

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.2>

УДК: 537.874; 537.624

МЕТОД ОБОБЩЕННОГО ИМПЕДАНСА ДЛЯ РАСЧЕТА ОТРАЖЕНИЯ И ПРОХОЖДЕНИЯ ВОЛНЫ ЧЕРЕЗ МНОГОСЛОЙНУЮ СТРУКТУРУ. ЧАСТЬ 2. ПАДЕНИЕ ВОЛНЫ НА ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ БАРЬЕР

И.В. Антоненц¹, В.Г. Шавров², В.И. Щеглов²

¹ Сыктывкарский государственный университет им. П.Сорокина
167001, Сыктывкар, Октябрьский пр-т, 55

² Институт радиотехники и электроники им. В.А.Котельникова РАН
125009, Москва, ул. Моховая, 11, стр. 7

Статья поступила в редакцию 27 сентября 2022 г.

Аннотация. На основе метода обобщенного импеданса рассмотрено распространение одномерной волны в многослойной структуре, содержащей барьер прямоугольного типа. Введено понятие единичного барьера как слоя, параметры которого отличаются от параметров всех остальных слоев структуры. Рассмотрено перемещение действительного отрицательного единичного барьера по длине структуры. Установлено, что входной импеданс по длине структуры меняется периодическим образом. Получены аналитические выражения, моделирующие зависимости действительной и мнимой частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры. Выявлены три основных режима, соответствующие различному характеру осцилляций: режим №1 – четкая периодичность, режим №2 – нарушенная периодичность, режим №3 – монотонный рост. Исследован коэффициент отражения для всех рассмотренных выше случаев. Установлено, что коэффициент отражения от положения барьера не зависит. Отмечен периодический характер изменения амплитуды и фазы отраженной волны, а также коэффициента отражения при изменении высоты барьера. Для интерпретации периодичности наблюдаемых зависимостей

предложена модель резонанса внутри барьера. Рассмотрены особенности распространения волны в случае барьера, имеющего комплексный характер. Рассмотрен случай, когда действительная часть волнового числа среды барьера остается постоянной, а мнимая часть того же числа меняется в широких пределах. Показано, что коэффициент отражения, начинаясь с нуля, по мере увеличения мнимой части волнового числа барьера плавно возрастает, в пределе стремясь к единице. Коэффициент прохождения также плавно убывает, причем скорее, чем возрастает коэффициент отражения, в пределе стремясь к нулю. Коэффициент поглощения, начинаясь с нуля, плавно возрастает, достигая максимума, после чего плавно убывает, в пределе стремясь к нулю. Рассмотрен случай, когда действительная и мнимая части волнового числа среды барьера одновременно возрастают в одинаковой пропорции. Установлено, что в этом случае на плавные кривые для коэффициентов отражения, прохождения и поглощения накладываются осцилляции. Характер осцилляций интерпретирован в рамках модели резонанса внутри барьера.

Ключевые слова: распространение волн, многослойная структура, импеданс.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Автор для переписки: Щеглов Владимир Игнатьевич, vshcheg@cplire.ru

Введение

Задачи распространения волн в многослойных средах рассматриваются в значительном количестве работ [1-12]. Традиционная постановка, как правило, ограничивается сравнительно небольшим числом слоев – не более двух-трех. Нередко провозглашается возможность обобщения на произвольное количество слоев [2, 3, 7], однако, как правило, рассматриваются лишь среды с периодическими неоднородностями, для которых разработано множество специфических методов [13], [14, стр. 118-142].

В то же время, на практике существует множество неоднородных сред, параметры которых меняются не периодическим, а произвольным образом. Традиционным приемом здесь является представление среды в виде слоистой структуры, параметры которой меняются ступенчатым образом.

Наиболее последовательным методом исследования распространения волн в ступенчатых средах является прямой, в рамках которого в каждом слое структуры решается волновое уравнение, после чего полученные решения сшиваются на границах между слоями [15, 16]. Однако прямой метод, являющийся по сути параллельным, пригоден лишь при числе слоев не более пяти, так как дальнейшее повышение числа слоев приводит к крайне громоздким вычислениям.

От такого недостатка свободны последовательные методы, в которых граничные условия используются по очереди, при последовательном проходе от одного конца структуры к другому. К таким методам прежде всего следует отнести различные варианты матричных методов [2, 17]. От определенной громоздкости матричной алгебры свободен метод импеданса, состоящий в последовательном преобразовании импедансов слоев с учетом граничных условий [3, 18].

Большинство перечисленных работ относится к распространению волн трехмерного характера – электромагнитных или акустических. В то же время, в основе значительной части волновых процессов лежит распространение одномерных волн, характерным примером которых являются волны в струне

[19, стр. 23-121]. Ввиду простоты математического аппарата в сочетании с его математической общностью, многие задачи о распространении волн в неоднородных средах могут быть рассмотрены на основе одномерной волны.

В работе [20] (первая часть настоящей работы) получены удобные рекуррентные формулы, позволяющие находить распределение импедансов и амплитуд распространяющихся волн путем последовательного пересчета импедансов и амплитуд. Рассмотрение выполнено для одномерных волн, отмечена универсальность такого подхода и приведены рекомендации для применения метода для электромагнитных волн.

Настоящая работа является продолжением работы [20] (ее второй частью), где предложенный аппарат применен для решения некоторых конкретных задач распространения одномерных волн в ступенчатой структуре сложного профиля.

1. Геометрия задачи и основные уравнения

В рамках настоящей работы будем рассматривать распространение волн постоянной частоты через структуры, состоящие из определенного числа слоев одинаковой толщины, так что основной характеристикой каждого отдельного слоя будет волновое число. При условии заданной частоты эта характеристика будет включать в себя скорость распространения волны в данной среде в соответствии с соотношением:

$$k_n = \frac{\omega}{v_n}, \quad (1)$$

где n – номер слоя, а v_n – скорость волны в этом слое.

В качестве первичной задачи рассмотрим падение волны на «прямоугольный» барьер, то есть такой, волновое число в котором на протяжении барьера сохраняется постоянным, а вне барьера находится среды, волновые числа в которых также сохраняются постоянными, но отличными от волнового числа внутри барьера. То есть распределение волновых чисел по длине структуры можно представить в виде прямоугольного «импульса» с

резкими «фронтами», по обе стороны от которого волновые числа сохраняются постоянными.

Общая геометрия рассматриваемой многослойной структуры, совпадающая с принятой в работе [20], показана на рис. 1.

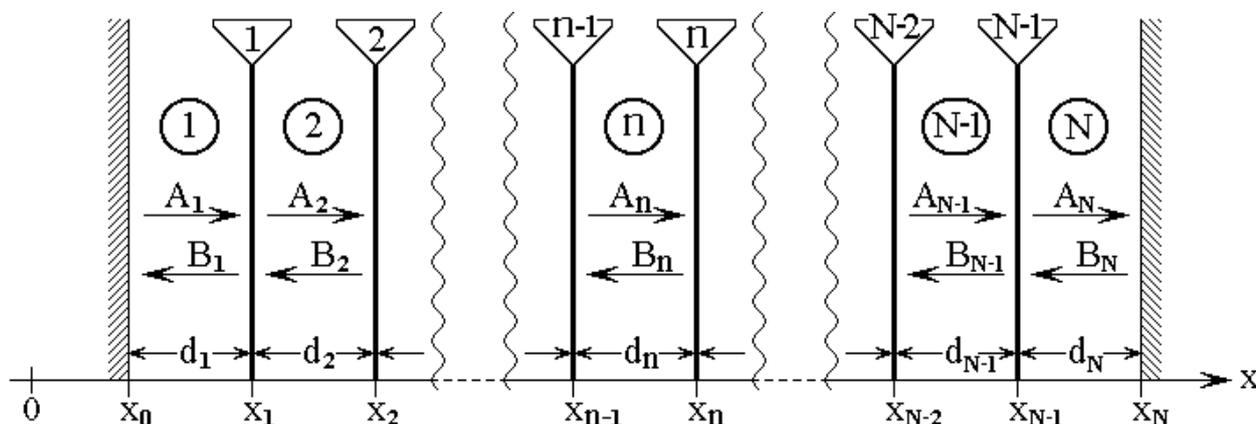


Рис. 1. Общая геометрия задачи. Цифры в кругах – номера сред, цифры в треугольниках – номера границ

Структура содержит N плоскопараллельных однородных слоев, разделенных $N - 1$ границами. Ось координат Ox ориентирована перпендикулярно плоскостям слоев. Начало структуры соответствует $x = x_0$, конец – $x = x_N$. Толщины слоев равны:

$$d_n = x_n - x_{n-1}. \tag{2}$$

В каждом слое распространяются две волны: волна прямого направления A_n и волна встречного направления B_n . На крайних границах структуры при $x = x_0$ и $x = x_N$ отражение волн отсутствует.

В структуру со стороны среды 1 входит прямая волна с амплитудой A_1 . В той же среде распространяется отраженная волна B_1 . В среде N распространяется только волна прямого направления A_N , а волна встречного направления B_N отсутствует, то есть $B_N = 0$.

В структуре распространяются гармонические волны, координатная составляющая которых определяется волновым уравнением:

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial x^2} + k_n^2 U_n = 0, \quad (3)$$

решение которого имеет вид:

$$U_n = A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}. \quad (4)$$

В этом выражении первое слагаемое определяет волну, распространяющуюся в положительном направлении оси Ox , а второе – в отрицательном направлении той же оси.

Волновые числа k_n во всех средах структуры предполагаются известными. Нулевые импедансы сред соответственно равны:

$$Z_{n0} = \frac{1}{k_n}. \quad (5)$$

Обобщенные импедансы в тех же средах равны:

$$Z_n = Z_{n0} \frac{A_n e^{-ik_n x} + B_n e^{ik_n x}}{A_n e^{-ik_n x} - B_n e^{ik_n x}}. \quad (6)$$

При расчете будем пользоваться полученными в работе [20] рекуррентными формулами, позволяющими выполнить пересчет параметров структуры от конца к ее началу.

Формула для пересчета импедансов ((54) в работе [17]) имеет вид:

$$Z_n^{(in)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(in)}) e^{ik_n d_n} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(in)}) e^{-ik_n d_n}}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(in)}) e^{ik_n d_n} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(in)}) e^{-ik_n d_n}}. \quad (7)$$

где $Z_n^{(in)}$ – входной импеданс соответствующего слоя структуры.

Формулы для пересчета амплитуд ((105) и (106) в работе [17]) имеют вид:

$$A_{n-1} = \frac{A_n (Z_{(n-1)0} + Z_{n0}) - B_n (Z_{(n-1)0} - Z_{n0}) \cdot e^{-ik_n d_n}}{2Z_{n0}} \cdot e^{ik_{n-1} d_{n-1}}; \quad (8)$$

$$B_{n-1} = \frac{-A_n (Z_{(n-1)0} - Z_{n0}) + B_n (Z_{(n-1)0} + Z_{n0}) \cdot e^{-ik_n d_n}}{2Z_{n0}}. \quad (9)$$

Коэффициент отражения при пересчете импедансов будем определять по формуле ((64) в работе [20]):

$$R_e = \left| \frac{Z_{10} - Z_2^{(in)}}{Z_{10} + Z_2^{(in)}} \right|. \quad (10)$$

Коэффициенты отражения и прохождения при пересчете амплитуд будем определять по формулам ((124), (125) в работе [20]).

$$R_e = \left| \frac{B_I(A_I)}{A_I} \right|^2; \quad (11)$$

$$T_e = \left| \frac{A_N(A_I)}{A_I} \right|^2 \cdot Re \left(\frac{k_{N0}}{k_{10}} \right). \quad (12)$$

Кроме коэффициентов отражения и прохождения будем рассматривать также коэффициент поглощения, в соответствии с законом сохранения энергии, имеющий вид [21, 22]:

$$A_e = 1 - R_e - T_e. \quad (13)$$

2. Единичный барьер

Рассмотрим сначала наиболее простую задачу. Предположим, что параметры составляющих структуру сред все одинаковы, кроме одной, параметры которой отличаются. Такую среду или слой с отличными от других параметрами будем называть «единичным барьером». Если волновое число единичного барьера больше волновых чисел остальных слоев структуры, то такой барьер будем называть положительным, если меньше – отрицательным. Если волновое число барьера действительное, будем называть такой барьер действительным, если мнимое – мнимым, если комплексное, то есть имеет отличные от нуля действительную и мнимую части – комплексным. Будем перемещать барьер по структуре и следить за импедансами, амплитудами волн и коэффициентами отражения и прохождения относительно структуры в целом. Из всего многообразия перечисленных задач выберем только наиболее

характерные, которые рассмотрим по отдельности. Задачи для импедансов, амплитуд отраженных волн и коэффициентов отражения будем решать методом пересчета импеданса. Для получения коэффициентов прохождения и поглощения используем метод пересчета амплитуд. В качестве базовой рассмотрим структуру, состоящую из 16 сред.

