DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.1.1
УДК: 621.396.969

АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МЕСТОПОЛОЖЕНИЯ ИСТОЧНИКА РАДИОИЗЛУЧЕНИЯ В ТРЁХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Л.А. Овчаренко [1], А.А. Хренов [2]

[1] «Центр системного анализа и моделирования» - филиал акционерного общества «Научно-технический центр радиоэлектронной борьбы», 192029, Санкт-Петербург, пр. Большой Смоленский, 2А

[2] Санкт-Петербургский государственный университет телекоммуникаций им. проф. М.А. Бонч-Бруевича», 193232, Санкт-Петербург, пр. Большевиков д.22, корп.1, литера А, Ж

Статья поступила в редакцию 9 октября 2023 г.

Аннотация. Для разностно-дальномерной системы, состоящей из двух произвольных пар приемных постов, предложен аналитический метод решения задачи оценки координат источника радиоизлучения в трёхмерном пространстве в предположении того, что высота этого источника известна или задана.

Ключевые слова: разностно-дальномерная система, источник радиоизлучения.

Автор для переписки: Хренов Андрей Александрович, knerov00@yandex.ru

Введение

Оценка местоположения источника радиоизлучения (ИРИ) в разностно-дальномерных системах (РДС) осуществляется на основе решения системы нелинейных уравнений [1], сформированных по результатам измерения разностей расстояний от ИРИ до приемных постов. В общем случае при определении координат ИРИ в трехмерном пространстве (x, y, z) требуется решение системы из трех нелинейных уравнений для разностей расстояний, сформированных в трех парах измерителей [1]. Однако, как свидетельствует практика применения РДС, вычисленное таким способом значение высоты ИРИ на дальностях, значительно превышающих расстояния между приемными постами, как правило, является неточным [2].

В этой связи при расчетах достаточно часто высота ИРИ считается заданной ($z = H$), а расчеты его координат (x, y) ведутся по результатам измерения двух разностей расстояний [2]. Представленная в [2] методика позволяет определять местоположение ИРИ по результатам оценок двух разностей расстояний при условии, что эти разности получены тремя приемными постами, в которых две пары измерителей содержат один общий приемный пост. В [3] изложен более общий подход к расчету координат ИРИ для произвольной конфигурации четырех приемных постов, измеряющих две разности расстояний, но в предположении того, что и измерители и ИРИ расположены на одной плоскости.

Цель статьи – разработка методики расчета координат ИРИ для произвольной конфигурации четырех приемных постов, измеряющих две разности расстояний, когда высота этого ИРИ задана и не равна нулю.

1. Формулировка задачи решения системы нелинейных уравнений

Пусть РДС состоит из четырех приемных постов, имеющих следующие декартовы координаты:

$$P_1 = (x_1, y_1, z_1);\ P_2 = (x_2, y_2, z_2);\ P_3 = (x_3, y_3, z_3);\ P_4 = (x_4, y_4, z_4).$$

Указанные приемные посты образуют две разностно-дальномерные пары (P_1, P_2) и (P_3, P_4), измеряющие, соответственно, разности расстояний от ИРИ до приемников первой и второй пары – dR_{12} и dR_{34}.

