

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.1.4>

УДК: 537.874.37

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ВЫСОТЫ ВОЛНОВОДА ИСПАРЕНИЯ НА ТРОПОСФЕРНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН

М.С. Лытаев

Санкт-Петербургский Федеральный исследовательский центр РАН  
199178, Санкт-Петербург, 14 линия, дом 39

Статья поступила в редакцию 13 октября 2023 г.

**Аннотация.** Работа посвящена моделированию распространения радиоволн в волноводе испарения. Особое внимание уделено тому факту, что на практике параметры тропосферных волноводов всегда определяются с некоторой погрешностью. Разработан алгоритм на основе метода параболического уравнения, позволяющий учитывать погрешность измерения показателя преломления тропосферы и оценивать статистические характеристики пространственного распределения амплитуды радиоволн. Проведен ряд численных экспериментов для различных условий распространения. Показано, что во многих случаях игнорирование погрешности показателя преломления может приводить к значительным ошибкам в результатах моделирования.

**Ключевые слова:** стохастическое параболическое уравнение, тропосферный волновод, метод Монте-Карло.

**Финансирование:** Исследование выполнено за счет гранта гранта РФФ № 23-71-01069.

**Автор для переписки:** Лытаев Михаил Сергеевич, [mlytaev@yandex.ru](mailto:mlytaev@yandex.ru)

## Введение

Волновод испарения образуется над водной поверхностью и представляет собой слой атмосферы, в котором радиоволны могут распространяться на большие расстояния за горизонт. Этот феномен имеет важное значение для разработки и оптимизации морских систем связи, навигации и радиолокации. Возникновение волноводов испарения обусловлено резким снижением влажности в приземном слое высотой до нескольких десятков метров. Сильный отрицательный градиент влажности приводит к отрицательному градиенту показателя преломления в приземном слое, который с ростом высоты над водной поверхностью сменяется положительным градиентом. Такая конфигурация профиля показателя преломления тропосферы способствует захвату волн в приземном слое и распространению их на сверхдальние расстояния. Данный эффект является весьма устойчивым и проявляется почти повсеместно над регионами с обширной водной поверхностью.

Наиболее важной характеристикой волновода испарения является его высота. Было разработано [1, 2] множество моделей для определения высоты волновода испарения. Как правило, входными данными таких моделей являются измерения атмосферного давления, влажности и температуры в некоторых точках пространства. Кроме того, существуют методы определения параметров волновода испарения по анализу обратного рассеяния от взволнованной морской поверхности и надводных объектов [3, 4]. Был предложен подход к определению параметров волновода испарения по анализу сигналов судовой системы АИС [5]. В работе [6] проанализировано влияние волновода испарения на работу радиолокаторов, был предложен и апробирован метод его измерения при помощи БПЛА, а также была обоснована целесообразность измерения параметров волновода в реальном времени для эффективной работы радиолокаторов над водной поверхностью. Анализ влияния волновода испарения на существующие и перспективные системы беспроводной связи проведен в работах [7, 8].

Отличительной особенностью моделирования распространения радиоволн в тропосферном волноводе является необходимость учета вариаций показателя преломления среды. Для этого чаще всего используется метод параболического уравнения (ПУ) [9, 10] и различные его обобщения [11, 12]. Данный метод позволяет одновременно учитывать произвольный показатель преломления [13], неровный профиль рельефа, растительность, затухание в атмосфере и множество других факторов, оказывающих существенное влияние на тропосферное распространение радиоволн. В частности, в работе [7] метод ПУ был использован для разработки упрощенной статистической модели потерь при распространении в волноводе испарения.

Конечно, высота волновода испарения всегда определяется с некоторой погрешностью. В частности, в работе [2] было экспериментально показано, существующие модели позволяют оценить высоту с точностью порядка 2.5 м. Вместе с тем, существующие модели распространения радиоволн учитывают профиль показателя преломления как детерминированную функцию пространственных координат, т.е. без учета погрешности. В связи с этим возникает два вопроса: как можно учесть погрешность измерения показателя преломления тропосферы (в частности погрешность высоты волновода испарения) и как эта погрешность влияет на пространственное распределение амплитуды радиоволн. Для ответа на эти вопросы в данной работе предложен алгоритм учета погрешности показателя преломления тропосферы в рамках метода ПУ.