3. Действительный отрицательный барьер

Начнем рассмотрение с перемещения по структуре действительного отрицательного барьера. Обратимся к рис. 2, где приведены эпюры различных параметров барьера и соответствующих входных импедансов.

Каждый столбец рисунка (а-г-ж, б-д-з, в-е-и) соответствует отдельному положению барьера, приведенного в верхней эпюре столбца (а, б или в). Строки рисунка соответствуют различным положениям барьера (а, б, в) и соответствующим действительной (г-д-е) и мнимой (ж-з-и) частям входного импеданса различных сред структуры.

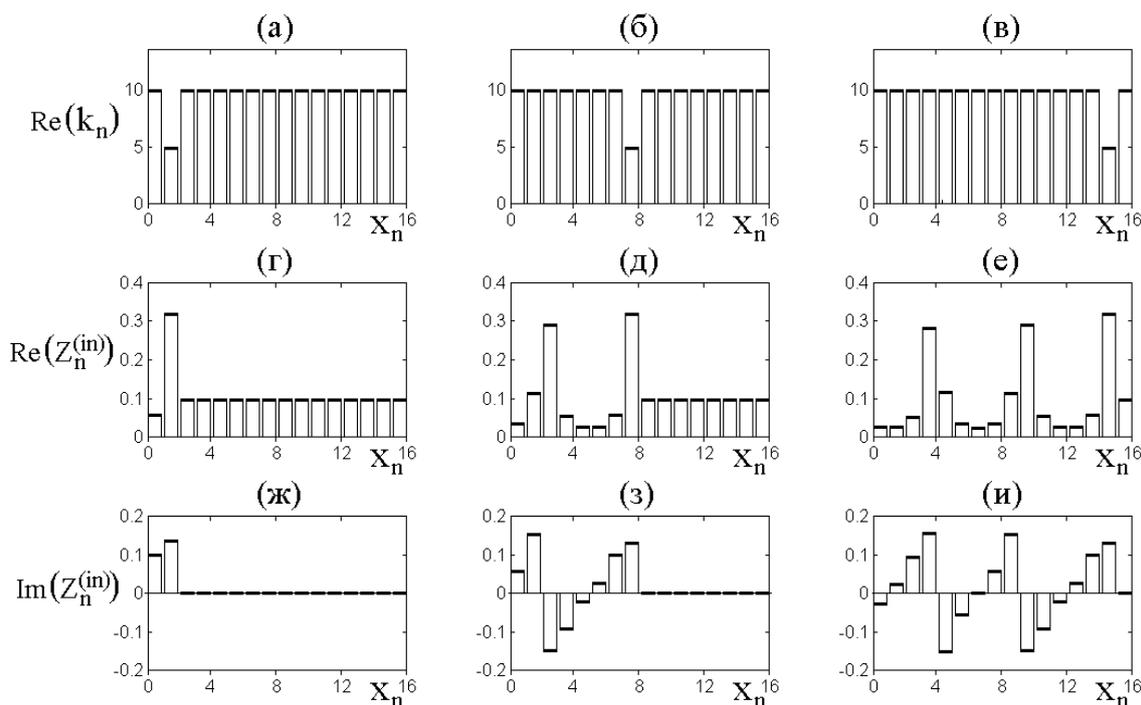


Рис. 2. Перемещение по структуре действительного отрицательного барьера. а, б, в – положения барьера; г, д, е – действительные части входных импедансов слоев структуры; ж, з, и – мнимые части тех же импедансов.

Волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера, равны 10 отн.ед., волновое число среды барьера равно 5 отн.ед.

Рассмотрим три положения барьера в структуре: вблизи ее начала – в среде 2 (рис. 2а), вблизи ее середины – в среде 8 (рис. 2б) и вблизи конца – в среде 15 (рис. 2в).

Из рис. 2г, рис. 2д, рис. 2е, а также рис. 2ж, рис. 2з, рис. 2и, можно видеть, что заметное изменение действительных и мнимых частей входных импедансов имеет место только в средах, координаты x_n которых меньше координаты, соответствующей месту положения барьера, то есть по рисунку – левее. Такая неизменность входного импеданса правее положения барьера происходит из-за того, что пересчет импеданса совершается от конца структуры, то есть от $x_n = 16$ отн.ед. и до того, как очередь дойдет до барьера, пересчет о существовании барьера просто «не знает». Только после того, как пересчет доходит до положения барьера, импеданс начинает меняться. Примечательно, что хотя барьер является полностью действительным, импеданс имеет как действительную, так и мнимую части.

4. Аналитическое моделирование периодичности наблюдаемых зависимостей

Из рис. 2е и рис. 2и следует, что зависимости обеих частей входных импедансов от координаты имеют характер, близкий к периодическому. Проверка показала, что периодичность, в основном, свойственна и другим подобным зависимостям, однако при изменении параметров структуры кривые меняются весьма сложным образом. Были выполнены вариации трех параметров: полной длины структуры, высоты барьера и его длины. Наиболее сильно на характер зависимостей влияет изменение полной длины структуры. Так, увеличение этой длины всего на 2%, то есть, если вместо 16 отн.ед. взять длину равной 16,3 отн.ед, то вместо трех пиков получаются четыре или даже пять, причем сильно изломанного характера. То же касается уменьшения длины с 16 отн.ед. до 15,7 отн.ед. Более сильные вариации длины структуры приводят к еще более серьезному изменению зависимостей, вплоть до нарушения четкой периодичности. Высота барьера меньше влияет на характер зависимостей,

однако тоже достаточно сильно. Так, изменение высоты барьера в обе стороны в два-три раза приводит к изменению периода тоже до двух раз, то есть вместо трех пиков появляются два или четыре. Меньше всего сказывается изменение длины барьера, однако влияние все же остается довольно сильным. Так, при увеличении длины барьера в четыре-пять раз вместо трех пиков на зависимостях остаются всего два. В общем случае характер изменения зависимостей от всех перечисленных параметров весьма сложен и требует отдельного исследования. В этом случае, по-видимому, более четкие результаты можно получить, если рассматривать структуру из большего чем 16 числа слоев, например из 32 или еще больше, что позволит проследить периодичность более подробно. Авторы оставляют такое исследование в качестве отдельной задачи, а здесь ограничиваются далее аналитическим моделированием наблюдаемых зависимостей в рамках эмпирических формул.

Так, из рис. 2е и рис. 2и четко видно, что приведенные зависимости должны элементарным образом описываться тригонометрическими функциями. Однако прямое использование рекуррентной формулы (7) приводит к неимоверно громоздким вычислениям, поэтому приведем здесь упрощенное модельное представление, вытекающее из структуры этой формулы.

Так, упомянутая рекуррентная формула (7) для входного импеданса имеет вид:

$$Z_n^{(in)} = Z_{n0} \frac{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(in)})e^{ik_n d_n} - (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(in)})e^{-ik_n d_n}}{(Z_{n0} + Z_{n+1}^{(in)})e^{ik_n d_n} + (Z_{n0} - Z_{n+1}^{(in)})e^{-ik_n d_n}}. \quad (14)$$

Заменяя экспоненты тригонометрическими функциями в соответствии с формулой Эйлера [23, стр. 76, форм. 408.04], после приведения в числителе и знаменателе подобных членов, получаем:

$$Z_n^{(in)} = Z_{n0} \frac{Z_{n+1}^{(in)} \cos(k_n d_n) + i Z_{n0} \sin(k_n d_n)}{Z_{n0} \cos(k_n d_n) + i Z_{n+1}^{(in)} \sin(k_n d_n)}. \quad (15)$$

Умножая числитель и знаменатель на выражение, комплексно-сопряженное к знаменателю, после чего выделяя действительную и мнимую части, получаем:

$$Re(Z_n^{(in)}) = Z_{n0} \frac{Z_{n+1}^{(in)} Z_{n0}}{(Z_{n+1}^{(in)})^2 + (Z_{n0}^2 - (Z_{n+1}^{(in)})^2) \cos^2(k_n d_n)}; \quad (16)$$

$$Im(Z_n^{(in)}) = Z_{n0} \frac{(Z_{n0}^2 - (Z_{n+1}^{(in)})^2) \sin(k_n d_n) \cos(k_n d_n)}{(Z_{n+1}^{(in)})^2 + (Z_{n0}^2 - (Z_{n+1}^{(in)})^2) \cos^2(k_n d_n)}. \quad (17)$$

Из структуры полученных формул видно, что в первой из них периодическую зависимость от номера n (что эквивалентно зависимости от x_n на рис. 2) обеспечивает квадрат косинуса в знаменателе, а во второй к этой зависимости еще добавляется произведение синуса на косинус в числителе. С условием сохранения структуры, введем модельные формулы:

$$u = \frac{1}{0.05 + \cos^2 x}; \quad (18)$$

$$v = \frac{3 \sin x \cos x}{0.05 + \cos^2 x}. \quad (19)$$

В этих формулах числовые параметры 0.05 и 3 введены для наглядности масштабирования.

Модельные зависимости, отражающие структуру формул (18) и (19), показаны на рис. 3.

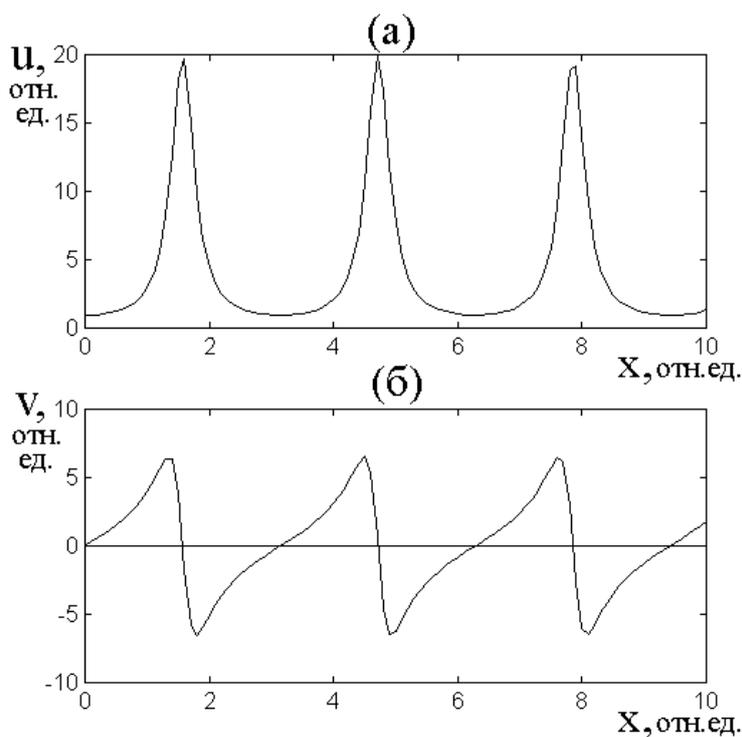


Рис. 3. Модельные зависимости, построенные по формулам (18) – а и (19) – б

Из рис. 3а видно, что кривая $u(x)$ с точностью до замены гистограммы на плавную кривую, имеет ту же структуру, что гистограмма на рис. 2е, а кривая на рис. 3б имеет ту же структуру, что гистограмма на рис. 2и.