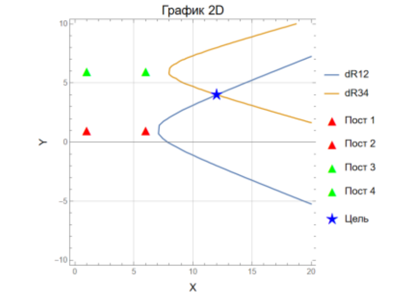
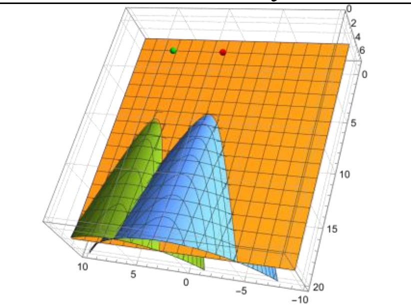
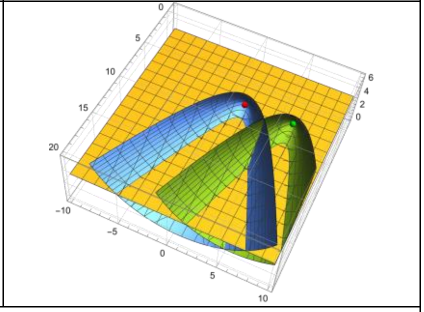
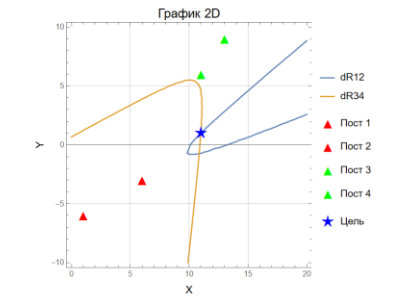
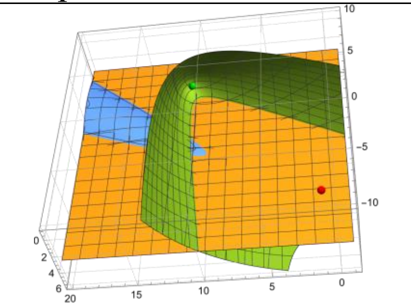
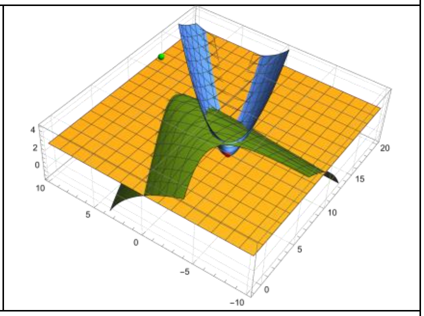
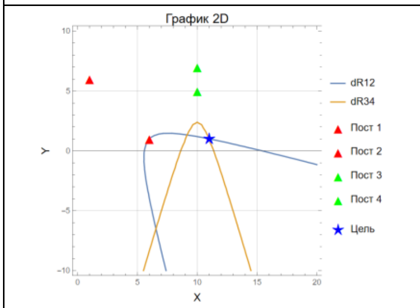
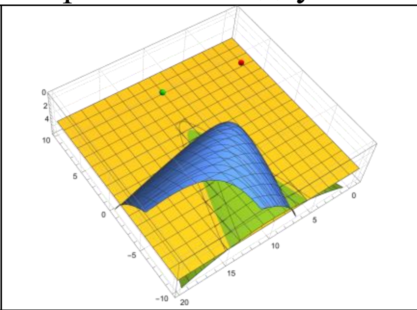
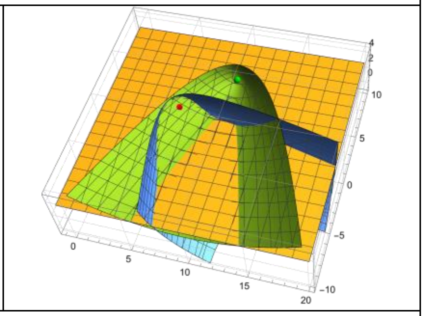
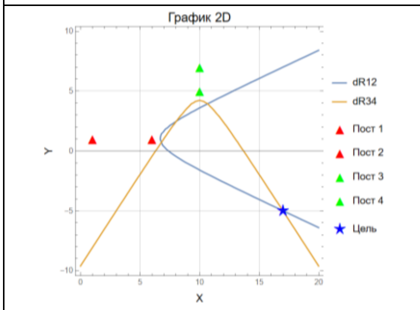
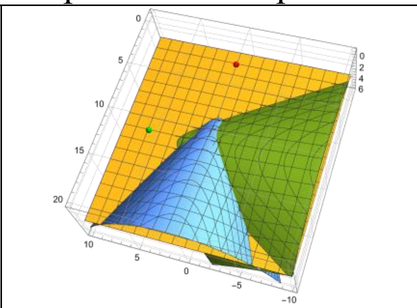
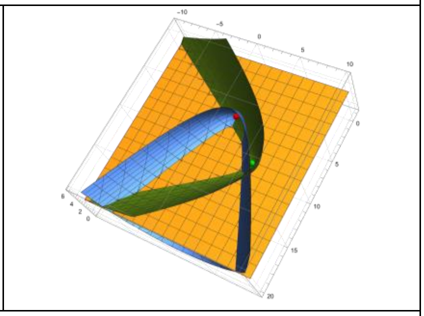
Введем координаты ИРИ T, обозначив координату высоты z как H:

$$T = (x, y, H).$$

Задача оценки координат ИРИ в данном случае может быть интерпретирована как задача нахождения общих точек пересечения плоскости, параллельной $x0y$ на высоте H, и двух гиперболоидов вращения с фокусами в точках (P_1, P_2) и (P_3, P_4), а также параметрами dR_{12} и dR_{34}.

