находят широкое применение в различных областях науки и техники, в том числе в радиолокации и радиосвязи [1-3]. В случае, когда угловое расстояние между источниками меньше ширины главного лепестка диаграммы направленности антенны (Релеевский предел разрешения), применяют сверхразрешающие методы, к числу которых относятся метод Кейпона (MVDR, Minimum Variance Distortionless Response

Estimator), MUSIC (MUltiple SIgnal Classification), ESPRIT (Estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques), метод минимального многочлена корреляционной матрицы [4-8]. Последние три можно отнести к группе параметрических методов, использующих свойства линейного пространства сигнала, принятого антенной решёткой, а именно возможность его разделения на два подпространства: сигнальное и шумовое [5,8].

Как правило, задача сверхразрешения рассматривается на фоне собственных шумов антенной решётки. При этом полагается, что шумы в элементах антенной решётке независимы и имеют одинаковую мощность [4-6,8]. На практике данное условие не всегда выполняется, кроме того, возможно наличие внешних источников помех, что нарушает сигнальную модель сверхразрешающих методов и приводит к снижению их эффективности. В работе [7] описывается подход, позволяющий обобщить методы ESPRIT и MUSIC на случай произвольной корреляционной матрицы шума. В данном подходе традиционное спектральное разложение полной корреляционной матрицы сигнала заменяется спектральным разложением для пучка, состоящего из полной корреляционной матрицы и корреляционной матрицы шума (обобщённая проблема собственных чисел и векторов) [9,10].

Метод минимального многочлена был предложен в [6] и получил свое развитие в работах [8,11-13]. Этот метод в отличие от методов MUSIC и ESPRIT не требует вычисления собственных чисел и векторов корреляционной матрицы для разделения шумового и сигнального подпространств, а использует для этого оценку минимального многочлена корреляционной матрицы. Так же стоит отметить, что метод минимального многочлена позволяет в рамках единой вычислительной процедуры оценивать как число источников излучения, так и их угловое положение. В тоже время, методы ESPRIT и MUSIC требуют информацию о числе ИРИ, для получения которой обычно используются критерии AIC или MDL [4,5].

В работах [8,11] приведены результаты моделирования и экспериментального исследования методов минимального многочлена и

MUSIC/MDL, на которых показано что точность оценки угловых координат для данных методов практически совпадает, а в условиях короткой временной выборки входного процесса метод минимального многочлена превосходит критерий MDL по вероятности правильной оценки числа ИРИ.

Однако метод минимального многочлена рассматривался исключительно в условиях некоррелированных собственных шумов приёмных устройств антенных элементов и отсутствия внешних помех. При этом подход, описанный в [7], не может быть применён к нему непосредственно.

В данной работе предложено два варианта обобщения метода минимального многочлена на случай произвольной корреляционной матрицы шума при наличии внешних источников помех. Первый подход основан непосредственно на особенностях построения сигнального подпространства в условиях пространственно-окрашенного шума, а второй предполагает применение обеляющего преобразования сигнала и стандартного метода минимального многочлена. В работе предложено два варианта обеляющего преобразования: на основе квадратного корня и разложения Холецкого для корреляционной матрицы шума/помех, а также строго доказана эквивалентность всех рассмотренных подходов. Стоит отметить, что подход на основе обеляющего преобразования может быть также применён к методу MUSIC в качестве альтернативы.

Эффективность предложенного обобщённого метода минимального многочлена исследована с помощью численного моделирования. Рассмотрен случай пространственно-распределённой помехи, возникающей в условиях плотной городской застройки за счёт многолучевого распространения помехового сигнала и его рассеивания на окружающих объектах. Подобный характер распространения сигнала всегда учитывается в моделях канала для мобильных систем связи. В данной работе для моделирования распределённого источника помех была выбрана гауссова модель рассеивателей, предложенная в [14] на основе анализа экспериментальных данных.

Эффективность предложенного обобщённого метода минимального многочлена исследовалось в сравнении со стандартным методом минимального многочлена. При моделировании рассматривалась разрешающей способностью и точностью оценки угловых координат при различных конфигурациях источников помех.

Отметим, что предварительные результаты, связанные с результатами данной работы, были доложены и опубликованы автором в трудах конференций [12,13]. В настоящей статье, наряду с расширенными результатами моделирования, впервые приводится полное подробное описание предлагаемого обобщённого метода минимального многочлена и его теоретическое обоснование.

1. Модель сигнала и помех

Рассмотрим случай, когда в дальней зоне антенной решётки располагаются J точечных узкополосных источников сигнала, угловое положение θ которых требуется оценить. Также будем полагать, что помимо полезного сигнала на входе антенной решётки присутствует пространственно-окрашенный шум, вызванный пространственно-распределёнными источниками помех. К последнему также добавляется некоррелированный собственный шум приёмных устройств. Дискретную выборку сигнала с индексом l можно представить в виде вектора

$$\mathbf{x}(l) = \sum_{q=1}^J a_q(l) \mathbf{s}(\theta_q) + \sum_m \xi_m(l) + \xi_{noise}(l) = \mathbf{S}\mathbf{a}(l) + \xi_{\Sigma}(l), \quad (1)$$

где a_q – комплексная амплитуда источника полезного сигнала; $\mathbf{s}(\theta_q)$ – фазирующий вектор источника полезного сигнала; ξ_m – вектор источника помехи; ξ_{noise} – вектор собственного шума, \mathbf{S} – матрица, столбцами которой являются фазирующие векторы источников сигнала, ξ_{Σ} – суммарный вектор помех и шума. При этом фазирующий вектор точечного источника сигнала для линейной эквидистантной антенной решётки определяется следующим образом:

$$\mathbf{s}(\varphi) = [1 \quad \exp\{i2\pi d_\lambda \sin \varphi\} \quad \dots \quad \exp\{i2\pi(N-1)d_\lambda \sin \varphi\}]^T, \quad (2)$$

где $(\cdot)^T$ – транспонирование матрицы, d_λ – период антенной решётки в единицах длины волны, N – число элементов антенной решётки.