Таким образом, предложенная модель с качественной стороны в достаточной степени отражает характер зависимостей действительной и мнимой частей входного импеданса от координаты многослойной структуры, представленных на рис. 2е и рис. 2и. Приведенные здесь зависимости (18) и (19) будем считать базовыми и на их основе обратимся к интерпретации реальных зависимостей.

На рис. 4 приведены зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры. Точки соответствуют рис. 2е и рис. 2и.

Кривая на рис. 4а построена по формуле:

$$Re(Z^{(in)}) = \frac{0.02}{0.05 + \{\cos[0.54(x_n - 0.6)]\}^2}. \quad (20)$$

Кривая на рис. 4б построена по формуле:

$$Im(Z^{(in)}) = \frac{0.075 \sin[0.57(x_n - 1)] \cos[0.57(x_n - 1)]}{0.05 + \{\cos[0.57(x_n - 1)]\}^2}. \quad (21)$$

Обе формулы с точностью до числовых параметров повторяют структуру формул (18) и (19).

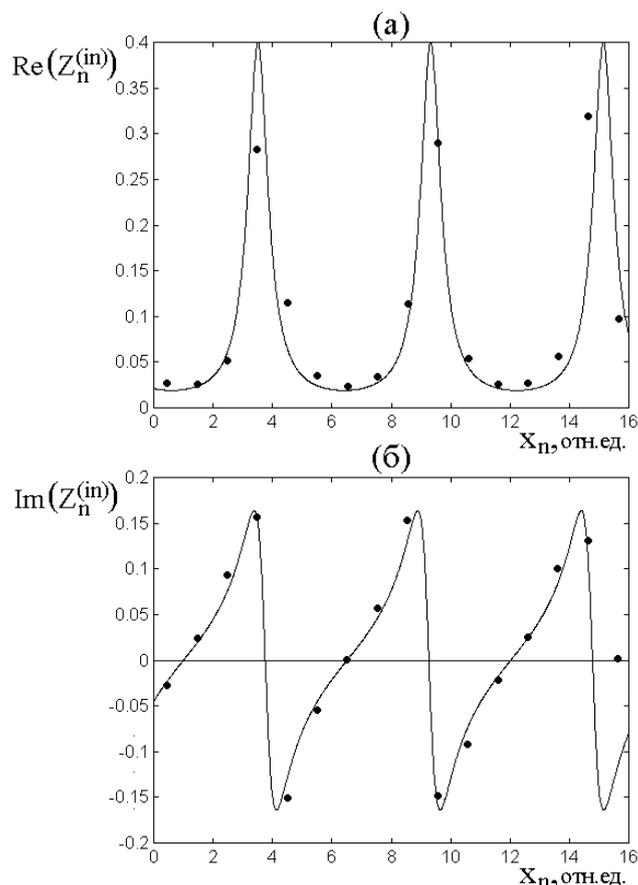


Рис. 4. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры.

Точки – результаты машинного эксперимента, соответствующие вершинам столбцов гистограмм на рис. 2е (а) и рис. 2и (б).

Кривые построены по формулам: а – (20), б – (21)

Из рисунка видно, что обе кривые соответствуют точкам с точностью порядка 10%.

Замечание. Формулы подобраны, исходя из наилучшего совпадения кривых с точками. Некоторое различие знаменателей обусловлено недостаточной точностью построения точек из-за ступенчатого характера изменения координаты x_n .

5. Изменение волнового числа

Все приведенные на рис. 2 зависимости построены при единственном образом заданном значении волнового числа. Так, волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера, равны 10 отн.ед., волновое число среды барьера равно 5 отн.ед.

Из рис. 2д, рис. 2з и особенно рис. 2е, рис. 2и видно, что изменение обеих частей импеданса происходит периодическим образом. Однако периодичность подобных зависимостей не является безусловной и меняется при изменении волнового числа. Из всего многообразия можно уверенно выделить три различных режима зависимости импеданса от координаты. Наиболее характерные случаи представлены на рис. 5.

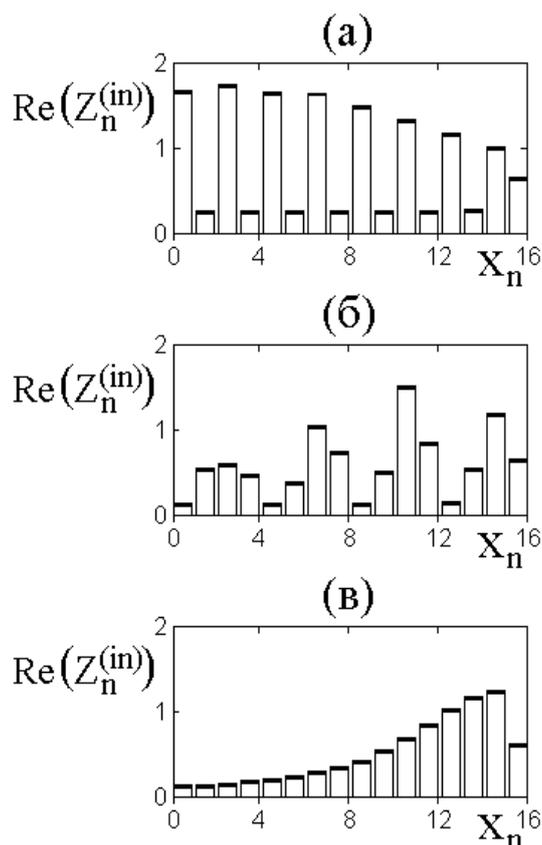


Рис. 5. Зависимости действительной части входного импеданса от координаты при различных значениях волнового числа:

а – $k = 1.6$ отн.ед., (режим №1); б – $k = 2.4$ отн.ед. (режим №2);

в – $k = 3.2$ отн.ед. (режим №3).

Остальные параметры – те же, что на рис. 2.

Приведем краткие характеристики этих режимов.

Режим №1 – четкая периодичность. Этот режим, показанный на рис. 5а, имеет четко выраженную периодичность с периодом 2 отн.ед. Он наступает в тех случаях, когда волновое число кратно произведению 1.6 отн.ед. на нечетное число, то есть при $k = 1.6 \cdot (2n - 1)$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ – целое число. При отклонении от этих значений в ту или иную сторону на величину более ± 0.1 отн.ед. этот режим сменяется режимом №2.

Режим №2 – нарушенная периодичность. Этот режим, показан на рис. 5б. Он имеет место при отклонении волнового числа от значений, свойственных режиму №1, на величину до ± 0.7 отн.ед.

Режим №3 – монотонный рост. Этот режим показан на рис. 5в. Он имеет место в случаях, когда волновое число кратно произведению 1.6 отн.ед. на четное число, то есть при $k = 1.6 \cdot 2n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$ – целое число. При отклонении от этих значений в ту или иную сторону на величину более ± 0.1 отн.ед. этот режим сменяется режимом №2.

В приведенных выше формулах фигурирует одно и то же волновое число $k = 1.6$ отн.ед, которое можно считать «базовым». Это волновое число соответствует длине волны $\lambda = 2\pi/k \approx 4$ отн.ед., а период зависимости, приведенной на рис. 5а, равен 2 отн.ед. То есть базовое волновое число соответствует случаю, когда период зависимости равен половине длины волны. В данном случае все слои структуры имеют длину, равную 1 отн.ед. То есть волновое число $k = 1.6$ отн.ед. соответствует укладыванию половины длины волны на длине (толщине) двух слоев структуры. Можно полагать, что при одновременном изменении толщины всех слоев структуры это число будет меняться в соответствующей пропорции.

6. Периодичность смены режимов

При монотонном увеличении волнового числа в одинаковой пропорции во всех средах режимы сменяют друг друга периодическим образом в последовательности: 1-2-3-2-1-2-3-2-1 и так далее.

Для определенности введем базовое распределение волнового числа по координате. Будем полагать, что базовые значения волновых чисел во всех средах, кроме №15 одинаковые и равны $k_{1-14,16}^{(0)} = 1.0$ отн.ед., а в среде №15 волновое число равно $k_{15}^{(0)} = 0.5$ отн.ед. Исследуемые значения волновых чисел равны произведению базовых значений на нормировочные коэффициенты G_k единые для всей группы волновых чисел данного номера n , то есть:

$$k_n = k_n^{(0)} \cdot G_k, \quad (22)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер среды.

Характер зависимости действительной части входного импеданса от координаты при изменении нормировочного коэффициента волнового числа иллюстрируется рис. 6.

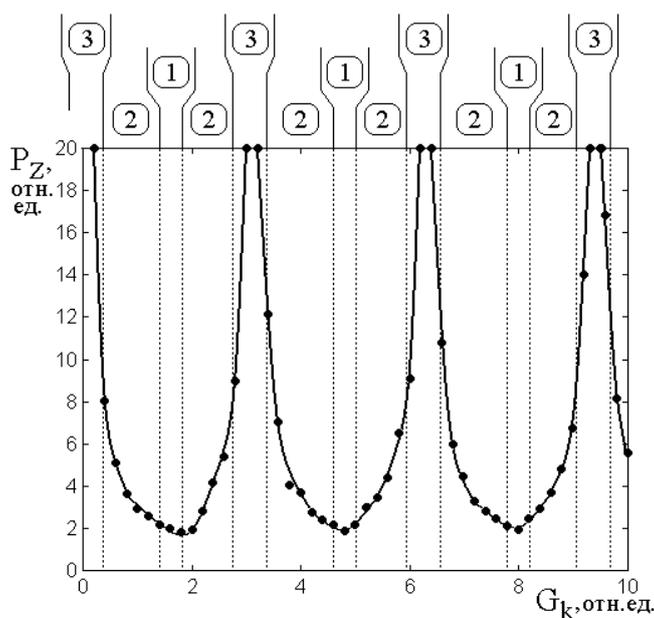


Рис. 6. Изменение периода зависимости действительной части входного импеданса от координаты при изменении нормировочного коэффициента волнового числа. Вверху цифры в кругах – номера режимов.

Точки – результаты машинного эксперимента

Из рисунка можно видеть, что период рассматриваемой зависимости меняется циклическим образом, причем режимы (номера вверху рисунка) сменяют друг друга в указанной выше последовательности.

Примечательно отметить, что приведенная на рис. 6 зависимость может быть моделирована такой же формулой, что (18), где в знаменателе присутствует квадрат косинуса с постоянным слагаемым, однако теперь в качестве переменной выступает нормировочный коэффициент волнового числа, а вместо косинуса используется синус. Возможность такого моделирования представлена на рис. 7, где точки – соответствуют тем же точкам, что на рис. 6, а сплошная линия построена по формуле:

$$P_Z = \frac{0.9}{0.05 + \sin^2 G_k} + 1.5; \quad (23)$$

Видно, что эта формула совпадает с (18) с точностью замены косинуса на синус и введения небольшого сдвига по вертикальной оси. Коэффициент 0,9 в числителе введен для того, чтобы согласовать масштаб по вертикальной оси с рис. 6.