Иллюстрация возможных вариантов точек пересечения плоскости $z = H$ и двух гиперболоидов вращения приведена ниже в таблице 1, где в первом столбце показаны рисунки проекции на плоскость $x0y$ линий пересечения этих гиперболоидов и плоскости $z = H$, во втором столбце – вид снизу на плоскость $z = H$, в третьем столбце – вид сверху.

Таблица 1. Варианты пересечений гиперболоидов и плоскости.

<table>
<tr><th>На плоскости</th><th>Вид снизу</th><th>Вид сверху</th></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">а – пересечение в одной точке</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">б – пересечение в двух точках</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">в – пересечение в трёх точках</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="3">г – пересечение в четырёх точках</td></tr>
</table>

С учетом изложенного, в аналитическом виде задача формулируется как нахождение решения следующей системы нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{\left(x_1-x\right)^2+\left(y_1-y\right)^2+\left(z_1-H\right)^2}-\sqrt{\left(x_2-x\right)^2+\left(y_2-y\right)^2+\left(z_2-H\right)^2}=dR_{12}, \\ \sqrt{\left(x_3-x\right)^2+\left(y_3-y\right)^2+\left(z_3-H\right)^2}-\sqrt{\left(x_4-x\right)^2+\left(y_4-y\right)^2+\left(z_4-H\right)^2}=dR_{34}. \end{cases} \quad (1)$$

Или:

$$\begin{cases} \sqrt{\left(x_1-x\right)^2+\left(y_1-y\right)^2+\left(z_1-H\right)^2}=\sqrt{\left(x_2-x\right)^2+\left(y_2-y\right)^2+\left(z_2-H\right)^2}+dR_{12}, \\ \sqrt{\left(x_3-x\right)^2+\left(y_3-y\right)^2+\left(z_3-H\right)^2}=\sqrt{\left(x_4-x\right)^2+\left(y_4-y\right)^2+\left(z_4-H\right)^2}+dR_{34}. \end{cases} \quad (2)$$

Дважды возведем в квадрат правую и левую часть первого уравнения системы (2). После всех упрощений получим следующее выражение:

$$A_{x212}\cdot x^2\cdot+A_{y212}\cdot y^2+A_{x112}\cdot x+A_{y112}\cdot y+A_{xy12}\cdot x\cdot y+A_{012}=0, \quad (3)$$

где коэффициенты вычисляются в соответствии со следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
&A_{x212}=4\cdot\left(\left(x_1-x_2\right)^2-dR_{12}^2\right); \qquad A_{y212}=4\cdot\left(\left(y_1-y_2\right)^2-dR_{12}^2\right);\\
&A_{xy12}=8\cdot\left(x_1-x_2\right)\cdot\left(y_1-y_2\right);\\
&A_{x112}=4\cdot dR_{12}^2\cdot\left(x_1+x_2\right)-\\
&\qquad -4\cdot\left(x_1-x_2\right)\cdot\left(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2+\left(H-z_1\right)^2-\left(H-z_2\right)^2\right);\\
&A_{y112}=4\cdot dR_{12}^2\cdot\left(y_1+y_2\right)-\\
&\qquad -4\cdot\left(y_1-y_2\right)\cdot\left(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2+\left(H-z_1\right)^2-\left(H-z_2\right)^2\right);\\
&A_{012}=dR_{12}^4+\left(x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2+\left(H-z_1\right)^2-\left(H-z_2\right)^2\right)^2-\\
&\qquad -2\cdot dR_{12}^2\cdot\left(x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2+\left(H-z_1\right)^2+\left(H-z_2\right)^2\right).
\end{aligned} \quad (4)$$

Проведём аналогичные вычисления и преобразования для второго уравнения системы (1):

$$A_{x234}\cdot x^2\cdot+A_{y234}\cdot y^2+A_{x134}\cdot x+A_{y134}\cdot y+A_{xy34}\cdot x\cdot y+A_{034}=0, \quad (5)$$