Корреляционная матрица \mathbf{M} принятого сигнала представляется в виде:

$$\mathbf{M} = \langle \mathbf{x}(l)\mathbf{x}^H(l) \rangle = \mathbf{S} \langle \mathbf{a}\mathbf{a}^H \rangle \mathbf{S}^H + \sum_m \mathbf{T}_m + \mathbf{T}_{noise} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^H + \mathbf{T}_\Sigma, \quad (3)$$

где \mathbf{A} – корреляционная матрица источников сигнала, \mathbf{T}_m – корреляционная матрица m -ной помехи, \mathbf{T}_{noise} – корреляционная матрица собственного шума, \mathbf{T}_Σ – суммарная корреляционная матрица шума и помех, $(\cdot)^H$ – эрмитово сопряжение.

2. Метод минимального многочлена при отсутствии помех

Метод минимального многочлена корреляционной матрицы был предложен в [6] и получил развитие в работах [8,11]. В его основе лежит теорема Гамильтона-Кэли, согласно которой корреляционная матрица удовлетворяет своему характеристическому многочлену. Характеристический многочлен может быть сведён к минимальному и преобразован к виду:

$$\Psi(\mathbf{M}) = (\mathbf{E} - \gamma_1\mathbf{M})(\mathbf{E} - \gamma_2\mathbf{M})\dots(\mathbf{E} - \gamma_{J+1}\mathbf{M}) = \mathbf{0}, \quad (4)$$

где $\gamma_m = 1/\lambda_m$; $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_{J+1} = \sigma^2$ – отличные друг от друга собственные числа корреляционной матрицы, количество которых на единицу превосходит число источников излучения [4,5,8]; σ^2 – мощность собственного шума; \mathbf{E} – единичная матрица; $\mathbf{0}$ – нулевая матрица.

Таким образом, оценив степень минимального многочлена можно оценить число источников излучения. С другой стороны, из множителей выражения (4) можно составить матрицу-проектор на шумовое подпространство, аннулирующую фазирующие векторы источников излучения [6]

$$\mathbf{P} = \left[\prod_{m=1}^J (\mathbf{E} - \gamma_m\mathbf{M}) \right] \left[\prod_{m=1}^J (1 - \gamma_m/\gamma_{J+1}) \right]^{-1}. \quad (5)$$

Данная матрица служит основой для псевдоспектрального и корневого подхода к пеленгации источников излучения [8]. При псевдоспектральном подходе угловое положение источников излучения определяется посредством отыскания пиков пространственного спектра:

$$\eta(\varphi) = (\mathbf{s}^H(\varphi) \mathbf{P}^2 \mathbf{s}(\varphi))^{-1}. \quad (6)$$

При применении корневого подхода, угловое положение источников излучения оценивается путём отыскания корней полинома $f(z)$, составленного на основе знаменателя выражения (6) путём замены комплексной экспоненты на новую переменную $z = \exp\{i2\pi d_\lambda \sin \varphi\}$, т.е.

$$f(z) = \sum_{k=-(N-1)}^{N-1} a_k z^k, \quad a_m = \sum_{k=1}^{N-m} (\mathbf{P}^2)_{k,k+m}, \quad a_{-m} = a_m^* \quad (m \geq 0). \quad (7)$$

Среди корней представленного полинома на комплексной плоскости отбираются J наиболее близких к единичной окружности, лежащих внутри либо вне её.

На практике точная корреляционная матрица сигнала не известна, поэтому применяется её максимально-правдоподобная оценка по L временным выборкам входного процесса [15]:

$$\hat{\mathbf{M}} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \mathbf{x}(l) \mathbf{x}^H(l). \quad (8)$$

При этом минимальный многочлен точной корреляционной матрицы \mathbf{M} аппроксимируется матричным многочленом степени m от её оценки $\hat{\mathbf{M}}$. Средний квадрат ошибки аппроксимации определяет метрику метода минимального многочлена

$$I^{(m)} = \min_{\hat{\gamma}_k} Sp \left[\prod_{k=1}^m (\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \hat{\mathbf{M}})^2 \right]. \quad (9)$$

В работах [6,11] предложены несколько способов вычисления параметров $\hat{\gamma}_k$, например, из решения системы нелинейных уравнений вида [6]

$$\hat{\gamma}_n = Sp \left[\hat{\mathbf{M}} \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{E} - \hat{\gamma}_i \hat{\mathbf{M}})^2 \right] \left\{ Sp \left[\hat{\mathbf{M}}^2 \prod_{i=1, i \neq n}^m (\mathbf{E} - \hat{\gamma}_i \hat{\mathbf{M}})^2 \right] \right\}^{-1}. \quad (10)$$

При оценке числа источников сигналов выполняется последовательный перебор гипотез о степени m минимального многочлена. Процесс останавливается, когда значение очередной метрики $I^{(m)}$ станет меньше порога Th . Уровень порога выбирается на основе априорной информации о системе [11]. В общем случае рекомендуется назначать порог, исходя из гипотезы о наличии в антенной решетке только собственного шума (т.е. $J = 0$). Тогда [6]

$$Th = \langle I^{(1)} | J = 0 \rangle + 3\sigma, \quad (11)$$

$$\langle I^{(1)} | J = 0 \rangle = \frac{N^2 - 1}{N + L}, \quad (12)$$

$$\sigma = \sqrt{2} \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N + L} \sqrt{1 + \frac{(2N^2 - 3)}{NL}}. \quad (13)$$

3. Обобщение метода на случай пространственно-окрашенного шума

3.1. Подход на основе обобщённой проблемы собственных чисел

В основе многих методов сверхразрешения, таких как MUSIC, ESPRIT и метод минимального многочлена лежит тот факт, что собственные векторы корреляционной матрицы, соответствующие J наибольшим собственным числам, определяют то же линейное подпространство, что и фазирующие векторы источников излучения, а остальные собственные векторы – ортогональное подпространство [4-6]. Действительно, если в (3) матрица $\mathbf{T}_\Sigma = \mathbf{E}$, то матрица \mathbf{M} имеет те же собственные векторы, что и матрица \mathbf{SAS}^H , а их собственные числа отличаются на единицу. При этом можно убедиться непосредственной подстановкой, что всякий собственный вектор матрицы \mathbf{SAS}^H , соответствующий ненулевому собственному числу, может быть представлен в виде линейной комбинации фазирующих векторов источников. Фазирующие векторы источников излучения линейно независимы, так же как и собственные векторы, поэтому обратное утверждение также справедливо.