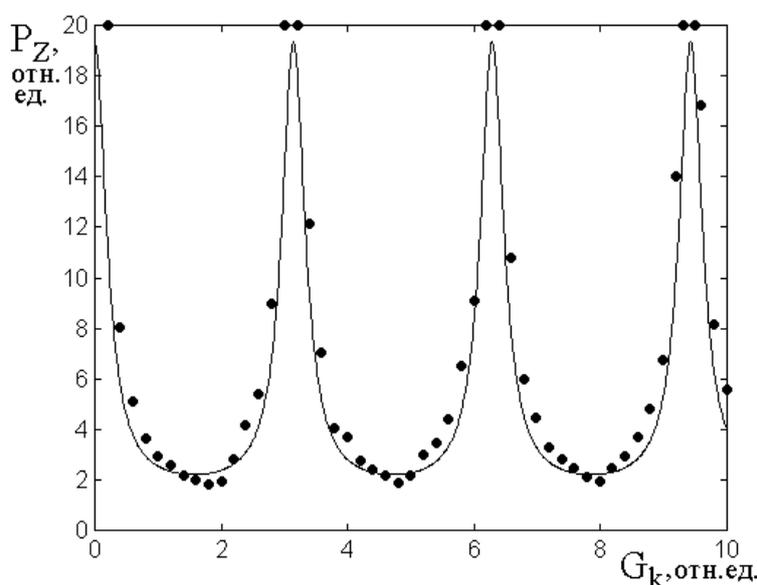


Рис. 7. Модельное представление той же зависимости, что на рис. 6.
Точки – результаты машинного эксперимента.
Сплошная линия – расчет по формуле (23)

Из рисунка видно, что модельное представление соответствует непосредственно измеренным точкам с точностью порядка 10%.

7. Действительный положительный барьер

В предыдущих разделах исследовано влияние действительного отрицательного барьера на распределение входных импедансов сред. Рассмотрим теперь влияние на то же распределение действительного положительного барьера. Проверка показывает, что перемещение положительного барьера по длине структуры оказывает на распределение импедансов влияние, аналогичное перемещению отрицательного. Отличие состоит только в некотором изменении амплитуды и сдвиге по длине структуры распределения как целого. Поэтому здесь подробно на этом не будем останавливаться, а сразу установим положительный барьер в наиболее удаленном слое структуры, то есть при координате $x_n = 15$ отн.ед. и рассмотрим изменение его высоты.

Обратимся к рис. 8, где приведены эпюры различных параметров барьера и соответствующих входных импедансов. Каждый столбец рисунка (а-г-ж, б-д-з, в-е-и) относится к отдельной высоте барьера, приведенного в верхней эпюре столбца (а, б или в). Строки рисунка соответствуют различным значениям высоты барьера (а, б, в) и соответствующим действительной (г-д-е) и мнимой (ж-з-и) частям входного импеданса различных сред структуры.

Как и в случае отрицательного барьера (раздел 3) будем менять не только высоту самого барьера, то есть его волновое число, но и одновременно в такой же пропорции – волновые числа во всех остальных средах структуры.

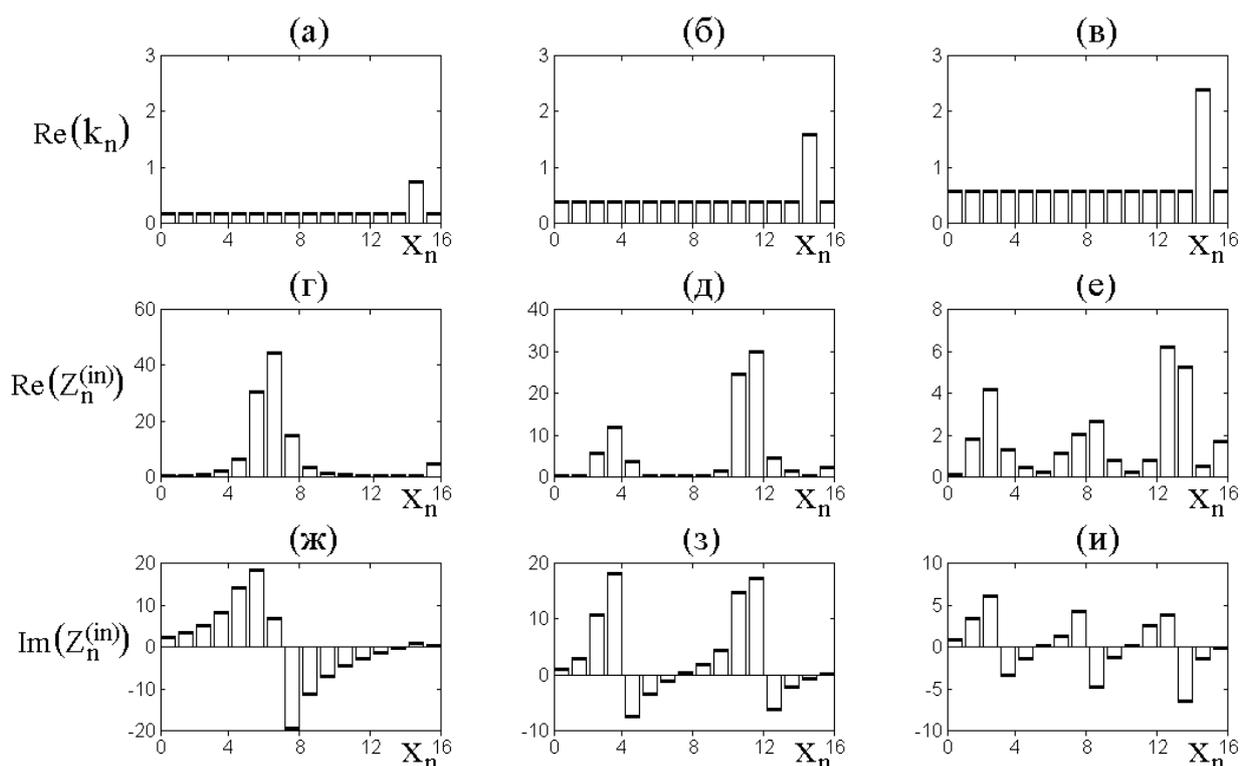


Рис. 8. Изменение высоты действительного положительного барьера.

а, б, в – высота барьера и остальных слоев структуры;

г, д, е – действительные части входных импедансов слоев структуры;

ж, з, и – мнимые части тех же импедансов.

В случаях а, г, ж волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера, равны – 0,2 отн.ед., волновое число барьера – 0,8 отн.ед.; в случаях б, д, з те же величины равны 0,4 отн.ед. и 1,6 отн.ед.; в случаях в, е, и – 0.6 отн.ед. и 2.4 отн.ед.

Из рисунка видно, что характер зависимостей здесь существенно отличается от приведенных на рис. 2, поэтому рассмотрим их более подробно.

8. Периодичность импеданса при изменении волнового числа

Из рис. 8 можно видеть, что положительный барьер приводит к периодической зависимости входных импедансов сред от координаты x_n . В то же время, при увеличении высоты барьера период зависимости входного импеданса от координаты уменьшается (это видно при переходе от левого столбца через средний к правому).

Подобно принятому в разделе 6, введем базовое распределение волнового числа по координате. Будем полагать, что базовые значения волновых чисел во

всех средах, кроме №15 одинаковые и равны $k_{1-14,16}^{(0)} = 1.0$ отн.ед., а в среде №15 волновое число равно $k_{15}^{(0)} = 4.0$ отн.ед. Исследуемые значения волновых чисел равны произведению базовых значений на нормировочные коэффициенты G_k единые для всей группы волновых чисел данного номера n , то есть:

$$k_n = k_n^{(0)} \cdot G_k, \quad (24)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – порядковый номер среды.

На рис. 9 приведена зависимость периода осцилляций действительной части входного импеданса от нормировочного коэффициента волнового числа.

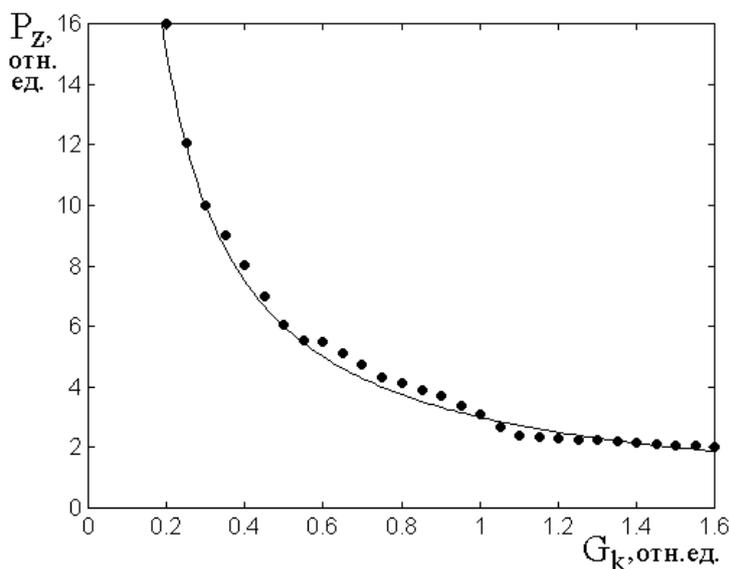


Рис. 9. Зависимость периода осцилляций действительной части входного импеданса от нормировочного коэффициента волнового числа.

Точки – результаты машинного эксперимента.

Сплошная линия – расчет по формуле (25)

Из рисунка можно видеть, что точки, полученные из зависимостей типа приведенных в нижних двух рядах эюр на рис. 8, с точностью порядка 10% хорошо описываются кривой, построенной по закону обратной пропорциональности, в соответствии с формулой:

$$P_Z = \frac{3}{G_k}. \quad (25)$$

Дальнейшее увеличение параметра G_k приводит к колебаниям значения периода в пределах 1.0 – 2.0 отн.ед., причем какая-либо тенденция к периодичности, подобная показанной на рис. 6, здесь отсутствует.

9. Периодичность импеданса при изменении координаты

Рассмотрим теперь сам факт периодичности, для чего обратимся к интерпретации зависимостей, соответствующих максимальному из принятых значений волнового числа, приведенных на рис. 8е и рис. 8и. При этом волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера, равны – 0,6 отн.ед., волновое число барьера – 2,4 отн.ед. (рис. 8в).

На рис. 10 приведены зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры. Точки соответствуют рис. 8е и рис. 8и.

