

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.1.4>

УДК: 621.372.512

## **МЕТОДИКА АППРОКСИМАЦИИ ВХОДНЫХ И ПЕРЕДАТОЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК РАДИОТЕХНИЧЕСКИХ УСТРОЙСТВ И ПОЛУЧЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ С ВЫСОКОЙ СТЕПЕНЬ АДЕКВАТНОСТИ**

**В.О. Исаев\*, П.В. Бойкачев**

**Военная академия Республики Беларусь  
220057, Минск, пр-т. Независимости, 220**

Статья поступила в редакцию 17 октября 2021 г.

**Аннотация.** Предложена методика нахождения в аналитическом виде, адекватных математических моделей радиотехнических устройств.

**Ключевые слова:** аппроксимация, частотные характеристики, математические модели систем, широкополосное согласование.

**Abstract.** A technique is proposed for finding, in an analytical form, adequate mathematical models of radio engineering devices.

**Key words:** approximation, frequency characteristics, mathematical models of systems, broadband matching.

**Автор для переписки:** Исаев Владислав Олегович, [ystasmoz@gmail.com](mailto:ystasmoz@gmail.com).

### **Введение.**

Математическое моделирование радиотехнических систем (РТС) и устройств (РТУ) является прогрессивным и весьма экономичным способом их исследования и проектирования. Оно позволяет существенно ускорить и в значительной степени автоматизировать процесс разработки радиосистем и повысить их качество. Однако успешное решение инженерных задач методами математического моделирования в значительной степени зависит от состоятельности используемых математических моделей: от их способности давать новую информацию об устройстве и системе в целом в процессе

исследования ее модели и от возможности реализации модели на ЭВМ. Формализация выбора того или иного метода и построение математических моделей РТУ, входящих в состав РТС, отвечающих поставленной инженерной задаче, является нетривиальной, требует от разработчика творческого подхода и достаточно глубоких знаний в области теории математического моделирования радиотехнических устройств и систем.

Любая современная РТС может быть представлена в виде структурной схемы [1], изображенной на рисунке 1.

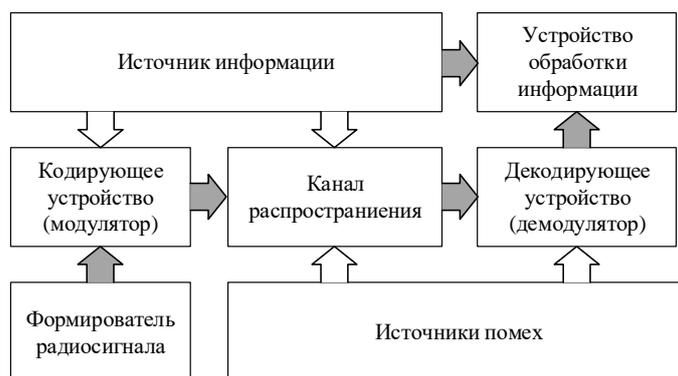


Рис. 1. Структурная схема РТС

Анализ приведенной схемы свидетельствует о том, что РТС имеют следующие особенности, которые необходимо учитывать при формировании математических моделей РТУ, входящих в ее состав:

- РТС – многомерные системы с большим количеством элементов и сложными функциональными связями между ними;
- РТС постоянно находятся под воздействием случайных факторов;
- РТС – быстродействующие системы, в которых сочетается высокая скорость изменения радиосигналов и относительно низкая скорость информационных потоков.

Перечисленные особенности делают задачу математического моделирования РТУ чрезвычайно сложной, а выбор адекватных математических моделей, позволяющих достаточно быстро и эффективно решить поставленную инженерную задачу, представляет наибольшие трудности и еще недостаточно освещен как в отечественной, так и в зарубежной литературе. Поэтому развитие теории построения математических моделей радиотехнических устройств и

систем, реализуемых на современных цифровых ЭВМ и применение специальных математических методов, уменьшающих вычислительные затраты, имеет важное теоретическое и практическое значение.

Таким образом, актуальным является решение задачи разработки методики представления сложных РТУ в виде простых математических моделей, адекватных их физической сущности, а всю работу предлагается построить согласно следующего алгоритма.