Следует отметить, что задача в похожей постановке решалась в работе [14]. Был предложен алгоритм учета ограниченной информации о показателе преломления, основанный на методе расщепления Фурье. Однако в указанной работе высота волновода была выбрана равномерно распределенной случайной величиной, в то время как данные измерений обычно относят к нормально распределенным величинам. Численный метод описан достаточно поверхностно и не проанализирован, хотя является весьма нетривиальным. Кроме того, анализу результатов численного моделирования

было уделено слишком мало внимания, так что из указанной статьи невозможно сделать какие-либо выводы о влиянии погрешности параметров волновода испарения на распространение.

В определенной степени родственной является задача моделирования дальнего тропосферного рассеяния (ДТО) [15]. Эффект ДТО вызван случайными флуктуациями показателя преломления тропосферы, которые моделируются случайной величиной. Для моделирования ДТО также используется метод ПУ.

Данная работа организована следующим образом. В следующем разделе представлена математическая постановка задачи для стохастического двумерного уравнения Гельмгольца. В разделе 2 кратко описаны численные методы его решения для детерминированного случая. В разделе 3 предложено использовать метод Монте-Карло для создания численной схемы на основе детерминированного метода. В разделе 4 представлен всесторонний анализ влияния неопределенности высоты волновода испарения, полученный при помощи предложенного метода.

## 1. Математическая постановка задачи

Ищем решение двумерного неоднородного уравнения Гельмгольца [11]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 n^2(x, z) \psi = 0, \quad (1)$$

где  $\psi(x, z)$  – комплекснозначное поле электромагнитных волн,  $k = 2\pi f/c$  – волновое число,  $f = c/\lambda$  – частота излучения,  $\lambda$  – длина волны,  $n(x, z)$  – показатель преломления тропосферы. Обычно предполагается, что длина области распространения значительно больше по длине ( $x$ ), чем по высоте ( $z$ ).

Волновой процесс порождается начальным условием вида:

$$\psi(0, z) = \psi_0(z),$$

с известной функцией  $\psi_0(z)$ , отвечающей диаграмме направленности излучающей антенны. На нижней границе расчетной области обычно

устанавливается граничное условие третьего рода, а верхняя граница является прозрачной.

Будем использовать стандартную модель профиля волновода испарения [11]

$$n^2(x, z) = 1 + 2M(z) \cdot 10^{-6},$$

$$M(z) = M_0 + 0.125 \left( z - h_{wg} \log \left( 1 + \frac{z}{z_0} \right) \right),$$

где  $M_0 = 320$ ,  $z_0 = 1.5 \cdot 10^{-4}$ . Основным параметром волновода испарения является его высота  $h_{wg}$ . Обычно в задачах моделирования высота является заранее известной детерминированной величиной. В данном исследовании высота является случайной величиной  $\tilde{h}_{wg}$ , имеющей нормальное распределение с математическим ожиданием  $h_e$  и среднеквадратичным отклонением (СКО)  $\sigma_h$  ( $\tilde{h}_{wg} \sim N(h_e, \sigma_h^2)$ ).

Таким образом, в данном исследовании показатель преломления рассматривается как случайная величина. Соответственно, уравнение (1) также становится стохастическим [16], а его решение – случайной функцией, которое мы далее будем обозначать как  $\tilde{\psi}$ .

Целью работы является оценка математического ожидания и СКО случайной величины  $\tilde{\psi}$  при различных параметрах распределения высоты волновода испарения.

## 2. Метод параболического уравнения для детерминированного случая

В основе предложенного в данной работе метода лежит численное решение уравнения (1) для детерминированного случая, т.е. когда показатель преломления  $n$  является детерминированным и полностью известен заранее.

Перезапишем уравнение (1) в виде формального разложения волнового поля на волны, распространяющиеся в положительном и отрицательном направлении по оси  $x$ :

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2(x, z)} \right] \left[ \frac{\partial}{\partial x} + i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2(x, z)} \right] \psi = 0.$$

Следуя [17, 18], пренебрежем в выражении выше обратным рассеянием и запишем т.н. однонаправленное уравнение Гельмгольца

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x} - i \sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 n^2(x, z)} \right] \psi = 0. \quad (2)$$

Пошаговое решение для уравнения (2) записывается следующим образом:

$$u^{n+1} = \exp\left(ik\Delta x(\sqrt{1+L}-1)\right)u^n, \quad (3)$$

где:

$$Lu = \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (n^2(x, z) - 1)u,$$

$$u(x, z) = e^{-ikx}\psi(x, z),$$

$$u^n(z) = u(n\Delta x, z),$$

$$u_0(z) = \psi_0(z).$$

Уравнение (2) является обобщением разработанного Леонтовичем и Фоком [9] метода параболического уравнения для решения задачи дифракции радиоволн вблизи поверхности Земли. Данное обобщение не накладывает ограничений на максимальный угол распространения [19] и показатель преломления.