В случае наличия внешних шумов матрица \mathbf{T}_Σ отлична от единичной, что приводит к нарушению указанного выше свойства. Данная проблема решается

с помощью так называемых «обобщённых» собственных чисел и векторов (generalized eigenvalue problem), которая в литературе также связана с регулярным пучком квадратичных форм [9,10]. Общая постановка проблемы обобщённых собственных чисел и векторов выглядит следующим образом:

$$\mathbf{M}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{T}_{\Sigma}\mathbf{v}. \quad (14)$$

где λ – обобщённое собственное число, а \mathbf{v} – обобщённый собственный вектор. В силу положительной определённости корреляционных матриц \mathbf{M} и \mathbf{T}_{Σ} , все обобщённые собственные числа действительны и положительны [9]. Кроме того, выполняются следующие условия [9,10]:

$$\mathbf{V}^H\mathbf{M}\mathbf{V} = \mathbf{\Lambda}; \quad \mathbf{V}^H\mathbf{T}_{\Sigma}\mathbf{V} = \mathbf{E} \quad (15)$$

где на главной диагонали матрицы $\mathbf{\Lambda}$ стоят обобщённые собственные числа, а столбцами матрицы \mathbf{V} являются соответствующие им обобщённые собственные векторы.

Из (3) и (14) следует, что обобщённые собственные векторы для матриц \mathbf{M} и \mathbf{SAS}^H совпадают, а обобщённые собственные числа отличаются на единицу. Последнее утверждение можно записать в матричном виде и, учитывая (15), получить:

$$\mathbf{SAS}^H = \mathbf{T}_{\Sigma}\mathbf{V}(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{E})\mathbf{V}^H\mathbf{T}_{\Sigma}. \quad (16)$$

Применив к последнему выражению неравенства Сильвестра и Фробениуса [16] получим, что $rank(\mathbf{\Lambda} - \mathbf{E}) = rank(\mathbf{SAS}^H) = J$. Следовательно, существует ровно $J+1$ различных обобщённых собственных чисел корреляционной матрицы \mathbf{M} . Учитывая линейную независимость фазирующих векторов, линейную независимость обобщённых собственных векторов, а также выражения (3) и (14) получим, что подпространство определяемое векторами вида $\mathbf{T}_{\Sigma}\mathbf{v}$, соответствующих собственным числам $\lambda > 1$, совпадает с подпространством фазирующих векторов источников. Остальные векторы образуют шумовое подпространство.

Из (14) можно видеть, что обобщённые собственные числа и векторы являются решением спектральной задачи для матрицы $\mathbf{T}_\Sigma^{-1}\mathbf{M}$. Следовательно, для данной матрицы можно составить минимальный многочлен и на его основе произвести оценку числа ИРИ.

$$\Psi(\mathbf{T}_\Sigma^{-1}\mathbf{M}) = (\mathbf{E} - \gamma_1 \mathbf{T}_\Sigma^{-1}\mathbf{M})(\mathbf{E} - \gamma_2 \mathbf{T}_\Sigma^{-1}\mathbf{M}) \dots (\mathbf{E} - \gamma_{J+1} \mathbf{T}_\Sigma^{-1}\mathbf{M}) = 0, \quad (17)$$

В реальной ситуации, когда известны только оценки корреляционных матриц по конечному числу временных выборок, степень минимального многочлена оценивается так же как описано в разделе 2, т.е. на основе выражений (9) и (10), с заменой в них матрицы $\hat{\mathbf{M}}$ на $\hat{\mathbf{T}}_\Sigma^{-1}\hat{\mathbf{M}}$. Здесь мы полагаем, что корреляционная матрица шума и помех может быть оценена независимо, используя (8). Вопрос выбора порога метода минимального многочлена будет рассмотрен далее.

Для оценки углового положения ИРИ необходимо построить проектор на шумовое подпространство, который можно составить из множителей вида $(\mathbf{E} - \gamma_m \mathbf{M}\mathbf{T}_\Sigma^{-1})$. Действительно, каждый из данных множителей преобразует векторы базиса сигнального и шумового подпространств следующим образом:

$$(\mathbf{E} - \gamma_m \mathbf{M}\mathbf{T}_\Sigma^{-1})\mathbf{T}_\Sigma \mathbf{v}_k = (\mathbf{T}_\Sigma \mathbf{v}_k - \gamma_m \mathbf{M}\mathbf{v}_k) = \left(1 - \frac{\gamma_m}{\gamma_k}\right) \mathbf{T}_\Sigma \mathbf{v}_k, \quad (18)$$

Если $m = k$, то последнее выражение становится равным нулю. Как показано выше, любой вектор сигнального подпространства может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{T}_\Sigma \mathbf{v}_k$ для $k = 1 \dots J$, соответствующих наибольшим обобщённым собственным числам (наименьшим параметрам γ_k). Следовательно, следующий проектор аннулирует векторы сигнального подпространства (в том числе и фазирующие векторы источников) и не искажает векторы шумового подпространства:

$$\mathbf{P} = \left[\prod_{m=1}^J (\mathbf{E} - \gamma_m \mathbf{M}\mathbf{T}_\Sigma^{-1}) \right] \left[\prod_{m=1}^J (1 - \gamma_m / \gamma_{J+1}) \right]^{-1}. \quad (19)$$

Далее угловое положение источников оценивается, следуя (6) или (7).