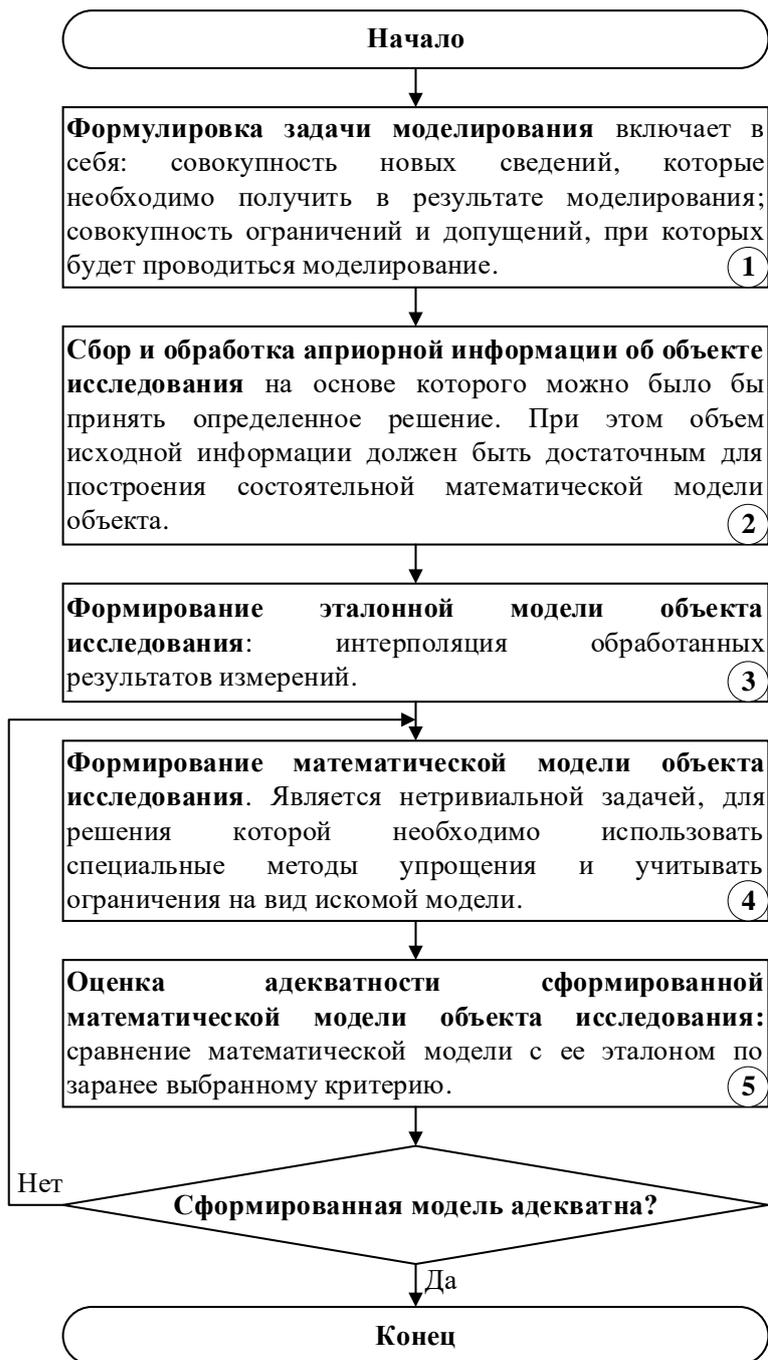


Рис. 2. Алгоритм работы

## 1. Формулировка задачи моделирования.

Одним из основных способов описания сложных РТУ, входящих в состав РТС (усилители, частотные фильтры, антенные устройства (АУ) и др.) – замена их на физические эквиваленты. Данные эквиваленты дают возможность обеспечить проверку принимаемых технических решений на этапах эскизного и технического проектирования при выполнении опытно-конструкторских работ по созданию и улучшению современных РТС.

Основным недостатком существующих эквивалентов РТУ является воспроизведение входных и передаточных характеристик реальных устройств в относительно узком диапазоне частот [2]. Их использование в тракте, работающего в широком диапазоне частот, может привести к повышенному коэффициенту стоячей волны (КСВ), снижению точности измерения мощности передатчика и даже к выходу из строя усилителя мощности.

Также необходимо обратить особое внимание на изменение входных и передаточных характеристик вышеупомянутых систем и устройств в различных условиях их эксплуатации, с течением времени и всевозможных внутренних и внешних воздействиях на них [3]. Изменение величины комплексного сопротивления нагрузки приводит к рассогласованию с сопротивлением источника сигнала. Это способствует появлению в тракте отраженной волны, что в последствии, воздействует на режим эксплуатации радиотехнических систем и является причиной выхода из строя твердотельных активных элементов. Данная ситуация характерна для радиотехнических систем, использующих широкополосные и сверхширокополосные сигналы. Следствием этого является то, что системы, которые не учитывают постоянное варьирование своих характеристик с течением времени, при различных внешних и внутренних воздействиях являются, по меньшей мере, не оптимальными. Это является еще одним недостатком, которым обладают физические эквиваленты РТУ.

Указанные обстоятельства приводят к тому, что наиболее оптимальным описанием сложных РТУ является замена их математическими моделями минимальной сложности. Такая математическая модель должна, с одной

стороны, с требуемой точностью отражать физические процессы в исследуемом объекте, а с другой - быть пригодной для использования на ЭВМ, что позволит определить работу объекта в виде его отклика или реакции на входное воздействие без проникновения в сущность физических процессов, протекающих внутри устройства.

Используемые в математических моделях функции могут быть заданы как аналитическим способом (в виде формулы), так и табличным, при котором функция известна только при определенных дискретных значениях аргумента. В частности, если функциональная зависимость получена в результате расчетов, проведенных на ЭВМ, или в процессе измерений, осуществленных в рамках какого-либо эксперимента, то она оказывается заданной именно табличным способом.

## **2. Сбор априорной информации об объекте исследования.**

Как правило, входные и передаточные характеристики задаются числовыми рядами значений двух величин: независимой ( $y_i$ ) и зависимой ( $x_i$ ), каждая из которых в общем случае кроме определенной регулярной (детерминированной) составляющей может содержать и случайные составляющие самой различной природы. Это обусловлено как статистической природой изучаемых процессов, так и множеством внешних факторов процессов измерений и преобразования данных (шумы, помехи, дестабилизирующие факторы и ошибки измерений). При этом, согласно центральной предельной теореме, полагается, что значения случайной составляющей зависимой переменной (как собственные, так и «суммарные») распределены по нормальному вероятностному закону [4].

Исходя из этого, в [5] представлена методика определения потребного объема выборки  $N$  (числа проводимых натуральных, полунатурных или модельных экспериментов), при котором обеспечивается определение математического ожидания той или иной характеристики с заданными значениями показателей

достоверности (характеризуется значением доверительной вероятности) и точности (характеризуется значением относительной погрешности).

В таблице 1 представлен потребный объем выборки для оценки математического ожидания нормально распределенной характеристики при коэффициенте вариации  $V$  равном единице.

Таблица 1. Потребный объем выборки для оценки математического ожидания при коэффициенте вариации  $V$  равном единице.

Значение доверительной вероятности $\beta$	Значение относительной погрешности, %						
	30	25	20	15	10	5	1
0,5	5	7	11	20	46	182	4556
0,6	8	12	18	31	71	282	7056
0,7	12	17	27	48	108	433	10820
0,8	18	26	41	73	164	657	16440
0,9	30	43	68	120	272	1080	26990
0,95	43	62	96	171	384	1537	38420
0,99	73	106	166	295	664	2654	66360

Анализируя таблицу 1 можно сделать вывод, что для оценки математического ожидания оцениваемой случайной характеристики, исследуемого или испытываемого РТУ с минимально необходимой доверительной вероятностью 0,9 и относительной погрешностью 10 % требуется проведение 272 натуральных, полунатурных или модельных экспериментов соответственно (при вариации случайного параметра, равной единице). Для других значений вариации оцениваемой характеристики испытываемой РТУ потребное число экспериментов либо увеличивается в  $v^2$  раз (при  $V$  больше единицы), либо уменьшается в  $v^2$  раз (при  $V$  меньше единицы).

Собрав совокупность данных об исследуемой характеристике РТУ, необходимо их обработать, т.е. привести в определенную и сбалансированную систему, которая становится базой для дальнейшего содержательного анализа, интерпретации и научных выводов, и практических рекомендаций.

### 3. Обработка априорной информации об объекте исследования и формирование эталонных математических моделей.

Предположим, что в ходе экспериментальных испытаний образца РТУ проведено  $N$  измерений его случайной характеристики  $\theta$ , количество которых соответствует таблице 1.

1) Полагается, что случайная ГТХ  $\theta$  распределена по нормальному (гауссовому) закону [4].

2) По полученной выборке рассчитываются точечные оценки математического ожидания  $\hat{M}_\theta$  и дисперсии  $\hat{D}_\theta$  оцениваемой характеристике  $\theta$  по формулам [4]:

$$\hat{M}_\theta = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \theta_i \quad (1)$$

$$\hat{D}_\theta = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\theta_i - \hat{M}_\theta)^2. \quad (2)$$

3) СКО точечной оценки  $\hat{M}_\theta$  рассчитывается по формуле:

$$\sigma_{\hat{M}} = \sqrt{\frac{\hat{D}_\theta}{N}}. \quad (3)$$

В результате получаем данные экспериментальных исследований рассматриваемой характеристики РТУ (в виде таблицы или графика), в которых каждому значению входного фактора ( $X_m$ ) соответствует значение выходного фактора ( $Y_m$ ), т.е. известна пара чисел  $(x_{mi}, y_{mi})$ , соответствующих точечной оценке математического ожидания  $\hat{M}_\theta$  оцениваемой характеристики  $\theta$  (рисунок 3) – регулярная составляющая экспериментальных данных.