Кривая на рис. 10а построена по формуле:

$$Re(Z^{(in)}) = \frac{0.30}{0.05 + [\cos(0.60 x_n)]^2}; \quad (26)$$

Кривая на рис. 10б построена по формуле:

$$Im(Z^{(in)}) = \frac{3.0 \sin(0.60 x_n) \cos(0.60 x_n)}{0.05 + [\cos(0.60 x_n)]^2}; \quad (27)$$

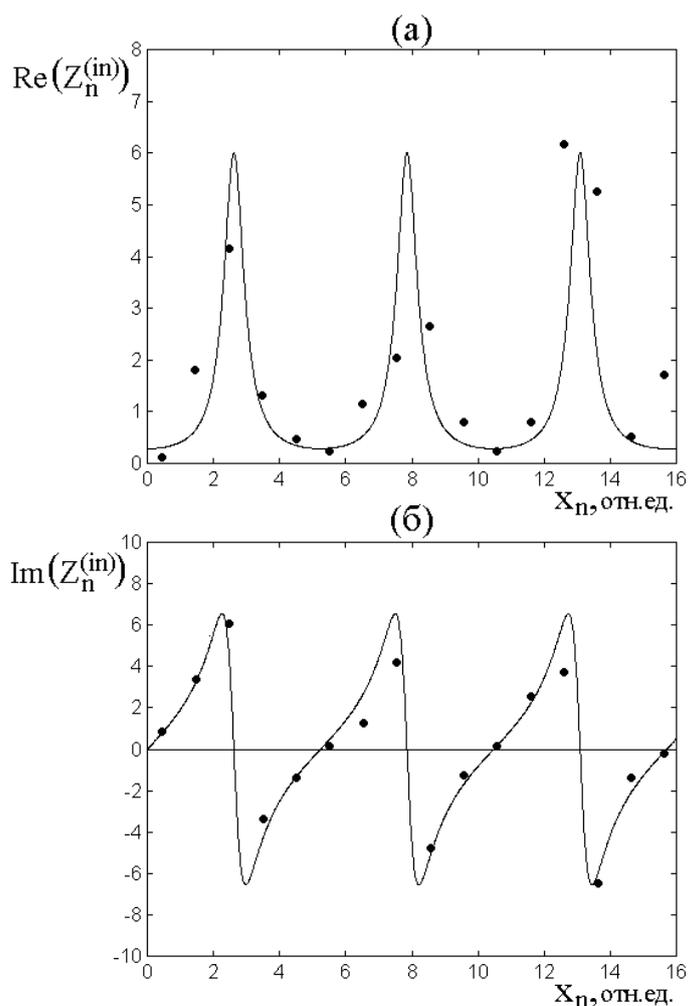


Рис. 10. Зависимости действительной (а) и мнимой (б) частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры.
Точки – результаты машинного эксперимента, соответствующие вершинам столбцов гистограмм на рис. 8е (а) и рис. 8и (б)
Кривые построены по формулам: а – (26), б – (27)

Из рисунка видно, что обе кривые соответствуют точкам с точностью порядка 20%. В отличие от рис. 4 здесь знаменатели в обеих формулах (26) и (27) совпадают, то есть недостаточная точность измерения периода заметного влияния не оказывает.

Замечание. Приведенные на рис. 10 зависимости соответствуют значению нормировочного коэффициента $G_k = 0.6$ отн.ед., что, согласно рис. 9, дает период (то есть изменение фазы квадрата косинуса на π) $P_Z = 5.5$ отн.ед. При этом коэффициент при x_n должен равняться 0,57, тогда как наилучшее

совпадение получается при 0,60. Такое расхождение, около 5%, опять-таки отражает недостаточную точность измерения периода вследствие дискретного характера изменения координаты.

10. Коэффициент отражения

В предыдущих разделах основное внимание уделялось характеру поведения входного импеданса при изменении параметров барьера. Однако для практики весьма важной характеристикой является способность структуры отражать падающее на нее излучение, измеряемая коэффициентом отражения. Обратимся теперь к рассмотрению этого коэффициента при вариации параметров структуры.

Сначала рассмотрим перемещение единичного барьера по длине структуры. Будем рассматривать два случая: первый, когда барьер отрицательный и второй, когда барьер положительный. В качестве базового уровня волнового числа во всех средах, кроме барьера примем 1,0 отн.ед. Волновое число среды отрицательного барьера положим равным 0,5 отн.ед., то есть в два раза меньше базового, а волновое число среды положительного барьера – 2,0 отн.ед., то есть в два раза больше базового. Будем перемещать барьер по координате в пределах сей структуры, то есть от $x = 1$ отн.ед. до $x = 16$ отн.ед. и следить за амплитудой B_1 (ее действительной и мнимой частями, а также модулем) и фазой θ_1 отраженной волны, а также коэффициентом отражения R , определяемым по формуле (11).

Полученные результаты представлены на рис. 11 для отрицательного (левый столбец) и положительного (правый столбец) барьеров. Точки на рисунке – результаты машинного эксперимента. Сплошные кривые построены по следующим формулам:

для отрицательного барьера:

$$a - Re(B_1) = -0.30 \sin(2x_n); \quad (28)$$

$$c - Im(B_1) = 0.30 \cos(2x_n); \quad (29)$$

$$д - |B_I| = 0.3384 \text{ (крайние значения - } 0.3333); \quad (30)$$

$$ж - \theta_I = 0.40 \cos(2x); \quad (31)$$

$$и - R_e = 0.1145 \text{ (крайние значения - } 0.1111); \quad (32)$$

для положительного барьера:

$$б - \operatorname{Re}(B_I) = -0.45 \cos [2(x_n - 0.30)]; \quad (33)$$

$$г - \operatorname{Im}(B_I) = 0.40 \sin [2(x_n - 0.20)]; \quad (34)$$

$$е - |B_I| = 0.5634 \text{ (крайние значения - } 0.3333); \quad (35)$$

$$з - \theta_I = 0.40 \sin [2(x_n - 0.20)]; \quad (36)$$

$$к - R_e = 0.3174 \text{ (крайние значения - } 0.3333). \quad (37)$$

Величины $|B_I|$ и θ_I определяются по стандартным формулам [24, стр. 32, форм. (1.3.4)]:

$$|B_I| = \sqrt{[\operatorname{Re}(B_I)]^2 + [\operatorname{Im}(B_I)]^2}; \quad (38)$$

$$\theta_I = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(B_I)}{\operatorname{Re}(B_I)}. \quad (39)$$

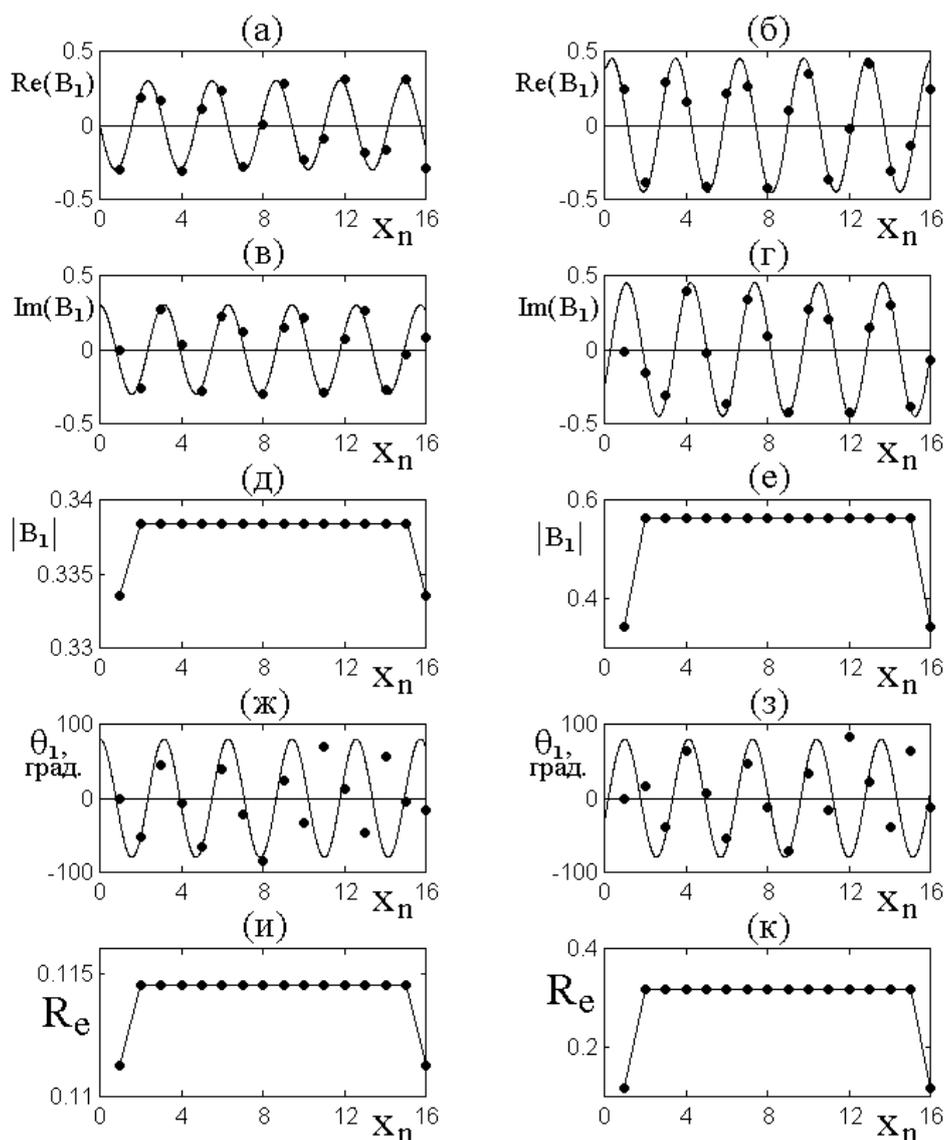


Рис. 11. Зависимости действительной (а,б) и мнимой (в,г) частей амплитуды отраженной волны, модуля такой амплитуды (д,е), фазы отраженной волны (ж,з) и коэффициента отражения (и,к) от координаты расположения барьера по длине структуры.

Левый столбец (а,в,д,ж,и) – барьер отрицательный,
 правый столбец (б,г,е,з,к) – барьер положительный.

Волновые числа во всех средах структуры, кроме барьера – 1,0 отн.ед.,

в среде отрицательного барьера – 0,5 отн.ед.,

в среде положительного барьера – 2,0 отн.ед.

Точки – результаты машинного эксперимента.

Кривые построены по формулам (28)-(39)

Из рисунка можно видеть, что зависимости действительной и мнимой частей амплитуды отраженной волны с точностью порядка 10% описываются синусоидами, причем зависимости для отрицательного и положительного барьеров находятся в противофазе. Модуль амплитуды отраженной волны,

кроме расположения барьера на концах структуры, от координаты барьера не зависит (сохраняется постоянным). Фазы отраженной волны при $x_n \leq 10$ отн.ед. также описываются синусоидами, противофазными для отрицательного и положительного барьеров, а при превышении x_n величины 10 отн.ед., меняются на противоположные, что означает превышение фазы сверх истинного уровня на 180° . То есть, например, на рис. 11ж при $x_n = 11$ отн.ед. точка соответствует значению 90° , что означает, что фаза равна $90^\circ - 180^\circ = -90^\circ$. То же касается остальных точек при $x_n > 10$ отн.ед. Коэффициент отражения, получаемый из модуля амплитуды отраженной волны, кроме расположения барьера на концах структуры, от координаты барьера также не зависит (сохраняется постоянным). Легко видеть, что значения коэффициента отражения равны квадрату модуля амплитуды отраженной волны, как это следует из формулы (11) при $A_I = 1.0$ отн.ед. Отклонение модуля отраженной волны и коэффициента отражения на краях структуры от значений, соответствующих расположению барьера внутри структуры, обусловлено несимметричностью граничных условий в первом и последнем слоях структуры.

Таким образом, главным результатом проделанного рассмотрения можно считать независимость модуля амплитуды отраженной волны и коэффициента отражения от положения барьера, кроме концов структуры. Эта независимость сохраняется несмотря на то, что действительная и мнимая части амплитуды, а также фаза отраженной волны при сдвиге барьера меняются синусоидальным образом.

11. Изменение высоты барьера

Рассмотрим теперь, как ведет себя отраженная волна при изменении высоты барьера. Поскольку коэффициент отражения не зависит от положения барьера (кроме первого и последнего слоев), зададим положение барьера в предпоследнем слое структуры, для которого $x_n = 15$ отн.ед. Базовой уровень

волновых чисел во всех средах структуры, кроме среды барьера, положим равным $k_{1-14, 16} = 1.0$ отн.ед., а волновое число среды, соответствующей барьеру, то есть $k_b = k_{15}$ будем плавно менять от 0.1 до 20.0 отн.ед. Для удобства терминологии будем называть величину k_b «высотой» барьера. Получаемые зависимости представлены на рис. 12.