3.2. Подход на основе обеляющего преобразования

Иным подходом, сводящим задачу оценки параметров ИРИ на фоне внешних помех к ранее рассмотренной задаче оценки числа и углового положения ИРИ на фоне собственного шума (см. раздел 2), является применение обеляющего линейного преобразования сигнала. Общая схема алгоритма в этом случае приведена на рис.1.



Рис.1. Общая схема подхода на основе обеляющего преобразования.

Существуют различные способы построения матрицы \mathbf{D} обеляющего преобразования. Некоторые из них будут рассмотрены далее. На выходе обеляющего преобразования мы имеем сигнал $\mathbf{y}(l) = \mathbf{D}^H \mathbf{x}(l)$, корреляционная матрица которого имеет вид:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \langle \mathbf{y}(l) \mathbf{y}^H(l) \rangle = \mathbf{D}^H \mathbf{M} \mathbf{D} = \mathbf{D}^H \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^H \mathbf{D} + \mathbf{D}^H \mathbf{T}_\Sigma \mathbf{D} = \mathbf{D}^H \mathbf{S} \mathbf{A} \mathbf{S}^H \mathbf{D} + \mathbf{E}. \quad (20)$$

Преобразование \mathbf{D} выбирается взаимно однозначным, поэтому размерности шумового и сигнального подпространства не изменяются. В целом, постановка задачи становится аналогичной описанной в разделе 2, следовательно, представленное в нём решение, в частности (9) и (10), может быть применено к «обелённому» сигналу для оценки параметров источников излучения. Однако стоит отметить, что обеляющее преобразование искажает фазирующие векторы источников сигнала, как видно из (20), поэтому для оценки углового положения

источников непосредственно с помощью (6) или (7) проектор на шумовое подпространство (5) должен быть модифицирован. В результате получим:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{D}^{-1})^H \left[\prod_{m=1}^J (\mathbf{E} - \gamma_m \mathbf{M}) \right] \left[\prod_{m=1}^J (1 - \gamma_m / \gamma_{J+1}) \right]^{-1} \mathbf{D}^H. \quad (21)$$

Рассмотрим преобразования фазирующего вектора источника $\mathbf{s}(\varphi)$ в (6) с помощью матрицы-проектора (21). Логика внесённой модификации следующая: сначала вектор $\mathbf{s}(\varphi)$ с помощью матрицы \mathbf{D}^H обеляющего преобразования преобразуется в систему координат, в которой заданы «обелённый» сигнал и матричный проектор (5). Затем с помощью этого проектора находится проекция на шумовое подпространство и, наконец, полученный вектор преобразуется обратно в исходную систему координат умножением на матрицу $(\mathbf{D}^{-1})^H$.

Условие на обеляющее преобразование можно задать как $\mathbf{D}^H \mathbf{T}_\Sigma \mathbf{D} = \mathbf{E}$. Существует, как минимум, два варианта его построения. Первый основан на собственном разложении корреляционной матрицы шума и определяется следующим образом [9]:

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_\Sigma^{-0.5} = \sum_k \mu_k^{-0.5} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^H, \quad (22)$$

где μ_k и \mathbf{u}_k собственные числа и векторы матрицы \mathbf{T}_Σ . Во втором используется разложение Холецкого $\mathbf{T}_\Sigma = \mathbf{R}\mathbf{R}^H$, которое существует в силу положительной определённости корреляционной матрицы, и где \mathbf{R} – нижняя треугольная матрица [17]. В этом случае $\mathbf{D} = (\mathbf{R}^{-1})^H$. В справедливости предложенных способов построения обеляющего преобразования можно убедиться непосредственной подстановкой соответствующих матриц \mathbf{D} в (20).

3.3. Эквивалентность предложенных подходов

Предложенные выше подходы к обобщению метода минимального многочлена на случай пространственно-окрашенного шума являются математически эквивалентными. Рассмотрим выражение (9) для метрики метода $I^{(m)}$, адаптированное на основе первого подход (см. пункт 3.1)

$$I^{(m)} = \min_{\hat{\gamma}_k} Sp \left[\prod_{k=1}^m (\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \widehat{\mathbf{T}}_{\Sigma}^{-1} \widehat{\mathbf{M}})^2 \right]. \quad (23)$$

Воспользуемся свойством операции взятия следа матрицы $Sp(\mathbf{D}^{-1} \mathbf{H} \mathbf{D}) = Sp(\mathbf{H})$ [9], умножив выражение (23) под оператором $Sp(\cdot)$ слева на матрицу \mathbf{D}^{-1} и справа на \mathbf{D} . Кроме того, из условия обеляющего преобразования получим $\mathbf{T}_{\Sigma}^{-1} = \mathbf{D} \mathbf{D}^H$ и вставим между скобками-множителями матрицу $\mathbf{E} = \mathbf{D} \mathbf{D}^{-1}$. В итоге, внося матрицы \mathbf{D}^{-1} и \mathbf{D} внутрь скобок, получим:

$$I^{(m)} = \min_{\hat{\gamma}_k} Sp \left[\prod_{k=1}^m (\mathbf{E} - \hat{\gamma}_k \mathbf{D}^H \widehat{\mathbf{M}} \mathbf{D})^2 \right]. \quad (24)$$

Учитывая, что $\mathbf{D}^H \mathbf{M} \mathbf{D} = \tilde{\mathbf{M}}$ (что верно и для оценённых корреляционных матриц) получим выражение для метрики минимального многочлена при обеляющем подходе. Следовательно, значения метрик $I^{(m)}$ и параметров γ для двух подходов совпадают. Аналогично можно показать, что проекторы (19) и (21) также совпадают, что приводит к полной эквивалентности результатов. Учитывая, что эквивалентность была доказана вне зависимости от способа построения обеляющего преобразования, можно заключить, что результаты для различных преобразований также эквивалентны.