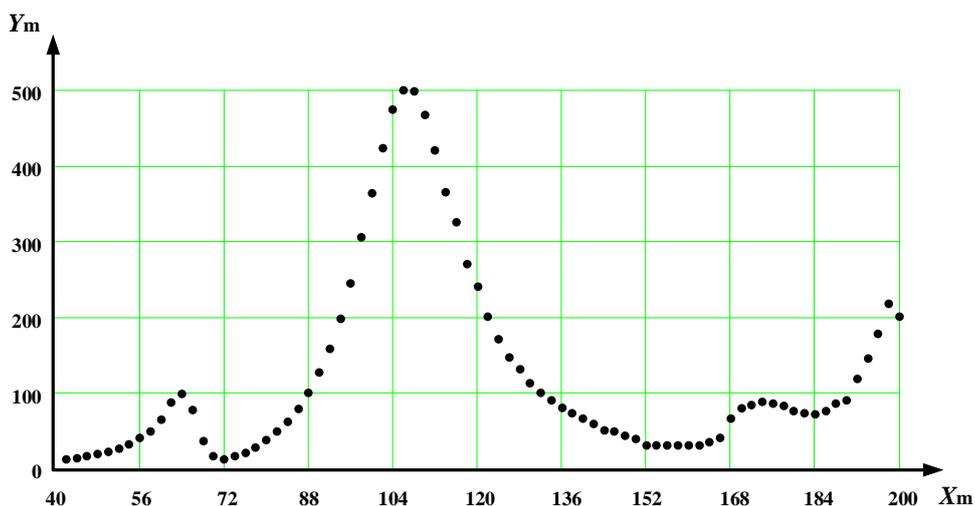


Рис. 3. Графическое отображение обработанных результатов эксперимента.

На практике для решения инженерных задач могут понадобиться значения функции и в других точках, отличных от тех, что заданы в таблице. В этом случае приходится прибегнуть к интерполяции (или интерполированию) – приближенному нахождению неизвестных значений функций по известным ее значениям в заданных точках.

В общем виде *интерполяционная задача* состоит в построении обобщенного многочлена  $P(x)$ , принимающего значения исследуемой функции  $y = f(x)$  на конечном множестве  $B \in A$  (область задания функции). Указанный многочлен должен удовлетворять условиям  $P(x_i) = f(x_i)$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ . Точки  $x_i$  называются *узлами интерполирования*.

При определении вида эмпирической функции  $P(x)$  предполагается, что это наиболее гладкая кривая, согласованная с экспериментальными данными. Кроме того, для выбора этой функции привлекаются дополнительные соображения, как правило, не математического характера (теоретические модели, опыт предшествующих исследований, и т.п.).

Исходя из всего вышеперечисленного укажем некоторые вполне естественные требования и ограничения, которые необходимо наложить на классы кривых и поверхностей, описывающих функциональную зависимость экспериментальных исследований физической модели объекта, выполнение которых необходимо для успешного достижения цели работы [6].

1) Выбираемый класс должен описываться достаточно просто.

2) Кривые или поверхности, входящие в выделенный класс, не должны иметь особенностей, то есть должны быть достаточно гладкими - нигде не рваться, иметь непрерывно изменяющуюся касательную или непрерывную кривизну.

3) Поиск нужной кривой или поверхности в выделенном классе должен быть сравнительно легким, что предполагает наличие эффективного алгоритма ее построения.

4) Для достаточно больших массивов точек найденные кривые или поверхности должны вести себя вполне предсказуемо.

Исходя из ограничений и требований, накладываемых на кривые и поверхности, описывающих функциональную зависимость экспериментальных исследований физической модели объекта, предлагается рассмотреть достоинства и недостатки наиболее распространенных видов интерполяционных функций и ограничиться одной из них для формирования эталонной модели объекта исследования.

#### *Выбор интерполяционной функции*

К основным методам интерполяции относятся: интерполяционный многочлен Лагранжа, кусочно-линейная интерполяция и сплайн-интерполяция. Свойства данных методов подробно рассмотрены в [6, 7], поэтому их выбор целесообразно рассматривать с двух противоположных позиций, обсуждая основные достоинства отдельно от недостатков.

#### *1. Интерполяционный многочлен Лагранжа*

Основные достоинства 1-го подхода:

- график интерполяционного многочлена Лагранжа проходит через каждую точку массива;
- конструируемая функция легко описывается;
- построенная функция имеет непрерывные производные любого порядка;

- заданным массивом интерполяционный многочлен определен однозначно.

Основные недостатки 1-го подхода:

- степень интерполяционного многочлена Лагранжа зависит от числа узлов сетки, и чем больше это число, тем выше степень интерполяционного многочлена и, значит, тем больше требуется вычислений;
- изменение хотя бы одной точки в массиве требует полного пересчета коэффициентов интерполяционного многочлена Лагранжа;
- добавление новой точки в массив увеличивает степень интерполяционного многочлена Лагранжа на единицу и также приводит к полному пересчету его коэффициентов;
- при неограниченном измельчении сетки степень интерполяционного многочлена Лагранжа неограниченно возрастает, а его поведение вообще требует особого внимания.

## *2. Кусочно-линейная интерполяция*

Основные достоинства 2-го подхода:

- график кусочно-линейной функции проходит через каждую точку массива;
- конструируемая функция легко описывается;
- заданным массивом построенная функция определена однозначно;
- степень многочленов, используемых для описания интерполяционной функции, не зависит от числа узлов сетки (равна единице);
- изменение одной точки в массиве требует вычисления четырех чисел (коэффициентов двух прямолинейных звеньев, исходящих из новой точки);
- добавление дополнительной точки в массив требует вычисления четырех коэффициентов.

Кусочно-линейная функция достаточно хорошо ведет себя и при измельчении сетки.

Основной недостаток 2-го подхода:

- аппроксимирующая кусочно-линейная функция не является гладкой: первые производные терпят разрыв в узлах сетки (*узлах интерполяции*).

### 3. Сплайн-интерполяция

Рассмотренные подходы можно объединить так, чтобы число перечисленных достоинств обоих подходов сохранилось при одновременном уменьшении числа недостатков. Это можно сделать путем построения гладкой интерполяционной сплайн-функции степени  $p$ .

Наиболее часто на практике используется интерполяционный кубический сплайн  $S(x)$ , удовлетворяющий следующим условиям:

- функция  $S(x)$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $[a, b]$  ( $S(x) \in C^2[a, b]$ );
- на каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  функция  $S(x)$  является полиномом третьей степени вида

$$S(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad 0 \leq i \leq n - 1;$$

- функция  $S(x)$  – интерполяционная функция, то есть:

$$S(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n;$$

- краевым (граничными) условиям  $S''(a) = S''(b) = 0$ .