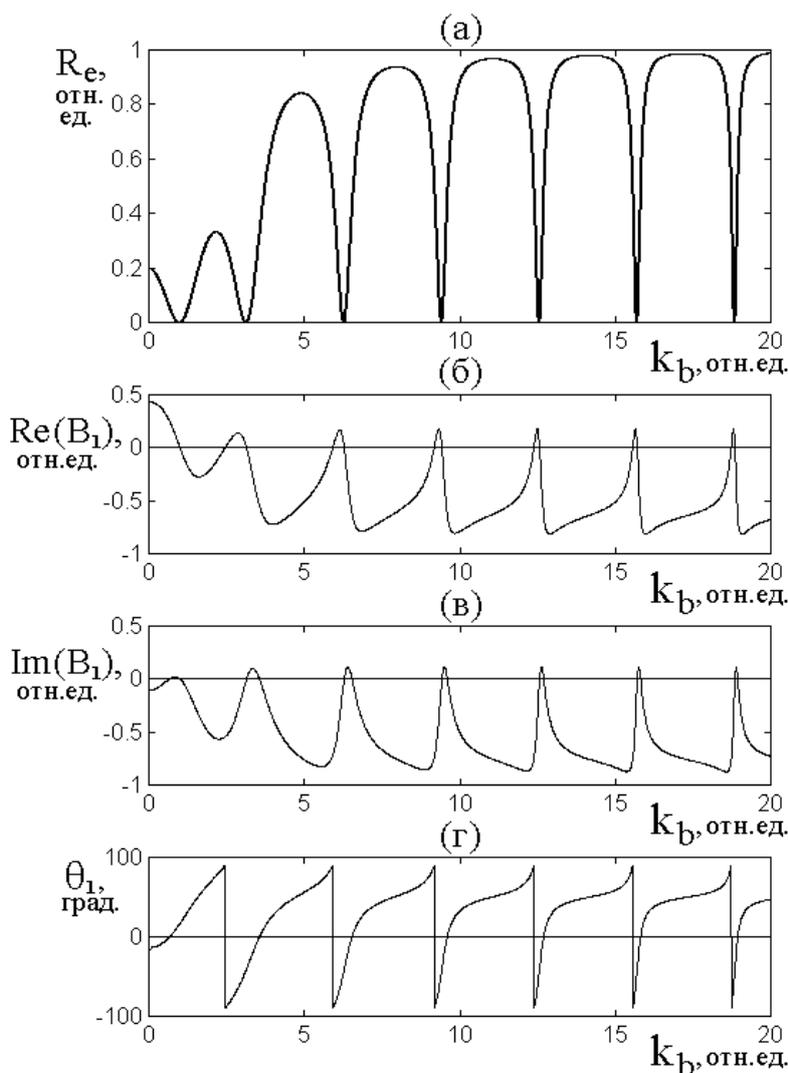


Рис. 12. Зависимости коэффициента отражения (а), действительной (б) и мнимой (в) частей амплитуды отраженной волны, а также ее фазы (г) от волнового числа среды, соответствующей барьеру k_b .

Волновые числа в средах вне барьера равны 1.0 отн.ед.

Из рис. 12а видна четкая периодичность зависимости коэффициента отражения от высоты барьера. Такой же четкой периодичности следуют действительная (рис. 12б) и мнимая (рис. 12в) части амплитуды отраженной волны, а также ее фаза (рис. 12г). Заметим, что последняя зависимость

соответствует непрерывному увеличению набега фазы во всем интервале изменения k_b , а видимые осцилляции происходят из-за периодичности значения тангенса через 180 градусов.

Рассмотрим формирование периодичности приведенных зависимостей более подробно.

12. Модель резонанса внутри барьера

Для интерпретации периодического характера зависимости коэффициента отражения от волнового числа в среде барьера, введем модель резонанса внутри барьера.

В качестве электрического эквивалента рассмотрим длинную линию, в начале которой включен источник, создающий волну, а на конце находится нагрузка, являющаяся эквивалентом барьера.

Будем полагать, что внутри барьера, благодаря возможности отражения от обеих его границ, устанавливается стоячая волна. Резонанс наступает тогда, когда по длине барьера укладывается целое число полуволен. Пусть длина волны такова, что по длине барьера укладывается одна полуволна. Тогда, обозначая длину барьера через Δx , получаем условие резонанса в виде:

$$l \cdot \frac{\lambda_l}{2} = \Delta x. \quad (40)$$

Учитывая, что длина волны связана с волновым числом соотношением:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad (41)$$

получаем:

$$k_l = \frac{\pi}{\Delta x}. \quad (42)$$

Положим теперь, что длина волны такова, что на длине барьера укладываются две полуволны. Тогда условие резонанса принимает вид:

$$2 \cdot \frac{\lambda_2}{2} = \Delta x, \quad (43)$$

откуда получаем:

$$k_2 = \frac{2\pi}{\Delta x}. \quad (44)$$

Аналогично для трех полуволин получаем:

$$k_3 = \frac{3\pi}{\Delta x} \quad (45)$$

и так далее, то есть

$$k_n = \frac{n\pi}{\Delta x}, \quad (46)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$ – целое число.

По аналогии с резонансом в струне [19, стр. 82-96], можно полагать, что укладывание нечетного числа полуволин соответствует собственным модам струны с закрепленными концами, а укладывание четного числа полуволин – струне со свободными концами.

Резонансную нагрузку на линию можно рассматривать как включенный на конце линии колебательный контур. При этом (в отсутствие затухания) сопротивление параллельного контура бесконечно велико, а последовательного – бесконечно мало. Положим, что струна с закрепленными концами аналогична параллельному контуру, а со свободными – последовательному. То есть укладыванию нечетного числа полуволин эквивалентно бесконечно большому сопротивлению, а четного – бесконечно малому. В обоих случаях отражение от такой неоднородности, то есть от барьера будет бесконечно велико, то есть формула (46) дает последовательность волновых чисел барьера, которые соответствуют максимумам коэффициента отражения.

Обратимся теперь к рис. 12а. Можно видеть, что максимумы коэффициента отражения приходятся на значения волнового числа равные 2, 5, 8, 11, 14, 17 и так далее, что представляет собой арифметическую прогрессию с

разностью, равной 3 отн.ед. Из формулы (46), полагая длину барьера $\Delta x = 1$ отн.ед. и $\pi \approx 3$, получаем последовательность резонансных волновых чисел: 3, 6, 9, 12, 15, 18 и так далее, все члены которой отличаются от наблюдаемой из рис. 12а последовательности на единицу. То есть вместо формулы (46) лучшее соответствие дает формула:

$$k_n = \frac{n\pi}{\Delta x} - 1. \quad (47)$$

Такое отличие, по-видимому, принципиальным не является и обусловлено особенностью пересчета импеданса в крайних слоях структуры, что приводит к резкому уменьшению расчетного значения коэффициента отражения при $x = x_0$ и $x = x_{16}$, как это видно из рис. 11д,е,и,к. Заметим, что относительная величина сдвига по мере увеличения номера n , уменьшается, то есть точность предложенной резонансной модели возрастает.

Таким образом, соответствие между наблюдаемой последовательностью максимумов зависимости коэффициента отражения от волнового числа среды барьера и данными резонансной модели можно считать вполне удовлетворительными.

13. Изменение длины барьера

Проведенное в предыдущих разделах рассмотрение выполнено при условии, что длина барьера равна 1 отн.ед. Периодический характер зависимости коэффициента отражения R_e от высоты бартера k_b , представленной на рис. 12а, интерпретирован через определенную величину длины барьера, обозначенную в формуле (47) через Δx . Можно полагать, что период зависимости R_e от k_b , который обозначим далее через P_R , должен зависеть от длины барьера, для которой введем обозначение L_b (то есть в формуле (47) величина Δx должна быть заменена на L_b). Для рассмотрения этого вопроса обратимся к рис. 13, где

представлены зависимости коэффициента отражения от высоты барьера при различных значениях длины барьера.

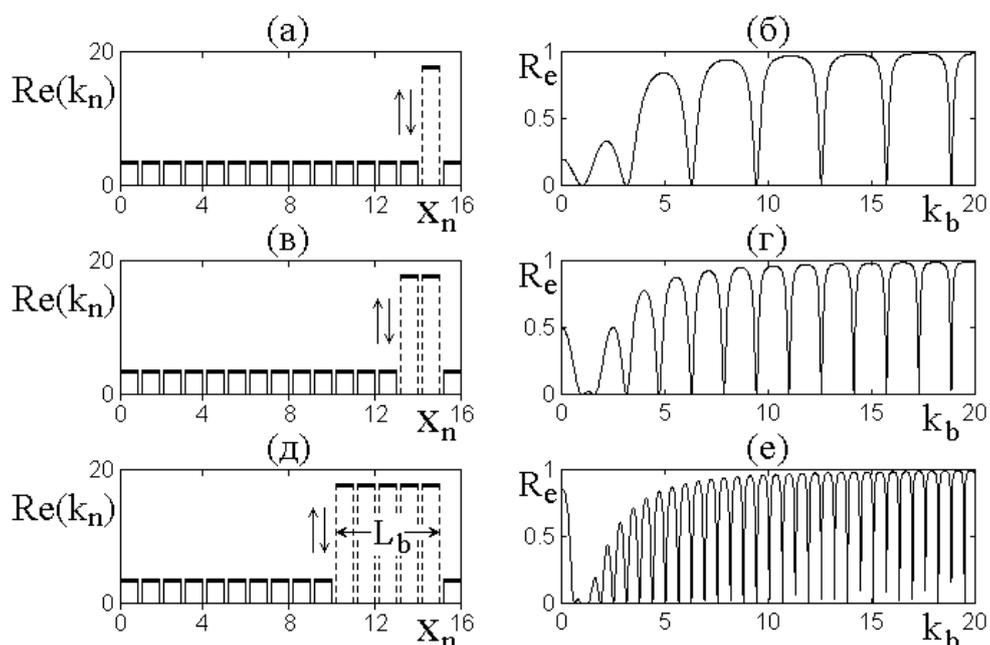


Рис. 13. Зависимость коэффициента отражения R_e от высоты барьера k_b при изменении длины барьера L_b . Левый столбец – распределение волновых чисел по длине структуры, правый столбец – соответствующие зависимости коэффициента отражения от высоты барьера.

а, б – $L_b = 1$ отн.ед.; в, г – $L_b = 2$ отн.ед.; д, е – $L_b = 5$ отн.ед.

Волновые числа всех сред, кроме барьера, равны 1 отн.ед.

Волновое число среды барьера меняется от 0.1 до 20 отн.ед.

Из рисунка видно, что все зависимости коэффициента отражения от высоты барьера, начинаясь от довольно заметной величины, сначала спадают, достигая нуля при высоте барьера, равной единице, после чего нарастают, стремясь при высоте барьера около 10 отн.ед. к единице. Такое поведение обусловлено соотношением между высотой барьера и величиной волновых чисел в остальных средах. Когда волновое число, соответствующее высоте барьера, равняется волновым числам окружающих сред, то есть 1 отн.ед, неоднородность исчезает, так что коэффициент отражения становится равным нулю. Чем больше отличается волновое число барьера от чисел окружающих сред, тем отражение больше, так что зависимости на рис. 13г, д, е в обе стороны от $k_b = 1$ увеличиваются. Однако коэффициент отражения не может превышать

единицу (что противоречило бы сохранению энергии), так что при значительном различии между волновым числом среды барьера и волновыми числами окружающих сред, стремится к единице, как это видно из рис. 13г, д, е при $k_b > 1$.

Важнейшей особенностью рисунка является тот факт, что при увеличении длины барьера (то есть по левому столбцу сверху вниз) период осцилляций зависимости коэффициента отражения от высоты барьера (правый столбец) уменьшается. Такое уменьшение как раз соответствует обратной зависимости, даваемой формулой (47).