3.4 Порог метода минимального многочлена

Рассмотрим случай точно известной корреляционной матрицы помехи. Так же будем полагать, что на вход антенной решётки поступает только сигнал помехи. В этом случае корреляционная матрица принятого сигнала после обеляющего преобразования становится единичной, т.е. мы получили постановку задачи, как и для стандартного метода минимального многочлена. Следуя [18], можно показать в этом случае справедливость выражений (11), (12) и (13). Учитывая эквивалентность предложенных выше подходов к обобщению метода минимального многочлена, получим справедливость данного порога для любого из них.

В случае, когда корреляционная матрица помех оценивается по конечному числу выборок помехового сигнала, обеляющее преобразование становится случайным и в силу его нелинейности получить аналитически

выражение для порога обобщённого метода минимального многочлена становится затруднительным. Однако практика показывает, что порог, рассчитанный в предположении точно известной корреляционной матрицы помех, работает и в случае её оценки. Это подтверждается результатами моделирования, приведёнными в данной статье, а также результатами, представленными в [13].

4. Результаты моделирования

Для оценки эффективности предложенного алгоритма было проведено численное моделирование. Рассматривалась линейная эквидистантная антенная решётка с числом элементов $N = 10$ и периодом $d = 0.5\lambda$. Полная корреляционная матрица \mathbf{M} оценивалась по $L = 20$ временным выборкам сигнала, как показано в (8). Корреляционная матрица шума и помех \mathbf{T}_Σ аналогично оценивалась в отсутствии полезного сигнала по $Q = 100$ временным выборкам. Сигнал полезных источников и помех моделировался как комплексный узкополосный гауссовский случайный процесс с нулевым средним. Дискретные отсчёты сигнала по времени полагались некоррелированными.

Два точечных узкополосных независимых источника излучения равной мощности располагались на угловых координатах $\pm 4^\circ$. Угловое расстояние между источниками равнялось 0.8 ширины главного лепестка диаграммы направленности антенной решётки. Мощность источников излучения варьировалась в ходе численного эксперимента.

Собственные шумы приёмных устройств различных элементов антенной решётки полагались независимыми. Мощность собственного шума в отдельном элементе задавалась равной 0 дБ. Отдельно были рассмотрены случаи точечной и распределённой помехи.

В качестве показателей эффективности рассматривались следующие метрики:

- вероятность p правильной оценки числа целей, находящихся в угловом секторе $(-14^\circ, 14^\circ)$, которая характеризует качество

сверхразрешения метода. Данный угловой сектор будем называть «зоной контроля» или «областью контроля».

- среднее значение оценки углового положения полезных источников излучения $\langle \theta \rangle$ при условии $p > 0.8$.
- среднеквадратичное отклонение (СКО) оценки углового положения полезных источников излучения σ при условии $p > 0.8$.

Для оценки перечисленных выше статистических характеристик для каждого значения мощности полезных источников излучения проводилось 1000 независимых численных экспериментов.

В силу эквивалентности различных подходов к обобщению метода минимального многочлена моделирование проводилось для подхода на основе обеляющего преобразования с применением разложения Холецкого, как обладающего наименьшей вычислительной сложностью. Эффективность предложенного алгоритма (GMPM, Generalized Minimal Polynomial Method) сравнивалась с эффективностью классического метода минимального многочлена (MPM) [8], описанного в разделе 2. Для обоих алгоритмов применялся корневой подход к пеленгации (7). Кроме того, результаты для классического метода минимального многочлена были получены в условиях наличия помех (MPM-I) и в условиях их отсутствия (MPM-NI) для оценки влияния помеховой обстановки на качество работы алгоритма сверхразрешения. Во всех случаях порог метода был установлен равным $Th = 5.28$ в соответствии с (11).

При проведении численного моделирования внешние распределённые помехи полагались независимыми узкополосными источниками с распределенной по гауссову закону угловой плотностью мощности. Данная модель была предложена для описания угловой дисперсии в канале мобильной связи в городских условиях и хорошо совпадала с результатами реальных измерений [14]. Применительно к задаче пеленгации источников излучения можно считать, что помеха создается рассеянным на окружающих объектах сигналом, исходящим от точечного радиопередатчика. Для приведённой

модели нормированная угловая плотность мощности помехи с эффективной угловой шириной θ_{eff} и угловой координатой θ_0 записывается в виде:

$$W(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi\theta_{eff}}} \exp\left\{-\frac{(\theta - \theta_0)^2}{\theta_{eff}^2}\right\}. \quad (25)$$

В [3] рассчитан коэффициент корреляции помех с приведённой угловой плотностью мощности в двух приёмниках, разнесённых на заданное расстояние. Таким образом, элементы корреляционной матрицы помехового сигнала, принимаемого от одного источника помехи мощностью ν_I , определяются выражением:

$$\{\mathbf{T}\}_{m,n} = \nu_I \exp\left\{i2\pi(n-m)\frac{d}{\lambda}\theta_0\right\} \exp\left\{-\left(\pi(n-m)\frac{d}{\lambda}\theta_{eff}\right)^2\right\}. \quad (26)$$

Сигнал помехи моделировался как дополнительный аддитивный шум с заданной корреляционной матрицей.

В первой серии численных экспериментов один источник помехи с эффективной шириной 10° имел угловую координату 20° и мощность 10 дБ.