Таким образом, линия, которую описывает сплайн-функция, напоминает по форме гибкую линейку, закреплённую в узловых точках. Это создает высокую плавность сплайнового полинома по сравнению с другими методами интерполяции, что наглядно видно на рисунок 4.

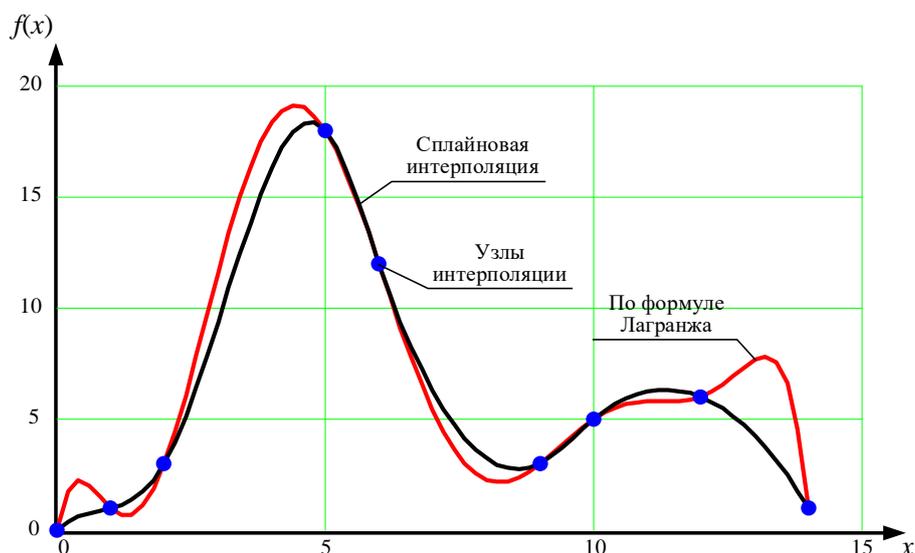


Рис. 4. Сплайновая интерполяция и интерполяция по Лагранжу

В отличие от интерполяционных многочленов Лагранжа, последовательность интерполяционных кубических сплайнов на равномерной сетке всегда сходится к интерполируемой непрерывной функции, причем с улучшением дифференциальных свойств этой функции скорость сходимости повышается.

Основные достоинства 3-го подхода:

- график построенной функции проходит через каждую точку массива;
- конструируемая функция сравнительно легко описывается;
- заданным массивом построенная функция определена однозначно;
- степень многочленов не зависит от числа узлов сетки и, следовательно, не изменяется при его увеличении;
- построенная функция имеет непрерывные производные до порядка  $p - 1$  включительно;
- построенная функция обладает хорошими интерполяционными и аппроксимационными свойствами.

Основной недостаток 3-го подхода:

- отсутствие единого аналитического выражения для описания функции.

Исходя из этого, можно сделать вывод, что интерполяционный кубический сплайн хорошо приближает гладкие функции (теорема о сходимости, оценка погрешности) и имеет минимальную сложность, что полностью удовлетворяет

требования, предъявляемые к кривым и поверхностям, описывающим функциональную зависимость экспериментальных исследований. Таким образом, для решения задач интерполяции обработанных результатов эксперимента предлагается использовать именно *интерполяционный кубический сплайн*.

#### *Сглаживание экспериментальных данных*

На практике часто вместо интерполяционной таблицы  $(x_i, y_i)$ ,  $y_i = f(x_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$  известна таблица экспериментальных данных  $(x_i, z_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , где  $z_i = y_i + \varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_i$  – погрешность, таким образом, вместо значений функции  $f(x)$  известны результаты измерений, содержащие погрешность. Возникают задачи восстановления функции  $f(x)$  и вычисления производной функции по зашумленным данным. Использование интерполяции в такой ситуации нецелесообразно, т.к. интерполирующая кривая будет существенно зависеть от погрешности (рисунок 6, а), а ее производная будет сильно отличаться от  $f'(x)$  (рисунок 6, б).

Если заранее известно, что результаты измерений  $z_i$  содержат погрешности  $\varepsilon_i$ , то естественно рассматривать не задачу интерполяции, а задачу сглаживания, т.е. задачу построения гладкой (непрерывно дифференцируемой, дважды непрерывно дифференцируемой) функции, которая проходила бы не через заданные точки  $(x_i, z_i)$ ,  $0 \leq i \leq n$ , а вблизи них. На рисунке 5, а, приведен график функции  $f(x) = \sin x$  на отрезке  $[0, \pi]$ , точками отмечены результаты измерений  $z_i$ ,  $0 \leq i \leq 20$ , выведена интерполяционная кривая  $S(x)$  и сглаживающая кривая  $SM(x)$  (пунктиром). На рисунке 5, б, приведены графики производной  $f'(x) = \cos x$  на отрезке  $[0, \pi]$ , производной интерполяционной кривой  $S'(x)$  и производной сглаживающей кривой  $SM'(x)$  (пунктиром).

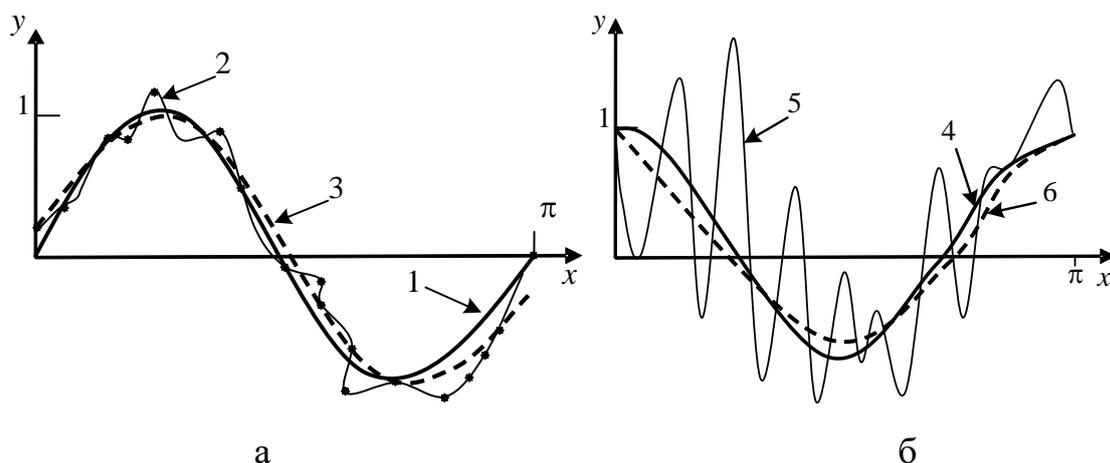


Рис. 5. Сглаживание (а) и дифференцирование зашумленных данных (б), 1 (4) – график функции  $f(x)$  (ее производная); 2 (5) – интерполяционный сплайн (его производная); 3 (6) – сглаживающий сплайн (его производная)