Для более точного выявления характера зависимости периода осцилляций P_R от длины барьера L_b обратимся к рис. 14, где такая зависимость построена в широком интервале изменения L_b . На рисунке точки соответствуют непосредственному измерению периода по кривым, подобным приведенным на рис. 13б, г, е. Сплошная линия построена по формуле:

$$P_R = \frac{1}{L_b - 1} + 0.3. \quad (48)$$

Можно видеть, что по структуре эта формула, с точностью до числовых коэффициентов порядка единицы, подобна формуле (47)

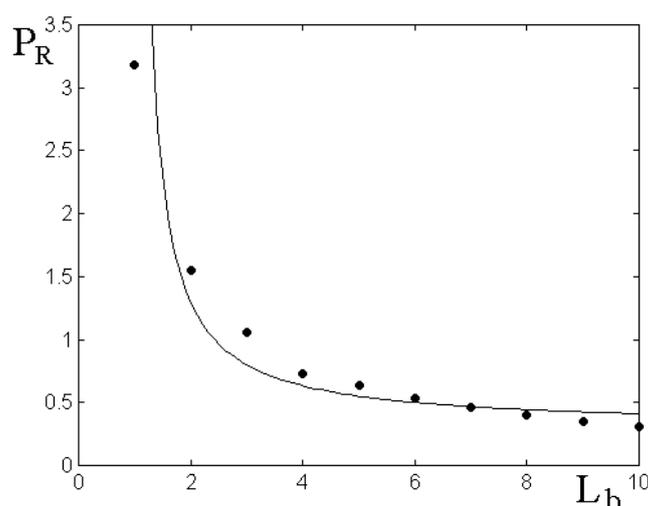


Рис. 14. Зависимость периода осцилляций коэффициента отражения при изменении высоты барьера от длины барьера. Точки – результаты машинного эксперимента, линия построена по формуле (48). Все параметры – те же, что на рис. 13.

Из рисунка видно, что соответствие между кривой и точками находится в пределах около 10%. Таким образом, можно полагать, что предложенная в разделе 12 модель резонанса внутри барьера отражает наблюдаемую картину с довольно высокой степенью точности.

14. Комплексный барьер

Все сделанное выше рассмотрение выполнялось в предположении отсутствия потерь энергии в структуре, то есть волновые числа всех сред, в том числе барьера, были чисто действительными. Рассмотрим теперь случай, когда внутри барьера имеются потери энергии, так что волновое число среды барьера имеет комплексный характер. Обратим внимание на коэффициенты отражения, прохождения и поглощения. Поскольку пересчет импедансов дает возможность определить только коэффициент отражения, то здесь будем пользоваться пересчетом амплитуд в соответствии с рекуррентными формулами (8)-(9), При этом для расчета коэффициентов отражения R_e и прохождения T_e будем пользоваться формулами (11)-(12), а для расчета коэффициента поглощения A_e – формулой (13).

Предварительная проверка показывает, что, как и в случае действительного барьера, перемещение положения комплексного барьера по длине структуры перечисленные коэффициенты не меняет (изменяется лишь распределение амплитуд, но коэффициенты остаются постоянными). Поэтому для простоты рассмотрения и удобства сравнения с предыдущими случаями барьер разместим в среде №15 и его волновое число будем менять, а волновые числа во всех остальных средах положим постоянными и равными $k_{1-14, 16} = 1$ отн.ед.

Сначала предположим, что действительная часть волнового числа среды барьера остается постоянной, а мнимая часть меняется. Будем описывать волновое число среды барьера с помощью формулы:

$$k_{15} = 1.0 - i \cdot 0.5 G_{km}, \quad (49)$$

где G_{km} – параметр мнимой части высоты барьера, представляющий собой действительное число, которое будем менять в пределах от 0.1 до 20 отн.ед. То есть начнем с величины, при которой мнимая часть высоты барьера в 10 раз меньше высоты окружающих сред, а закончим, когда мнимая часть превысит высоту окружающих сред в 20 раз. Проверка показывает, что такой интервал отражает изменение всех рассматриваемых коэффициентов в достаточной степени, так как далее они меняются мало, стремясь к постоянным значениям. Полученные результаты представлены на рис. 15.

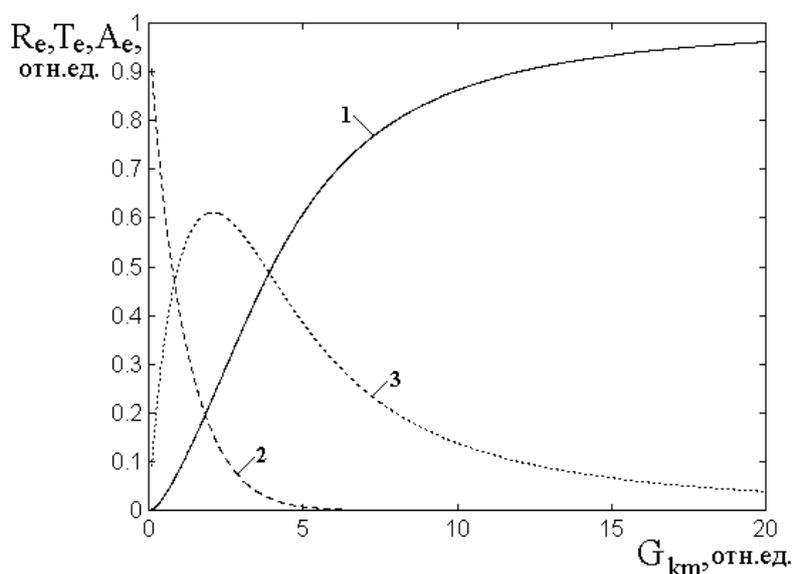


Рис. 15. Зависимости коэффициентов отражения (1), прохождения (2) и поглощения (3) от параметра мнимой части высоты барьера, меняющегося в соответствии с формулой (49).

Из рисунка видно, что коэффициент отражения (кривая 1), начинаясь с нуля, по мере увеличения мнимой составляющей высоты барьера плавно увеличивается, постепенно переходя к насыщению, устремляясь к единице, что соответствует полному отражению. Равенство величины R_e нулю при $G_{km} = 0$ происходит из-за того, что в этом случае волновое число среды барьера становится равным волновым числам окружающих сред, так что от барьера ничего не отражается. Далее, по мере увеличения G_{km} отражение возрастает, так как структура становится более неоднородной, а насыщение со стремлением к единице происходит из-за того, что неоднородность возрастает настолько, что

уже вся энергия падающей волны отражается обратно и дальше отражению расти уже некуда, ибо это противоречило бы сохранению энергии.

Коэффициент прохождения (кривая 2) наоборот начинается с величины, близкой к единице, а при увеличении мнимой части волнового числа барьера довольно быстро спадает, в пределе стремясь к нулю. Начало такой зависимости опять соответствует полному равенству волнового числа среды барьера волновым числам окружающих сред, так что падающая волна проходит полностью. Когда мнимая компонента волнового числа барьера увеличивается, прохождение ухудшается, так как часть энергии отражается и еще часть поглощается. Благодаря одновременному действию отражения и поглощения, кривая 2 идет круче, чем кривая 1. Далее, отражение и поглощение настолько увеличиваются, что на долю прохождения уже ничего не остается и коэффициент прохождения стремится к нулю.

Коэффициент поглощения (кривая 3) начинается от нуля, так как волновое число среды барьера при этом равно волновым числам окружающих сред, то есть неоднородность структуры отсутствует. Далее, от структуры отражается еще довольно малая часть падающей энергии, так что поглощение растет. Однако, пройдя определенный максимум, поглощение убывает, а затем и вовсе стремится к нулю, так как структура становится настолько неоднородной, что над всем преобладает отражение.

Проведенное рассмотрение относится к случаю, когда действительная часть волнового числа среды барьера остается постоянной и равной действительным волновым числам окружающих сред. Поэтому резонанс внутри барьера (раздел 12) возникнуть не может, так как для действительной части волнового числа неоднородность отсутствует. Рассмотрим теперь одновременное изменение действительной и мнимой частей волнового числа среды барьера, для чего представим это число в виде:

$$k_{15} = (1.0 - i \cdot 0.1) G_{kc}, \quad (50)$$

где G_{kc} – параметр, подобный G_{km} , но теперь относящийся к волновому числу в целом. Это параметр также будем менять от 0.1 до 20 отн.ед.

Полученные результаты представлены на рис. 16.

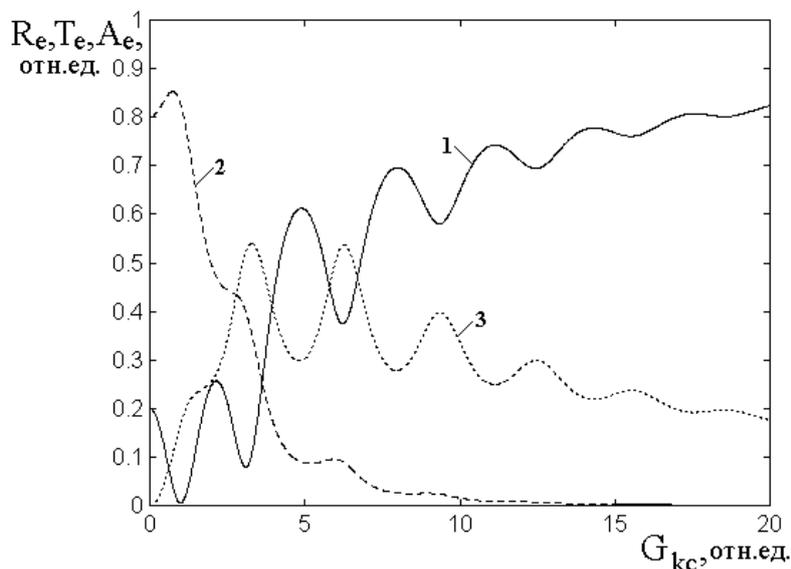


Рис. 16. Зависимости коэффициентов отражения (1), прохождения (2) и поглощения (3) от параметра комплексного волнового числа барьера, меняющегося в соответствии с формулой (50)

Из рисунка видно, что коэффициенты отражения (кривая 1), прохождения (кривая 2) и поглощения (кривая 3) ведут себя довольно сходно с подобными зависимостями, приведенными на рис. 15, однако здесь на все кривые накладываются осцилляции, амплитуда которых по мере увеличения G_{kc} постепенно уменьшается.

Из сравнения с результатами раздела 13, можно заключить, что осцилляции вызваны резонансами в среде барьера. Уменьшение амплитуды осцилляций по мере увеличения G_{kc} отражает уменьшение «добротности» резонатора из-за возрастания затухания. Проверка показывает, что при увеличении длины барьера период осцилляций уменьшается подобно тому, как это показано в разделе 13 (рис. 13). Таким образом, можно полагать, что и здесь наблюдаемые результаты отражаются резонансной моделью с приемлемой степенью достоверности.

Заключение

Основные результаты настоящей работы сводятся к следующему.

Путем использования метода обобщенного импеданса рассмотрено распространение одномерной волны в многослойной структуре, содержащей барьер прямоугольного типа.

Приведена общая геометрия задачи, представляющая собой структуру из произвольного числа однородных слоев, разделенных границами. На основе решения волнового уравнения для каждого слоя, показано, что в слое распространяются две волны – прямого и встречного направлений, а на границах между слоями выполняется равенство амплитуд волн и обобщенных импедансов. В качестве рабочего параметра различения слоев выбрано волновое число одномерной волны, распространяющейся в каждом однородном участке структуры. Прямоугольный барьер представлен в виде участка структуры, в котором волновое число сохраняется постоянным, причем вне барьера волновое число также остается постоянным, но отличным от волнового числа внутри барьера. В качестве инструмента расчета используется метод обобщенного импеданса в двух вариантах – пересчета импедансов и пересчета амплитуд.