где коэффициенты вычисляются в соответствии со следующими выражениями:

$$\begin{aligned}
&A_{x234} = 4\cdot\left(\left(x_3 - x_4\right)^2 - dR_{34}^2\right); \quad A_{y234} = 4\cdot\left(\left(y_3 - y_4\right)^2 - dR_{34}^2\right);\\
&A_{xy34} = 8\cdot\left(x_3 - x_4\right)\cdot\left(y_3 - y_4\right);\\
&A_{x134} = 4\cdot dR_{34}^2\cdot\left(x_3 + x_4\right) -\\
&\qquad - 4\cdot\left(x_3 - x_4\right)\cdot\left(x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2 + \left(H - z_3\right)^2 - \left(H - z_4\right)^2\right);\\
&A_{y134} = 4\cdot dR_{34}^2\cdot\left(y_3 + y_4\right) -\\
&\qquad - 4\cdot\left(y_3 - y_4\right)\cdot\left(x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2 + \left(H - z_3\right)^2 - \left(H - z_4\right)^2\right);\\
&A_{034} = dR_{34}^4 + \left(x_3^2 - x_4^2 + y_3^2 - y_4^2 + \left(H - z_3\right)^2 - \left(H - z_4\right)^2\right)^2 -\\
&\qquad - 2\cdot dR_{34}^2\cdot\left(x_3^2 + x_4^2 + y_3^2 + y_4^2 + \left(H - z_3\right)^2 + \left(H - z_4\right)^2\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

Решая квадратные уравнения (3) и (5) относительно *x* находим:

$$\begin{cases}
x_{12} = \dfrac{-A_{x112} - A_{xy12}\cdot y - \sqrt{\left(A_{x112} + A_{xy12}\cdot y\right)^2 - 4\cdot A_{x212}\cdot\left(A_{y212}\cdot y^2 + A_{y112}\cdot y + A_{012}\right)}}{2\cdot A_{x212}},\\[2ex]
x_{12} = \dfrac{-A_{x112} - A_{xy12}\cdot y + \sqrt{\left(A_{x112} + A_{xy12}\cdot y\right)^2 - 4\cdot A_{x212}\cdot\left(A_{y212}\cdot y^2 + A_{y112}\cdot y + A_{012}\right)}}{2\cdot A_{x212}};
\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases}
x_{34} = \dfrac{-A_{x134} - A_{xy34}\cdot y - \sqrt{\left(A_{x134} + A_{xy34}\cdot y\right)^2 - 4\cdot A_{x234}\cdot\left(A_{y234}\cdot y^2 + A_{y134}\cdot y + A_{034}\right)}}{2\cdot A_{x234}},\\[2ex]
x_{34} = \dfrac{-A_{x134} - A_{xy34}\cdot y + \sqrt{\left(A_{x134} + A_{xy34}\cdot y\right)^2 - 4\cdot A_{x234}\cdot\left(A_{y234}\cdot y^2 + A_{y134}\cdot y + A_{034}\right)}}{2\cdot A_{x234}}.
\end{cases} \tag{8}$$

Так как координаты ИРИ x_{12} и x_{34} должны быть одинаковы, можно приравнять равенства в первой и во второй системе уравнений (7) и (8):

$$\frac{-A_{x112} - A_{xy12}\cdot y - \sqrt{F_{12}\cdot y^2 + F_{11}\cdot y + F_{10}}}{2\cdot A_{x212}} = \frac{-A_{x134} - A_{xy34}\cdot y - \sqrt{F_{22}\cdot y^2 + F_{21}\cdot y + F_{20}}}{2\cdot A_{x234}}, \tag{9}$$

где:

$$F_{10}=A_{x112}^2-4\cdot A_{x212}\cdot A_{012};\qquad F_{20}=A_{x134}^2-4\cdot A_{x234}\cdot A_{034};$$
$$F_{11}=2\cdot A_{x112}\cdot A_{xy12}-4\cdot A_{x212}\cdot A_{y112};\quad F_{21}=2\cdot A_{x134}\cdot A_{xy34}-4\cdot A_{x234}\cdot A_{y134};\quad (10)$$
$$F_{12}=A_{xy12}^2-4\cdot A_{x212}\cdot A_{y212};\qquad F_{22}=A_{xy34}^2-4\cdot A_{x234}\cdot A_{y234}.$$