На практике, для решения подобных задач обычно применяется расчетный метод, известный под названием «метод наименьших квадратов» (МНК) [4]. Этот метод дает возможность при заданном типе зависимости  $g(x)$  так выбрать ее числовые параметры, чтобы кривая  $g(x)$  в известном смысле наилучшим образом отображала экспериментальные данные, т.е. функция  $g(x)$  должна удовлетворять условию:

$$\sum_i |g(x_i) - z_i|^2 = \min, \quad 0 \leq i \leq n.$$

Однако такой метод аппроксимации имеет два существенных недостатка:

- тип аппроксимирующей функции  $g(x)$  определяется по внешнему виду экспериментальной зависимости, либо должен быть известен заранее;
- порядок аппроксимирующей функции  $g(x)$  не определен и ограничивается только количеством  $N$  проведенных измерений.

Исходя из этого можно сделать вывод, что решение задачи сглаживания экспериментальных данных методом МНК является, по меньшей мере, неоптимальным и на практике для решения задачи сглаживания чаще всего используются сглаживающие кубические сплайны.

*Определение сглаживающего кубического сплайна*

Сглаживающим кубическим сплайном называется функция  $SM(x)$ , удовлетворяющая следующим условиям:

- функция  $SM(x)$  – дважды непрерывно дифференцируемая функция на  $[a, b]$  ( $SM(x) \in C^2[a, b]$ );
- на каждом из отрезков  $[x_i, x_{i+1}]$  функция  $SM(x)$  является полиномом третьей степени вида

$$SM(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad 0 \leq i \leq n - 1;$$

- функция  $SM(x)$  доставляет минимум функционалу

$$\Phi(g) = \int_a^b (g''(x))^2 dx + \sum_{i=0}^n (g(x_i) - z_i)^2 / r_i,$$

где  $r_i$  – заданные положительные числа, называемые весовыми коэффициентами;

- краевым (граничным) условием  $SM''(a) = SM''(b) = 0$ .

При этом известно [6]: если заданы весовые коэффициенты  $r_i$  и таблица экспериментальных данных  $(x_i, z_i)$ , в которой все узлы сетки различны, то существует единственный сглаживающий кубический сплайн, соответствующий этой таблице и весовым коэффициентам.

Следует заметить, что весовые коэффициенты  $r_i$ , задаваемые пользователем, позволяют в известной степени управлять свойствами сглаживающих сплайнов. Если все  $r_i = 0$ , то  $z_i = y_i$ , и сглаживающий сплайн становится интерполяционным. Таким образом, интерполяционный кубический сплайн можно рассматривать как частный случай сглаживающего кубического сплайна (при  $r_i = 0, 0 \leq i \leq n$ ). Отметим, что чем меньше погрешность  $\varepsilon_i$ , тем меньше должны быть весовые коэффициенты  $r_i$ . Если же необходимо, чтобы сглаживающий кубический сплайн прошел через точку  $(x_k, z_k)$ , то соответствующий весовой множитель  $r_k$  следует положить равным нулю. В

практических вычислениях выбор величин  $r_i$  является важным вопросом, для решения которого используются различные подходы [4].

Таким образом, результатом обработки экспериментальных данных является эталонная математическая модель объекта исследования, представленная в виде интерполяционного (при многократном проведении экспериментов) или сглаживающего (при однократном проведении эксперимента) кубического сплайна, наиболее точно описывающий результаты, полученные в ходе экспериментальных исследований и удовлетворяющий требованиям и ограничениям, предъявляемым к кривым и поверхностям, описывающим функциональную зависимость экспериментальных исследований. Однако, необходимо заострить особое внимание на том, что такая эталонная математическая модель не может быть использована для решения различных инженерных задач, т.к. она не соответствует физической природе моделируемого процесса, имеющего следующие ограничения [8]:

1) Исходя из условий физической реализуемости [9], входные и передаточные характеристики РТУ являются дробно-рациональными функциями вида:

$$f(s) = \frac{a_0 + a_1s + a_2(s)^2 + \dots + a_k(s)^k}{b_0 + b_1s + b_2(s)^2 + \dots + b_q(s)^q}, \quad (4)$$

где

$s = i\omega$  – комплексная переменная;

$m_1 = a_0 + a_2s^2 + \dots + a_{2k}s^{2k}$  – четная часть числителя функции  $f(s)$ ;

$m_2 = b_0 + b_2s^2 + \dots + b_{2q}s^{2q}$  – четная часть знаменателя функции  $f(s)$ ;

$n_1 = a_1s + \dots + a_{(2k-1)}s^{(2k-1)}$  – нечетная часть числителя функции  $f(s)$ ;

$n_2 = b_1s + \dots + b_{(2q-1)}s^{(2q-1)}$  – нечетная часть знаменателя функции  $f(s)$ .

Все коэффициенты при  $s$  должны быть вещественными и неотрицательными, а высшие степени полинома числителя ( $k$ ) и знаменателя ( $q$ ), так же, как и их низшие степени, не могут отличаться более чем на 1; нули и полюсы этой функции должны чередоваться на мнимой оси плоскости  $s$  [10].

2) Для  $2N$ -полосников функция  $f(s)$  должна обладать свойствами входного сопротивления  $Z(s)$  этих двухполосников. Входные функции таких четырехполосников относятся к классу так называемых *положительных вещественных функций* (ПВФ), которые удовлетворяют следующему дополнительному условию:  $\operatorname{Re}[f(s)] \geq 0$  или  $\operatorname{Re}[Y(s)] \geq 0$  при  $s \geq 0$ .

3) Также, необходимо учитывать, что положительные вещественные функции всегда представляют собой отношение двух полиномов Гурвица, т.е. нули и полюсы таких функций расположены в левой полуплоскости. Кроме того, если ПВФ имеет полюсы или нули на мнимой оси (включая  $s = 0$  и  $s = \infty$ ), то эти полюсы и нули являются вещественными и положительными.

#### 4 Формирование математической модели.

Анализ методов интерполяции функциональных зависимостей показал, что основой для нее являются интерполяционные полиномы, а также многочлены на основе производных (сплайны, многочлен Лагранжа). Общим недостатком методов интерполяции функциональных зависимостей является наличие в конечных выражениях большого количества членов, которые нельзя свести под знак суммы. Кроме того, при интерполяции на основе полиномов не наблюдается значительного уменьшения погрешности с увеличением степени полинома. Асимптотическая оценка скорости нарастания операций для всех интерполяционных полиномов носит квадратичный характер, что требует значительных вычислительных затрат на их реализацию. В случае сплайнов и многочлена Лагранжа требуются значительные вычислительные затраты на вычисление коэффициентов аппроксимации.