Введено понятие единичного барьера как слоя, параметры которого отличаются от параметров всех остальных слоев структуры, которые сохраняются равными друг другу. В качестве вариантов предложены определения положительного, отрицательного, действительного и комплексного барьера. В качестве базовой рассмотрена структура, состоящая из 16 сред.

Рассмотрено перемещение действительного отрицательного единичного барьера по длине структуры, то есть поочередное принятие волнового числа такого барьера различными слоями структуры. В качестве измеряемого параметра выбраны действительная и мнимая части входных импедансов структуры.

Установлено, что изменение входного импеданса по длине структуры имеет периодический характер, причем осцилляции наблюдаются только в той части структуры, которая расположена между ее входом и положением

единичного барьера, тогда как в остальной части структуры входной импеданс остается постоянным. Отмечено, что такое поведение входного импеданса обусловлено направлением пересчета импедансов от конца структуры к ее началу, так что осцилляции начинаются только тогда, когда процедура пересчета достигает места расположения единичного барьера.

Отмечена крайне высокая сложность поведения осцилляций при изменении параметров структуры. Рассмотрены три параметра: полная длина структуры, высота барьера и его длина. Отмечено, что наиболее сильно на характере осцилляций сказывается полная длина структуры, изменение которой на единицы процентов вызывает резкое изменение структуры осцилляций. Влияние высоты барьера проявляется при изменении ее величины в 2-3 раза, а для заметного влияния длины барьера требуется ее увеличение в 4-5 раз.

На основе рассмотрения структуры рекуррентных формул пересчета импедансов, получены аналитические выражения, качественно моделирующие зависимости действительной и мнимой частей входных импедансов от координаты вдоль структуры. Найдены численные параметры, обеспечивающие соответствие полученных формул с реально наблюдаемыми зависимостями с точностью порядка 10%.

Рассмотрено многообразие зависимостей действительных частей входных импедансов от координаты при различных значениях волнового числа среды барьера. Выявлены три характерных режима, соответствующие различному характеру осцилляций: режим №1 – четкая периодичность, режим №2 – нарушенная периодичность, режим №3 – монотонный рост. Выявлено базовое значение волнового числа, половина длины волны для которого равна длине (толщине) двух слоев структуры. Отмечено, что режим №1 имеет место тех случаях, когда волновое число кратно произведению базового волнового числа на нечетное число, а режим №3 имеет место в тех случаях, когда волновое число кратно произведению базового числа на четное число. Соотношения кратности по обоим режимам выполняются в пределах 10%, а во всех остальных случаях имеет место режим №2.

Рассмотрено изменение периода зависимости действительной части входного импеданса от координаты при одновременном изменении волнового числа во всех средах путем умножения на нормирующий коэффициент. Отмечен периодический характер зависимости такого периода от нормирующего коэффициента. Установлено, что при монотонном увеличении волнового числа в одинаковой пропорции во всех средах режимы сменяют друг друга периодическим образом в последовательности: 1-2-3-2-1-2-3-2-1 и так далее.

Получена аналитическая формула, по структуре сходная с формулой, моделирующей зависимость действительных частей входных импедансов сред от координаты вдоль структуры, отражающая зависимость периода от нормирующего коэффициента с точностью порядка 10%.

Рассмотрено перемещение действительного положительного единичного барьера по длине структуры, то есть поочередное принятие волнового числа такого барьера различными слоями структуры. В качестве измеряемого параметра выбраны действительная и мнимая части входных импедансов структуры. Установлено, что перемещение положительного барьера по длине структуры оказывает на распределение импедансов влияние, аналогичное перемещению отрицательного. Отличие состоит только в некотором изменении амплитуды и сдвиге по длине структуры распределения как целого. Вследствие незначительности отличий, для дальнейшего рассмотрения положительный барьер установлен в наиболее удаленном он начала слое структуры.

Рассмотрено изменение высоты положительного барьера при изменении волнового числа в среде барьера в интервале от 0,1 до 4 раз относительно волновых чисел окружающих сред. Выявлен периодический характер зависимостей действительных и мнимых частей входных импедансов слоев структуры от координаты. Показано, что зависимость периода осцилляций от высоты барьера имеет обратно пропорциональный характер с точностью порядка 10%. Периодичность зависимостей входного импеданса от координаты описана на основе формулы, с точностью до числовых коэффициентов совпадающей с

формулой, предложенной для таких же осцилляций в случае отрицательного барьера.

Исследован коэффициент отражения для всех рассмотренных выше случаев. Прежде всего установлено, что величина коэффициента отражения в случае как отрицательного, так и положительного барьеров при перемещении барьера с сохранением его параметров по длине структуры, не меняется, то есть коэффициент отражения от положения барьера не зависит. Также не зависит от положения барьера модуль отраженной волны, однако амплитуда ее действительной и мнимой составляющих по мере перемещения барьера по длине структуры меняется синусоидальным образом. При этом модуль отраженной волны, как квадратный корень из суммы квадратов действительной и мнимой частей, сохраняется постоянным, а набег фазы, как арктангенс отношения мнимой и действительной частей, меняется также синусоидальным образом.

Рассмотрено изменение амплитуды и фазы отраженной волны, а также коэффициента отражения при изменении высоты барьера. Отмечен периодический характер всех этих зависимостей. Для интерпретации периодичности наблюдаемых зависимостей предложена модель резонанса внутри барьера. На основе аналогии с распространением электромагнитной волны в длинной линии, нагруженной на конце параллельным или последовательным колебательным контуром, установлены положения максимумов зависимости коэффициента отражения от волнового числа среды барьера. Установлено, что такая зависимость, по мере увеличения волнового числа барьера, начинается с величины, близкой к единице, после чего сначала убывает, достигая нуля, когда волновое число барьера становится равным волновым числам окружающих сред, а после прохождения минимума снова возрастает, в пределе стремясь к единице.

Рассмотрен характер изменения зависимости коэффициента отражения от высоты барьера при изменении длины барьера. Показано, что по мере увеличения длины барьера периодическая зависимость коэффициента отражения от волнового числа барьера сгущается, причем период такой

зависимости меняется обратно пропорционально длине барьера с точностью порядка 10%.

Рассмотрены особенности распространения волны в случае барьера, имеющего комплексный характер. Для определения коэффициентов отражения и прохождения, а также следующего из них коэффициента поглощения, использован метод обобщенного импеданса в варианте пересчета амплитуд.

Установлено, что, как и в случае действительного барьера, перемещение положения комплексного барьера по длине структуры перечисленные коэффициенты не меняет, то есть, несмотря на то, что распределение амплитуд внутри структуры испытывает вариации, коэффициенты отражения, прохождения и поглощения остаются постоянными.

Рассмотрен случай, когда действительная часть волнового числа среды барьера остается постоянной, равной действительным частям окружающих сред, а мнимая часть волнового числа барьера меняется в широких пределах – от 0.1 до 20 значений действительной части волнового числа. Показано, что коэффициент отражения, начинаясь с нуля по мере увеличения мнимой части волнового числа барьера плавно возрастает, в пределе стремясь к единице. При этом коэффициент прохождения также плавно убывает, причем скорее, чем возрастает коэффициент отражения, в пределе стремясь к нулю. При этом коэффициент поглощения, начинаясь с нуля плавно возрастает, достигая максимума тогда, когда коэффициент прохождения уменьшается почти на порядок от первоначальной величины, после чего плавно убывает, в пределе стремясь к нулю.

Рассмотрен случай, когда действительная и мнимая части волнового числа среды барьера одновременно возрастают в одинаковой пропорции, то есть волновое число меняется все целиком. Установлено, что в этом случае зависимости коэффициентов отражения, прохождения и поглощения ведут себя образом, подобным первому случаю, однако теперь на плавные кривые накладываются осцилляции, период которых сохраняется постоянным, а амплитуда по мере увеличения волнового числа постепенно убывает. Отмечено,

что характер осцилляций совпадает с таковым, присущим зависимостям коэффициента отражения от действительного волнового числа, описываемым в рамках модели резонанса внутри барьера, а уменьшение амплитуды осцилляций обусловлено ростом затухания падающей волны по мере ее распространения.

Финансирование: Работа выполнена в рамках государственного задания Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН.

Литература

1. Хвольсон О.Д. *Курс физики, Т.2*. Берлин, Госиздат РСФСР. 1923. 776 с.
2. Борн М., Вольф Э. *Основы оптики*. Москва, Наука. 1970. 721 с.
3. Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах*. Москва, Наука. 1973. 501 с.
4. Ландсберг Г.С. *Оптика*. Москва, Наука. 1976. 928 с.
5. Поль Р.В. *Введение в оптику*. Москва-Ленинград, Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1947. 484 с.
6. Кизель В.А. *Отражение света*. Москва, Наука. 1973. 352 с.
7. Бреховских Л.М., Годин О.А. *Акустика слоистых сред*. Москва, Наука. 1989. 416 с.
8. Розенберг Г.В. *Оптика тонкослойных покрытий*. Москва, Государственное издательство технико-теоретической литературы. 1958. 570 с.
9. Oksanen M.I., Hanninen J., Tretyakov S.A. Vector circuit method for calculating reflection and transmission of electromagnetic waves in multilayered chiral structures. *IEEE Proceedings. H*. 1991. V.138. №7. P.513-520.
10. Sarychev A.K., Bergman D.J., Yagil Y. Theory of the optical and microwave properties of metal-dielectric films. *PR(B)*. 1995. V.51. №8. P.5366-5385.
11. Козарь А.В. Оптические свойства аperiодических тонкослойных структур: эффективный показатель преломления. *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. 2009. Т.64. №3. С.54-56.

12. Козарь А.В. Оптические свойства аперiodических тонкослойных структур: эффективная оптическая толщина. *Вестник Московского Университета. Серия 3. Физика. Астрономия*. 2018. Т.73. №6. С.61-66.
13. Бриллюэн Л., Пароди М. *Распространение волн в периодических структурах*. Москва, Издательство иностранной литературы. 1959. 457 с.
14. Шавров В.Г., Щеглов В.И. *Магнитостатические и электромагнитные волны в сложных структурах*. Москва, Физматлит. 2017. 358 с.
15. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через тонкие слои и пленки*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2010. 132 с.
16. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры. Часть первая. Прямой метод*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2011. 132 с.
17. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры Часть вторая. Метод матрицы*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2012. 123 с.
18. Антонец И.В., Щеглов В.И. *Распространение волн через многослойные структуры Часть третья. Метод импеданса*. Сыктывкар, ИПО СыктГУ. 2012. 123 с.
19. Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики*. Москва, Наука. 1972. 736 с.
20. Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 1. Последовательный пересчет импедансов и амплитуд. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.1>
21. *Физическая энциклопедия. Т.3. Статья «Поглощения коэффициент» (с.661)*. Москва, «Большая Российская Энциклопедия». 1992. 672 с.
22. *Физическая энциклопедия. Т.3. Статья «Поглощательная способность» (с.665)*. Москва, «Большая Российская Энциклопедия». 1992. 672 с.

23. Двайт Г.Б. *Таблицы интегралов и другие математические формулы*. Москва, Наука. 1973. 228 с.
24. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике для научных работников и инженеров*. Москва, Наука. 1973. 832 с.

Для цитирования:

Антонец И.В., Шавров В.Г., Щеглов В.И. Метод обобщенного импеданса для расчета отражения и прохождения волны через многослойную структуру. Часть 2. Падение волны на прямоугольный барьер. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.1.2>