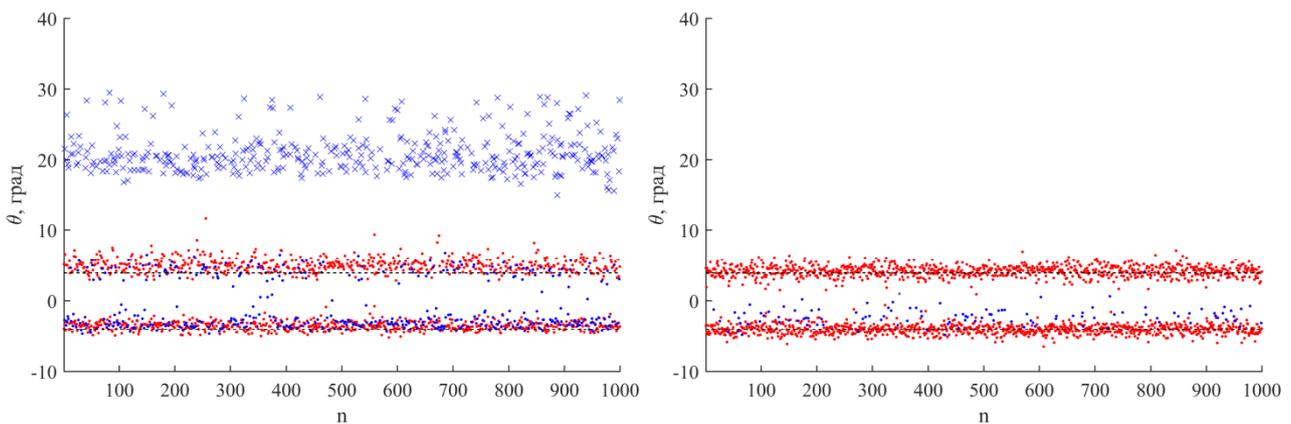


Рис.2. Оценки углового положения источников излучения в отдельных численных экспериментах (МРМ-I – слева, GMPM-I – справа).

На рис.2 представлены оценки угловых координат источников излучения для классического метода минимального многочлена (МРМ-I, слева) и обобщённого метода минимального многочлена (GMPM-I, справа). Вдоль горизонтальной оси отложен номер численного эксперимента. Мощность полезных источников излучения равнялась $\nu = 9$ дБ. Красными точками

обозначены цели в области контроля, при условии, что их количество было верно оценено. Синими точками – цели в области контроля, при условии, что их количество было оценено с ошибкой. Синими крестиками – оценки углового положения цели вне области контроля.

Из приведённого рисунка видно следующее. Во-первых, для классического метода минимального многочлена часть оценок угловых координат находится вне области контроля, а именно в районе нежелательного помехового источника. Для обобщённого метода минимального многочлена все оценки угловых координат находятся в области «полезных» ИРИ. Во-вторых, по концентрации синих точек в области контроля видно, что обобщённый метод минимального многочлена обладает лучшей разрешающей способностью.

В-третьих, оценки углового положения ИРИ для классического метода минимального многочлена имеют систематическое смещение в сторону помехи (систематическая ошибка). При этом данный негативный эффект отсутствует для обобщённого метода минимального многочлена. Сделанные из рис.2 наблюдения подтверждаются результатами, представленными на рис.3 и в таблице 1.

На рис.3 построены вероятности p разрешения двух «полезных» источников излучения (правильной оценки числа целей в области контроля).

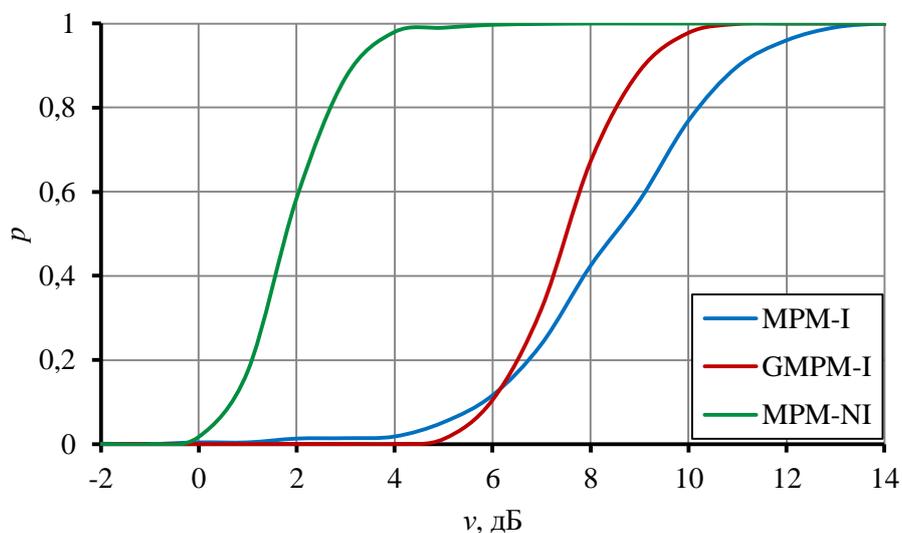


Рис.3. Вероятность правильной оценки числа целей в области контроля.

Из графиков видно, что потери в разрешающей способности по уровню $p = 0.8$ для классического метода минимального многочлена (МРМ) при добавлении внешних распределённых источников помех составляет 8 дБ. Безусловно, данная величина связана с внесением дополнительного шума, т.е. фактическим уменьшением ОСШП. Однако влияние нарушения модели шума на качество разрешения также присутствует. В этом легко убедиться, отметив, что применение предложенного в данной работе обобщённого метода минимального многочлена (GMPM), который учитывает реальную корреляционную матрицу шума/помех, приводит к выигрышу в 2 дБ по уровню $p = 0.8$ по сравнению с классическим алгоритмом (МРМ).

Результаты, характеризующие точность оценки угловых координат целей, представлены в таблице 1.

Таблица 1

ν [дБ]	МРМ-NI			МРМ-I			GMPM-I		
	$\langle\theta_1\rangle$ [град]	$\langle\theta_2\rangle$ [град]	σ [град]	$\langle\theta_1\rangle$ [град]	$\langle\theta_2\rangle$ [град]	σ [град]	$\langle\theta_1\rangle$ [град]	$\langle\theta_2\rangle$ [град]	σ [град]
9.0	-4.06	4.06	0.21				-4.02	4.26	0.75
11.0	-4.06	4.05	0.16				-4.02	4.18	0.59
13.0	-4.04	4.04	0.12				-4.05	4.15	0.46
15.0	-4.04	4.04	0.11	-3.90	4.29	0.34	-4.04	4.10	0.36
17.0	-4.04	4.04	0.08	-3.95	4.21	0.26	-4.05	4.09	0.28
19.0	-4.04	4.03	0.07	-3.98	4.14	0.21	-4.04	4.06	0.23
21.0	-4.04	4.03	0.05	-3.99	4.10	0.18	-4.03	4.04	0.18
23.0	-4.04	4.04	0.04	-4.01	4.08	0.14	-4.03	4.04	0.14
25.0	-4.04	4.04	0.03	-4.02	4.06	0.10	-4.03	4.03	0.11

Видно, что СКО σ оценки угловых координат для классического и обобщённого методов минимального многочлена практически совпадают. Однако для предложенного обобщённого метода минимального многочлена существенно слабее выражена систематическая ошибка, связанная со смещением оценок в сторону помехового источника.