Таким образом, с точки зрения экономии времени и средств необходимо перейти к вычислению приближенных значений функции при любом значении аргумента на основе имеющихся табличных данных, т.е. решить задачу аппроксимации.

Исходя из ограничений, представленных выше, для решения задачи аппроксимации входных и передаточных характеристик комплексных нагрузок

предлагается: в качестве аппроксимирующей функции использовать дробно-рациональную функцию вида (4) [11]. С помощью математического преобразования выражение (4) представим в виде четной  $Ev f(s)$  и нечетной  $Od f(s)$  частей от  $f(s)$ :

$$Ev f(s) = \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2}; \quad (5)$$

$$Od f(s) = \frac{n_1 m_2 - m_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2}. \quad (6)$$

При  $s = i\omega$  имеем:  $Ev f(s)|_{s=i\omega} = Re f(i\omega)$      $Od f(s)|_{s=i\omega} = i Im f(i\omega)$

Выражения (5) и (6) предлагается использовать в качестве аппроксимирующих функций  $Re f(s)$  и  $Im f(s)$  составляющих входных и передаточных характеристик объекта исследования. Для нахождения наиболее оптимальных коэффициентов аппроксимирующих функций необходимо использовать методы нелинейных оптимизированных процедур с использованием ЭВМ (например, метод оптимизации Левенберга-Марквардта). Он позволяет сформировать аналитическую математическую модель (АММ) входных и передаточных характеристик РТУ с высокой степенью адекватности (с доверительной вероятностью не менее 0,9 и относительной погрешностью не более 10%) [5, с. 9].

Исходя из вышесказанного, методика аппроксимации входных и передаточных характеристик радиотехнических устройств будет иметь вид:

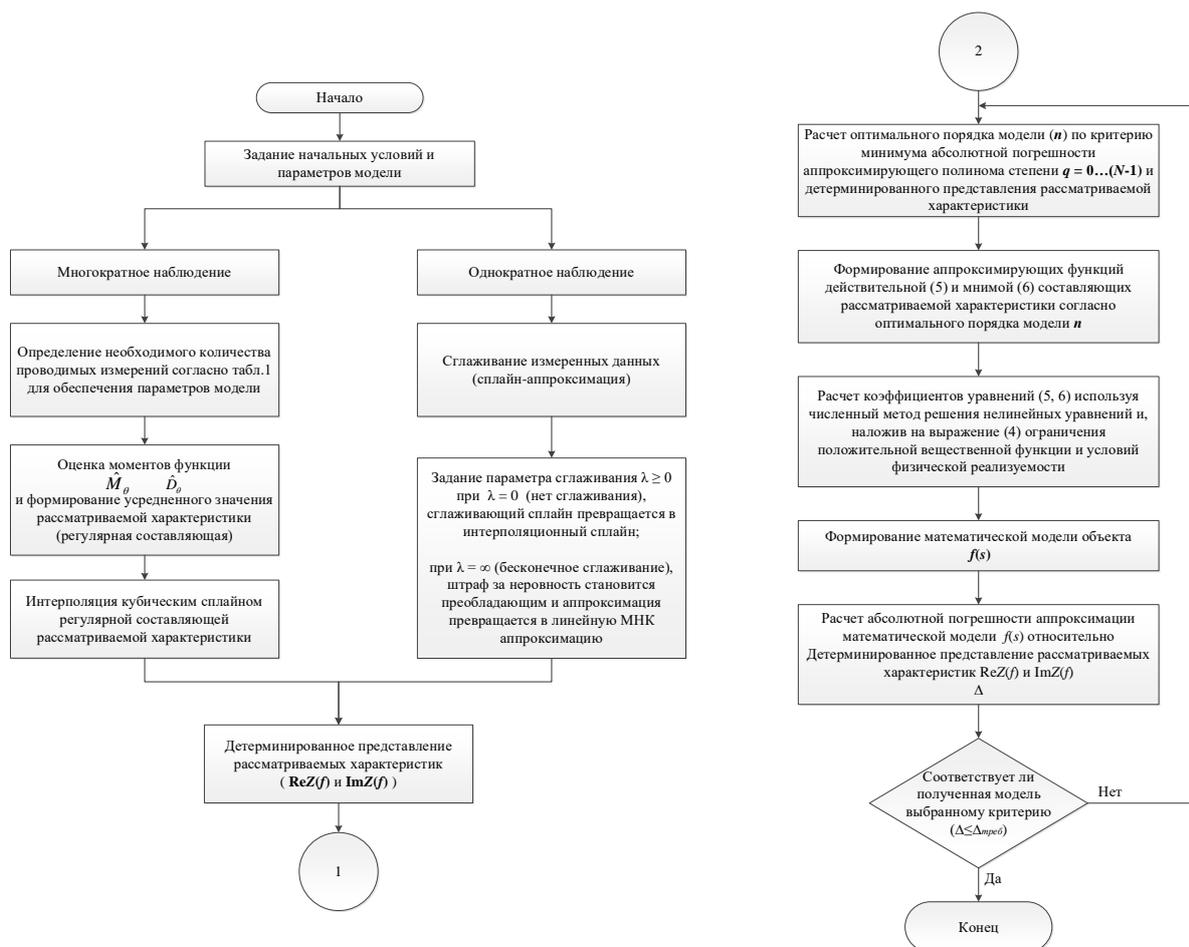


Рис. 6. Методика аппроксимации входных и передаточных характеристик радиотехнических устройств

Суть методики заключается в следующем:

- задаются требования и ограничения к реализуемой математической модели. Согласно предъявляемым требованиям, определяется необходимое количество проводимых измерений характеристики РТУ согласно таблице 1;
- после проведения требуемого количества измерений осуществляется обработка экспериментальных данных и формирование эталонной модели объекта исследования (перехода от стохастических данных к детерминированным), что позволит оценить качество аппроксимации рассматриваемых характеристик изложенной выше математической моделью;

- после этого, с учетом ограничений, накладываемых на функции, описывающие входные и передаточные характеристики РТУ, формируется аппроксимирующая функция, адекватность которой оценивается расчетом абсолютной погрешности  $\Delta$  относительно сформированного эталона. Следует заметить, что нахождение погрешности  $\Delta$  возможно производить различными способами, представленными в [10].

Предлагается рассмотреть пример решения задачи аппроксимации характеристик РТУ и формирования их эквивалентов в виде АММ нагрузки с высокой степенью адекватности с использованием предложенной методики (рисунок 6).

### 5. Прикладные вопросы применения методики аппроксимации входных и передаточных характеристик радиотехнических устройств.

В качестве примера исследуем возможность аппроксимации частотной характеристик АУ AD-25/CW-3512 с использованием методики, представленной на рисунке 6. Полученная АММ, описывающая реальную и мнимую составляющие входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512, имеет вид (4), коэффициенты которой представлены в таблице 2.