Введем обозначения:

$$w_0=\frac{-A_{x112}\cdot A_{x234}+A_{x134}\cdot A_{x212}}{2\cdot A_{x212}\cdot A_{x234}};\qquad w_1=\frac{\left(-A_{xy12}\cdot A_{x234}+A_{xy34}\cdot A_{x212}\right)}{2\cdot A_{x212}\cdot A_{x234}};$$
$$Fw_{12}=\frac{F_{12}}{4\cdot A_{x212}^2};\qquad Fw_{11}=\frac{F_{11}}{4\cdot A_{x212}^2};\qquad Fw_{10}=\frac{F_{10}}{4\cdot A_{x212}^2};\qquad (11)$$
$$Fw_{22}=\frac{F_{22}}{4\cdot A_{x234}^2};\qquad Fw_{21}=\frac{F_{21}}{4\cdot A_{x234}^2};\qquad Fw_{20}=\frac{F_{20}}{4\cdot A_{x234}^2}.$$

Тогда уравнение (9) можно представить в следующем виде:

$$w_0+w_1\cdot y-\sqrt{Fw_{12}\cdot y^2+Fw_{11}\cdot y+Fw_{10}}=-\sqrt{Fw_{22}\cdot y^2+Fw_{21}\cdot y+Fw_{20}},\quad (12)$$

после двукратного возведения в квадрат правой и левой части (12), получаем следующее уравнение четвертой степени, из которого может быть найдена координата *y*:

$$M_4\cdot y^4+M_3\cdot y^3+M_2\cdot y^2+M_1\cdot y+M_0=0,\quad (13)$$

где:

$$\begin{aligned}
M_0&=\left(Fw_{10}-Fw_{20}\right)^2-2\cdot w_0^2\cdot\left(Fw_{10}+Fw_{20}\right)+w_0^4;\\
M_1&=2\cdot\left(Fw_{10}-Fw_{20}\right)\cdot\left(Fw_{11}-Fw_{21}\right)-2\cdot w_0^2\cdot\left(Fw_{11}+Fw_{21}\right)+\\
&\quad+4\cdot w_0\cdot w_1\cdot\left(w_0^2-Fw_{10}-Fw_{20}\right);\\
M_2&=\left(Fw_{11}-Fw_{21}\right)^2+2\cdot\left(Fw_{10}-Fw_{20}\right)\cdot\left(Fw_{12}-Fw_{22}\right)-2\cdot w_0^2\cdot\left(Fw_{12}+Fw_{22}\right)-\\
&\quad-4\cdot w_0\cdot w_1\cdot\left(Fw_{11}+Fw_{21}\right)-2\cdot w_1^2\cdot\left(Fw_{10}+Fw_{20}-3\cdot w_0^2\right);\\
M_3&=2\cdot\left(Fw_{11}-Fw_{21}\right)\cdot\left(Fw_{12}-Fw_{22}\right)-2\cdot w_1^2\cdot\left(Fw_{11}+Fw_{21}\right)-\\
&\quad-4\cdot w_0\cdot w_1\cdot\left(\left(Fw_{12}+Fw_{22}\right)-w_1^2\right);\\
M_4&=\left(Fw_{12}-Fw_{22}\right)^2-2\cdot w_1^2\cdot\left(Fw_{12}+Fw_{22}\right)+w_1^4.
\end{aligned}\quad (14)$$

Вычисленные значения y подставляем в (7) или (8) и находим координаты x. В общем случае может быть получено восемь решений координат (x, y).

На конечном этапе, отбрасывая результаты в комплексных числах, а также не удовлетворяющие системе уравнений (1), получаем совокупность расчетных координат ИРИ, среди которых одно из решений будет соответствовать истинной координате T.

2. Пример расчета

Приведем пример расчета для случая, когда гиперболоиды и плоскость имеют четыре точки пересечения. Пусть заданы следующие координаты приемных постов:

$$P_1 = (1,1,2);\ P_2 = (6,1,4);\ P_3 = (10,7,2);\ P_4 = (10,5,4),$$

и координаты ИРИ с фиксированной высотой $z = H = 3$: $T = (17,-5,3)$. Для указанных координат рассчитываем разности расстояний от ИРИ до приемников первой и второй пары: $dR_{12} = 4.547$ и $dR_{34} = 1.681$.