Во второй серии численных экспериментов два источника с эффективной шириной 20° и 10° располагались на угловых координатах $\pm 30^\circ$ и имели мощность 10 дБ каждый.

На рис.4 представлены оценки угловых координат источников излучения для классического метода минимального многочлена (МРМ-I, слева) и обобщённого метода минимального многочлена (GMPM-I, справа). Мощность полезных источников излучения равнялась $\nu = 14$ дБ.

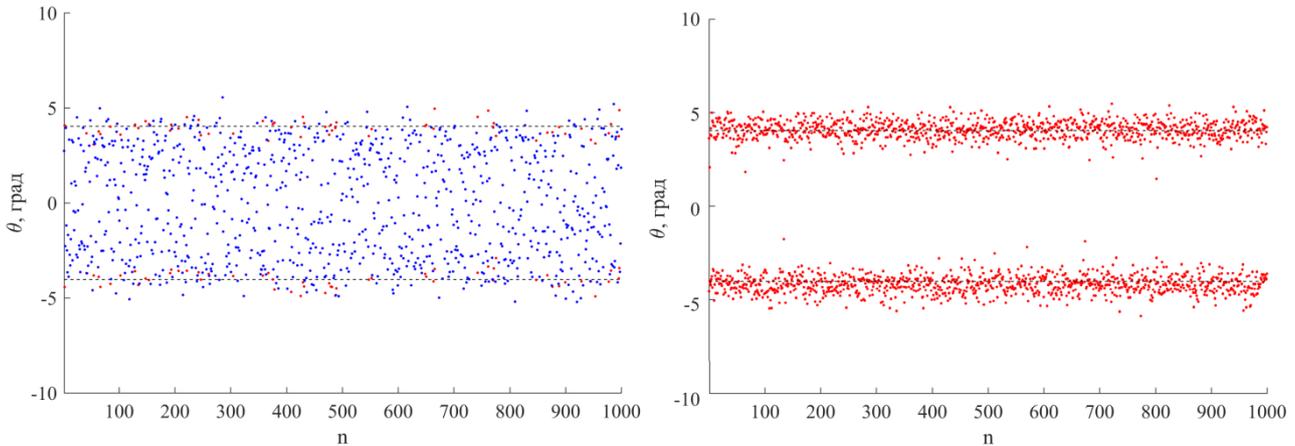


Рис.4. Оценки углового положения источников излучения в отдельных численных экспериментах (МРМ-I – слева, GMPM-I – справа).

Как видно из рисунков, добавление ещё одного распределённого источника помехи сделало проблему разрешения «полезных» ИРИ более острой. Так при заданной мощности ИРИ обобщённый метод минимального многочлена успешно разрешает их в абсолютном большинстве случаев, а классический метод минимального многочлена, не учитывающий пространственно-окрашенный шум, в основном представляет два ИРИ в виде единой цели.

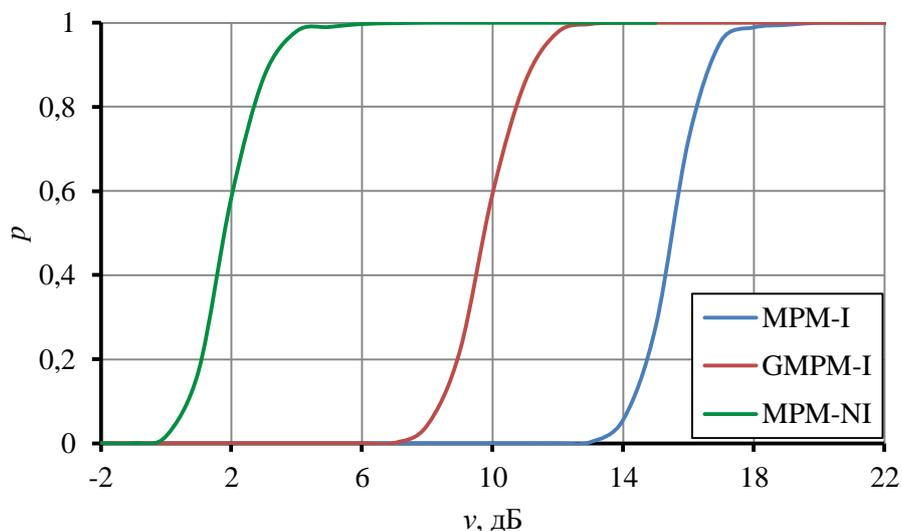


Рис.5. Вероятность правильной оценки числа целей в области контроля.

На рис.5 представлены кривые вероятностей разрешения (правильной оценки числа целей в области контроля) для соответствующих методов. Из графиков видно, что потери в разрешающей способности по уровню $p = 0.8$ для классического метода минимального многочлена (МРМ) при добавлении внешних распределённых источников помех составляет 14 дБ. При этом применение предложенного в данной работе обобщённого метода минимального многочлена (GMPM) приводит к выигрышу в 6 дБ по уровню $p = 0.8$ по сравнению с классическим алгоритмом (МРМ).

В таблице 2 представлены результаты, характеризующие точность оценки угловых координат ИРИ.