Таблица 2. Коэффициенты дробно-рациональной функции, аппроксимирующей импедансные характеристики АУ AD-25/CW-3512.

Коэфф-т	Значение	Коэфф-т	Значение	Коэфф-т	Значение	Коэфф-т	Значение	Коэфф-т	Значение
$a_0$	$1.792 \cdot 10^{-4}$	$a_6$	44.376	$a_{12}$	439.399	$b_3$	0.014	$b_9$	5.74
$a_1$	0.032	$a_7$	147.751	$a_{13}$	248.709	$b_4$	0.249	$b_{10}$	23.01
$a_2$	0.119	$a_8$	203.863	$a_{14}$	153.796	$b_5$	0.267	$b_{11}$	8.059
$a_3$	1.701	$a_9$	417.306	$b_0$	$6.059 \cdot 10^{-5}$	$b_6$	2.476	$b_{12}$	22.854
$a_4$	4.173	$a_{10}$	443.957	$b_1$	$1.706 \cdot 10^{-4}$	$b_7$	1.851	$b_{13}$	4.131
$a_5$	24.51	$a_{11}$	536.812	$b_2$	$7.996 \cdot 10^{-3}$	$b_8$	10.838	$b_{14}$	8.304

Частотные характеристики аппроксимирующей функции входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512 представлены на рисунке 7.

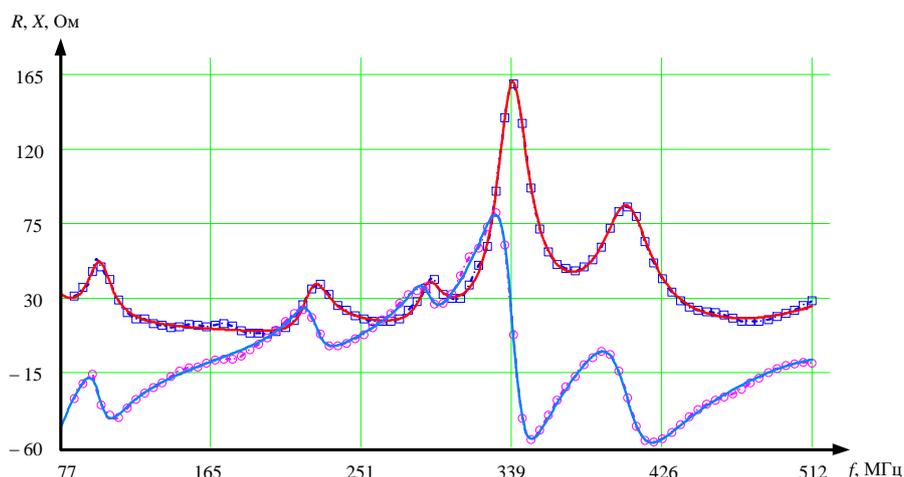


Рис. 7. Функции входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512 (квадраты и круги) и его рассчитанной АММ (сплошные линии) в рабочей полосе частот

На рисунка 7 наглядно видно, что рассчитанная АММ входного сопротивления АУ AD-25/CW-3512, обеспечивает требуемую абсолютную погрешность аппроксимации к характеристикам входного сопротивления и составляет менее 10%.

*Аппроксимация частотных характеристик СВЧ транзисторов, представленных в численном виде, на дискретном ряде частот.*

Используя дробно–рациональную функцию (4) с неизвестными коэффициентами при переменной  $s$  можно аппроксимировать, заданные в табличном виде, модуль и фазу коэффициента отражения  $S_{11}$  СВЧ устройства рисунок 8.

Частота f, ГГц	$S_{11}$		$S_{21}$		$S_{12}$		$S_{22}$	
	Мод	φ(град)	Мод	φ(град)	Мод	φ(град)	Мод	φ(град)
0.5	0.9911	-18.5845	5.5308	166.8671	0.0284	78.9917	0.5119	-13.8621
1.0	0.9671	-36.4208	5.2944	154.3208	0.0542	68.5704	0.4945	-27.1196
1.5	0.9340	-52.9650	4.9601	142.7660	0.0761	59.1415	0.4705	-39.3502
2.0	0.8982	-67.9537	4.5835	132.3657	0.0935	50.8684	0.4440	-50.3757
2.5	0.8640	-81.3537	4.2060	123.0954	0.1069	43.7274	0.4184	-60.2079
3.0	0.8338	-93.2687	3.8512	114.8319	0.1170	37.5955	0.3954	-68.9605
3.5	0.8081	-103.8623	3.5294	107.4209	0.1245	32.3191	0.3757	-76.7812
4.0	0.7869	-113.3106	3.2430	100.7137	0.1300	27.7503	0.3595	-83.8152
4.5	0.7698	-121.7797	2.9903	94.5819	0.1341	23.7615	0.3464	-90.1901
5.0	0.7561	-129.4162	2.7679	88.9203	0.1370	20.2481	0.3362	-96.0128
5.5	0.7452	-136.3454	2.5721	83.6443	0.1390	17.1266	0.3286	-101.3713
6.0	0.7367	-142.6726	2.3993	78.6873	0.1404	14.3313	0.3231	-106.3370
6.5	0.7302	-148.4854	2.2461	73.9963	0.1412	11.8103	0.3196	-110.9687
7.0	0.7253	-153.8567	2.1097	69.5297	0.1416	9.5230	0.3177	-115.3145
7.5	0.7218	-158.8468	1.9877	65.2541	0.1416	7.4375	0.3173	-119.4142
8.0	0.7194	-163.5058	1.8781	61.1429	0.1414	5.5285	0.3181	-123.3011

Рис. 8. Фрагмент «Datasheet» транзисторов 3П373А, Б, В 5

Так как рассматриваемые модуль и фаза коэффициента отражения  $S_{11}$  являются комплексными, то для поиска функции, описывающей транзистор с

заданными параметрами, необходимо воспользоваться некоторыми свойствами комплексных чисел:

Модуль комплексного числа  $S_{11}$  можно представить в виде

$$|S_{11}| = \sqrt{A^2 + B^2},$$

где  $A$  – действительная часть  $S_{11}$ , а  $B$  – мнимая часть. Тогда фаза коэффициента отражения  $S_{11}$  равна

$$\varphi = \arctan \frac{B}{A}.$$

Исходя из (5) и (6) модуль и фаза  $S_{11}$  примет вид:

$$\left| \rho(i\omega) = \sqrt{\left( \frac{m_1 m_2 - n_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \right)^2 + \left( \frac{n_1 m_2 - m_1 n_2}{m_2^2 - n_2^2} \right)^2} \right|;$$

$$\eta(i\omega) = \arctan \left( \frac{n_1 m_2 - m_1 n_2}{m_1 m_2 - n_1 n_2} \right).$$

В качестве примера, на рисунке 9 показаны результаты аппроксимации параметра  $S_{11}$  транзистора 3П373 по методике, представленной на рисунке 6.