Вычислим коэффициенты в уравнениях (3) и (5) по формулам (4), (6):

$A_{x212} = 17.283$ $\quad$ $A_{x234} = -11.302$

$A_{y212} = -82.717$ $\quad$ $A_{y234} = 4.698$

$A_{x112} = -120.983$ $\quad$ $A_{x134} = 226.045$

$A_{y112} = 165.434$ $\quad$ $A_{y134} = -56.373$

$A_{xy12} = 0$ $\quad$ $A_{xy34} = 0$

$A_{012} = -43.065$ $\quad$ $A_{034} = -975.724$

Далее находим коэффициенты в выражениях (9) и (12) по формулам (10), (11):

$w_0 = -6.5$ $\quad$ $w_1 = 0$

$F_{10} = 17614$ $\quad$ $F_{11} = -11437$ $\quad$ $F_{12} = 5718.5$

$F_{20} = 6984.7$ $\quad$ $F_{21} = -2548.6$ $\quad$ $F_{22} = 212.38$

$Fw_{10} = 14.741$ $\quad$ $Fw_{11} = -9.572$ $\quad$ $Fw_{12} = 4.786$

$Fw_{20} = 13.67$ $\quad$ $Fw_{21} = -4.988$ $\quad$ $Fw_{22} = 0.416$

Рассчитываем коэффициенты для уравнения четвертой степени (13) по формуле (14): $M_0 = -614.56$; $M_1 = 1220.5$; $M_2 = -409.15$; $M_3 = -40.07$; $M_4 = 19.01$.

В результате решения этого уравнения получаем четыре корня:

$$y_1 = -5; \qquad y_2 = 3.95; \quad y_3 = 2.5; \qquad y_4 = 0.65.$$

Найденные значения y подставляем в систему уравнений (7) или (8) и находим координаты x. В итоге вычисляем восемь оценок возможных координат ИРИ $T = (x, y, z = H)$:

T_1 – (-10, −5, 3) T_2 – (−3.68, 3.95, 3) T_3 – (−1.05, 2.5, 3) T_4 – (0.25, 0.65, 3)
T_5 – (17, −5, 3) T_6 – (10.68, 3.95, 3) T_7 – (8.05, 2.5, 3) T_8 – (6.75, 0.65, 3)

Отбрасывая решения T_1, T_2, T_3 и T_4, поскольку они не удовлетворяют системе уравнений (1), окончательно получаем оценки координат ИРИ: $T_5 = (17, -5, 3)$, $T_6 = (10.68, 3.95, 3)$, $T_7 = (8.05, 2.5, 3)$ и $T_8 = (6.75, 0.65, 3)$, среди которых есть истинное значение – $T_5 = T = (17, -5,3)$.

Заключение

В общем виде получено аналитическое решение для расчёта координат точек пересечения двух гиперболоидов вращения и плоскости.

Предложенный подход может быть использован для оценки местоположения ИРИ разностно-дальномерным способом при произвольной конфигурации четырех приемных постов, в предположении того, что высота ИРИ задана и не равна нулю.

Литература

1. В.С. Шебшаевич, П.П. Дмитриев, Н.В. Иванцевич и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы.; Под ред. В.С. Шебшаевича. - 2-е изд., перераб. и доп. изд. - Москва: Радио и связь, 1993. - 408 с.

2. J. Vesely, L. Drazan and P. Hubacek, "Analytical solution of the Time Difference Of Arrival method with known target altitude," 2014 15th I nternational Radar Symposium (IRS), Gdansk, Poland, 2014, pp. 1-4, https://doi.org/10.1109/IRS.2014.6869285.
3. J. Vesely and S. V. Doan, "Analytical method solving system of hyperbolic equations," 2015 25th International Conference Radioelektronika (RADIOELEKTRONIKA), Pardubice, Czech Republic, 2015, pp. 343-348, https://doi.org/10.1109/RADIOELEK.2015.7129064.

Для цитирования:

Овчаренко Л.А., Хренов А.А. Аналитический метод решения задачи определения местоположения источника радиоизлучения в трёхмерном пространстве. // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 1. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.1.1.