Таблица 2

ν [дБ]	МРМ-NI			МРМ-I			GMPM-I		
	$\langle\theta_1\rangle$ [град]	$\langle\theta_2\rangle$ [град]	σ [град]	$\langle\theta_1\rangle$ [град]	$\langle\theta_2\rangle$ [град]	σ [град]	$\langle\theta_1\rangle$ [град]	$\langle\theta_2\rangle$ [град]	σ [град]
11.0	-4.06	4.05	0.16				-4.26	4.07	0.76
13.0	-4.04	4.04	0.12				-4.24	4.11	0.57
15.0	-4.04	4.04	0.11				-4.16	4.09	0.46
17.0	-4.04	4.04	0.08	-4.12	4.01	0.33	-4.13	4.08	0.34
19.0	-4.04	4.03	0.07	-4.09	4.02	0.27	-4.10	4.06	0.27
21.0	-4.04	4.03	0.05	-4.07	4.02	0.21	-4.07	4.05	0.22
23.0	-4.04	4.04	0.04	-4.06	4.04	0.17	-4.06	4.04	0.17
25.0	-4.04	4.04	0.03	-4.05	4.04	0.13	-4.05	4.04	0.13

Из результатов моделирования видно, что точность оценки угловых координат для обоих методов практически совпадает.

Выводы

В данной работе предложен эффективный сверхразрешающий обобщённый метод минимального многочлена, предназначенный для оценки числа и углового положения близкорасположенных источников излучения в условиях пространственно-окрашенного шума и помех. Рассмотрено два варианта обобщения метода минимального многочлена. Первый вариант основан непосредственно на особенностях построения сигнального подпространства в условиях пространственно-окрашенного шума, а второй предполагает применение обеляющего преобразования сигнала и стандартного

метода минимального многочлена. Для обоих подходов приведено теоретическое обоснование, а также доказана их эквивалентность.

Эффективность нового предложенного алгоритма была исследована с помощью численного моделирования в сравнении с классическим методом минимального многочлена. Показано, что при наличии пространственно-распределённой помехи качество работы классического метода минимального многочлена существенно страдает. Предложенный алгоритм позволил решить данную проблему и получить выигрыши около 2 и 6 дБ для необходимой для разрешения целей мощности полезного источника излучения при заданных условиях моделирования в случае одной и двух помех соответственно. Также в случае одного источника помехи предложенный обобщённый метод минимального многочлена позволил существенно снизить величину систематической ошибки, связанной со смещением оценок угловых координат в сторону помехового источника. При этом СКО оценки угловых координат с помощью обобщённого и классического методов минимального многочлена совпали.

Литература

1. Ширман Я.Д., ред. *Радиоэлектронные системы. Основы построения и теория: справочник*. Москва, Радиотехника. 2007. 512 с.
2. Ратынский М.В. *Адаптация и сверхразрешение в антенных решетках*. Москва, Радио и связь. 2004. 199 с.
3. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г. *Теоретические основы обработки сигналов в беспроводных системах связи. Монография*. Нижний Новгород, ННГУ. 2011. 368 с.
4. Godara L.C. *Smart antennas*. London, CRC Press. 2004. 472 p.
5. Tuncer T.E., Friedlander B. *Classical and Modern Direction-of-Arrival Estimation*. London, Elsevier Inc. 2009. 429 p.
6. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Анушин А.А. Оценивание параметров сигналов, принимаемых антенной решеткой. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1996. Т.39. №9. С.1144–1160.

7. Roy R., Kailath T. Esprit - Estimation Of Signal Parameters Via Rotational Invariance Techniques. *IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing*. 1989. Vol.37. No.7. P.984–995. <https://doi.org/10.1109/29.32276>. Available at: <https://pdfs.semanticscholar.org/831e/d2a5f40861866b4ebfe60257b997701e38e2.pdf>
8. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Елохин А.В., Шмонин О.А. Угловое сверхразрешение сигналов в антенной решётке с помощью корневого метода минимального многочлена корреляционной матрицы. *Изв. вузов. Радиофизика*. 2018. Т.61. №3. С.261–272.
9. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*. Москва, Наука. 1967. 576 с.
10. Parlett V.N. *The symmetric eigenvalue problem*. Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics. 1998. 345 p.
11. Ермолаев В.Т., Флакман А.Г., Елохин А.В., Шмонин О.А. Экспериментальное исследование углового сверхразрешения двух коррелированных сигналов методом минимального многочлена. *Изв. вузов. Радиофизика*. 2018. Т.61. №11. С.945–957.
12. Шмонин О.А. Угловое сверхразрешение источников в антенной решетке. Обобщение метода минимального многочлена на случай пространственно-окрашенного шума. *Труды XXIV международной научно-технической конференции «Информационные системы и технологии»*. Нижний Новгород. 2018. С.214–219.
13. Ермолаев В.Т., Шмонин О.А. Обобщение сверхразрешающего метода минимального многочлена на случай пространственно-окрашенного шума. *Труды XXII Научной конференции по радиофизике*. Нижний Новгород. 2018. С.381–384.
14. Bevan D.D.N., Ermolayev V.T., Flaksman A.G., Averin I.M. Gaussian channel model for mobile multipath environment. *EURASIP Journal on Applied Signal Processing*. 2004. No.9. P.1321–1329.
15. Монзинго Р.А., Миллер Т.У. *Адаптивные антенные решетки: Введение в теорию*. Пер. с англ. Москва, Радио и связь. 1986. 448 с.

16. Прасолов В.В. *Задачи и теоремы линейной алгебры*. Москва, Наука. 1996. 304 с.
17. Вержбицкий В.М. *Основы численных методов*. Москва, Высшая школа. 2009. 840 с.
18. Ермолаев В.Т. Оценивание параметров минимального многочлена сигнальной корреляционной матрицы многоканальной адаптивной приемной системы. *Изв. вузов. Радиофизика*. 1995. Т.38. №8. С.841–859.

Для цитирования:

Шмонин О.А. Обобщение сверхразрешающего метода минимального многочлена для пеленгации целей в условиях пространственно-окрашенного шума и помех. Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. 2021. №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.1.3>