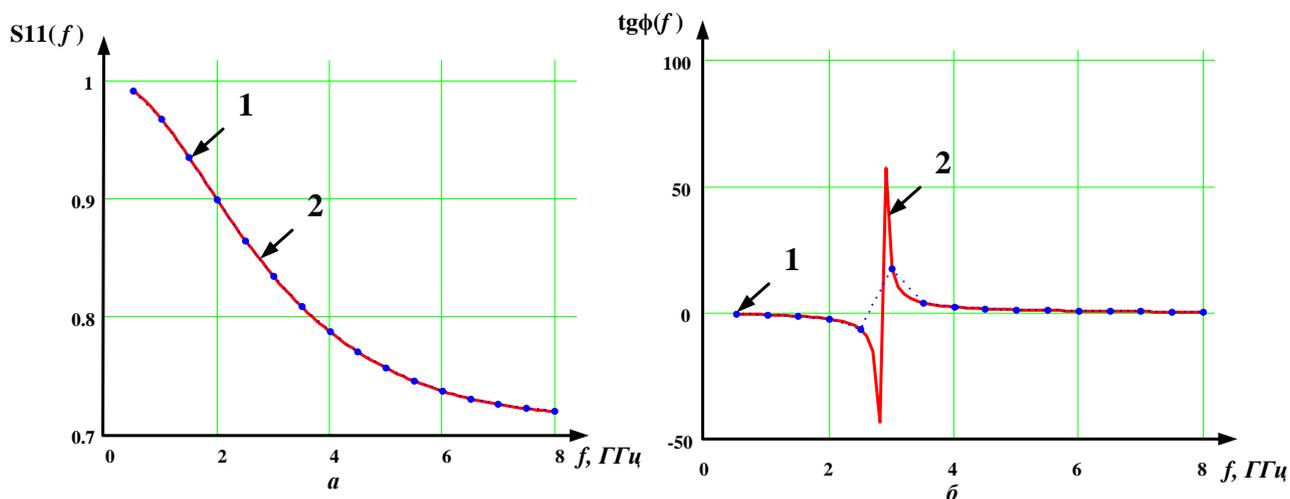


Рис. 9. Зависимость изменения модуля (а) и фазы (б) параметра  $S_{11}$  транзистора 3П373 в рабочей полосе частот: 1 – значения, представленные в «Datasheet»; 2 – аппроксимированные значения.

Представленные результаты были получены при абсолютной погрешности аппроксимации  $\Delta S_{11} = 0.0227\%$  и  $\Delta \varphi = 0.0244\%$ , что соответствует относительной погрешности не более 10%.

Полученные результаты позволяют говорить о высокой степени адекватности полученных АММ и подтверждают работоспособность предложенной методики аппроксимации входных и передаточных характеристик радиотехнических устройств.

### **Заключение.**

Таким образом, для анализа и расчета эквивалентных цепей предлагается использовать математические модели, представляющие из себя аналитическое выражение, описывающее входные характеристики, в виде достаточно простых физически реализуемых дробно-рациональных функций вида (4). Данный подход позволяет аппроксимировать входные характеристики РТУ с учетом их статистической обработки, и рассматривать численно заданные характеристики в виде АММ с высокой степенью адекватности (доверительной вероятностью не менее 0,9 и относительной погрешностью не более 10 %).

Полученные результаты моделирования могут использоваться для составления эквивалентов сопротивления РТУ, как во всем частотном диапазоне, так и по поддиапазнам. Данные модели дают возможность использовать для согласования РТУ аппарат современной теории широкополосного согласования. Следует отметить, что разработка и изготовление эквивалентов РТУ по результатам моделирования (составления эквивалентов сопротивления РТУ как во всем частотном диапазоне, так и по поддиапазнам) может обеспечить проверку принимаемых технических решений на этапах эскизного и технического проектирования при выполнении опытно-конструкторских работ по созданию усилителей мощности, антенных и согласующих устройств современных радиостанций.

**Автор для переписки:** Исаев Владислав Олегович, [ystasmoz@gmail.com](mailto:ystasmoz@gmail.com).

### **Финансирование.**

Работа выполнена при (частичной) финансовой поддержке в рамках гранта Президента Республики Беларусь в направлении деятельности, имеющей

приоритетное значение для развития Республики Беларусь, в науке, образовании, здравоохранении, культуре. В соответствии с указом Президента Республики Беларусь от 13 сентября 2013 г.

### Литература

1. Монаков А.А. *Основы математического моделирования радиотехнических систем*. ГУАП. Санкт-Петербург, 2005. 100 с.
2. Бойкачев П.В., Крейдик Е.Л., Филиппович Г.А. Моделирование сопротивления короткой монополюсной антенны диапазона дециметровых волн. *Вестник Военной академии Республики Беларусь*. 2013. Т.40. №3. С.69-74.
3. Исаев В.О., Бойкачев П.В., Дубовик И.А. Результаты исследования влияния условий эксплуатации на импеданс антенных устройств радиостанций ОВЧ/УВЧ диапазонов. *Вестник Военной академии Республики Беларусь*. 2019. Т.63. №2. С.32-40.
4. Вентцель Е.С. *Теория вероятностей*. Москва, Академия. 2005. 576 с.
5. Косачев И.М., Нефедов Д.С. Методики расчета показателей достоверности и точности оцениваемых тактико-технических характеристик вооружения военной и специальной техники. *Вестник военной академии Республики Беларусь*. 2015. Т.46. №1. С.107-135.
6. Шикин Е.В., Плис А.И. *Кривые и поверхности на экране компьютера*. Москва, Диалог МИФИ. 1996. 237 с.
7. Грищенко Н.В., Семериков С.А., Хараджян А.А., Чернов Е.В. *Сравнительный анализ методов аппроксимации*. Кривой Рог, КГПИ, 1998. 25 с.
8. Исаев В.О., Дубовик И.А., Бойкачев П.В., Сутько А.А. Математическая модель радиотехнических устройств. *II Международная Научно-Практическая Конференция «Endless Light in Science»*. Нур-Султан. 2020. С.27-33.
9. Карни Ш. *Теория цепей. Анализ и синтез*. Москва, Связь. 1973. 269 с.

10. Ланнэ А.А. *Оптимальный синтез линейных электрических цепей*. Москва, Связь. 1969. 294 с.
11. Исаев В.О., Бойкачев П.В. Способ нахождения адекватных математических моделей радиотехнических устройств с нестабильным импедансом. *Метрология и приборостроение*. Минск, Дивимакс. 2021. Т.92. №1. С.9-16.

**Для цитирования:**

Исаев В.О. Бойкачев П.В. Методика аппроксимации входных и передаточных характеристик радиотехнических устройств и получение аналитических математических моделей с высокой степенью адекватности. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2022. №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.1.4>