Существуют две основных группы методов численной аппроксимации операторной экспоненты (3): спектральные методы и конечно-разностные методы. Спектральные методы включают в себя широко используемый метод расщепления Фурье [11]. На нем, в частности, основаны программы PETOOL [20] и AREPS [21]. Кроме того, последнее время появилось большое число работ, где вместо преобразования Фурье используются различные Вейвлет преобразования [22]. Основной недостаток спектральных методов – некорректное моделирование как нижнего [23], так и верхнего граничного условия [24]. Этим недостаткам лишены конечно-разностные методы

высокого порядка точности. Нижнее условие третьего рода аппроксимируется непосредственно, а верхнее – при помощи метода дискретных нелокальных граничных условий [25]. Далее в данной работе используется конечно-разностная рациональная аппроксимация Паде [19] оператора (3).

### 3. Применение метода Монте-Карло

Численным методам решения стохастических дифференциальных уравнений посвящено значительное число работ [26, 27]. Одним из самых общих подходов является использование метода Монте-Карло. Представим численное решение уравнения (1) следующим формальным образом

$$\psi = F(n^2(h_{wg}), f, \psi_0). \quad (4)$$

Для оценки случайной величины  $\tilde{\psi}$  требуется сгенерировать достаточно большую выборку значений  $h_{wg}^i$  случайной величины  $\tilde{h}_{wg}$ ,  $i \in [1, N]$ . Подставляя каждое значение  $h_{wg}^i$  в решение (4), получаем выборку  $\psi^i$  для случайной величины  $\tilde{\psi}$ . Теперь можно оценить математическое ожидание амплитуды поля:

$$E[10 \log(\tilde{\psi})] \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 10 \log(\psi^i),$$

и СКО

$$\sigma_{\psi} \approx \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (E[10 \log(\tilde{\psi})] - 10 \log(\psi^i))^2}.$$

Возникает вопрос – как именно выбирать размер выборки  $N$ . В данной работе используется адаптивный подход – генерирование новых значений продолжается, пока значение  $E[10 \log(\tilde{\psi})]$  не перестанет значительно меняться.

В целом же появление вероятностного пространства фактически добавляет еще одну степень свободы в уравнение, что конечно же увеличивает сложность и время расчетов.

#### 4. Анализ результатов

Для численных расчетов используется программная реализация метода ПУ из разработанной автором библиотеки PyWaveProp [28].

В данном разделе анализируется влияние ошибки высоты волновода испарения на распространение при различных параметрах среды и антенны. Варьируются следующие параметры: СКО высоты волновода испарения ( $\sigma_h$ ), частота излучения ( $f$ ), высота излучающей антенны ( $h_{src}$ ), ожидаемая высота волновода испарения ( $h_e$ ).

Для каждого примера в данном разделе приводятся четыре графика с двумерным распределением. На первом графике изображен расчет при заданной ожидаемой высоте  $h_e$  детерминированным алгоритмом. Именно этот результат был бы получен при использовании обычного детерминированного алгоритма без учета ошибки показателя преломления. На втором графике изображено математическое ожидание амплитуды поля, рассчитанное описным выше методом Монте-Карло. На третьем графике показана разница между полем, полученным детерминированным алгоритмом при фиксированной высоте волновода испарения и математическим ожиданием поля, полученным при рассмотрении высоты волновода испарения как случайной величины с заданным СКО. Другими словами, на третьем графике изображена поточечная разница между первым и вторым графиками. Этот график особенно важен, т.к. показывает разницу между детерминированной и стохастической моделью и позволяет оценить влияние случайности показателя преломления на результирующее поле. На последнем графике показано СКО пространственного распределения амплитуды поля.

На качественном уровне механизм волновода испарения следующий. В зоне с отрицательным градиентом рефракции  $[0, h_e]$  распространяющиеся примерно горизонтально волны рефрагируют вниз, а затем отражаются от подстилающей поверхности. На рис. 1 показаны плотности распределения профилей волновода испарения для различных высот ( $h_e = 10, 20$  м)



и СКО ( $\sigma_h = 0, 0.5, 1, 2, 3, 4$  м). Видно, что с увеличением СКО профиль значительно «расплывается», что потенциально может оказать значительное влияние на статистические характеристики распределения поля радиоволн.

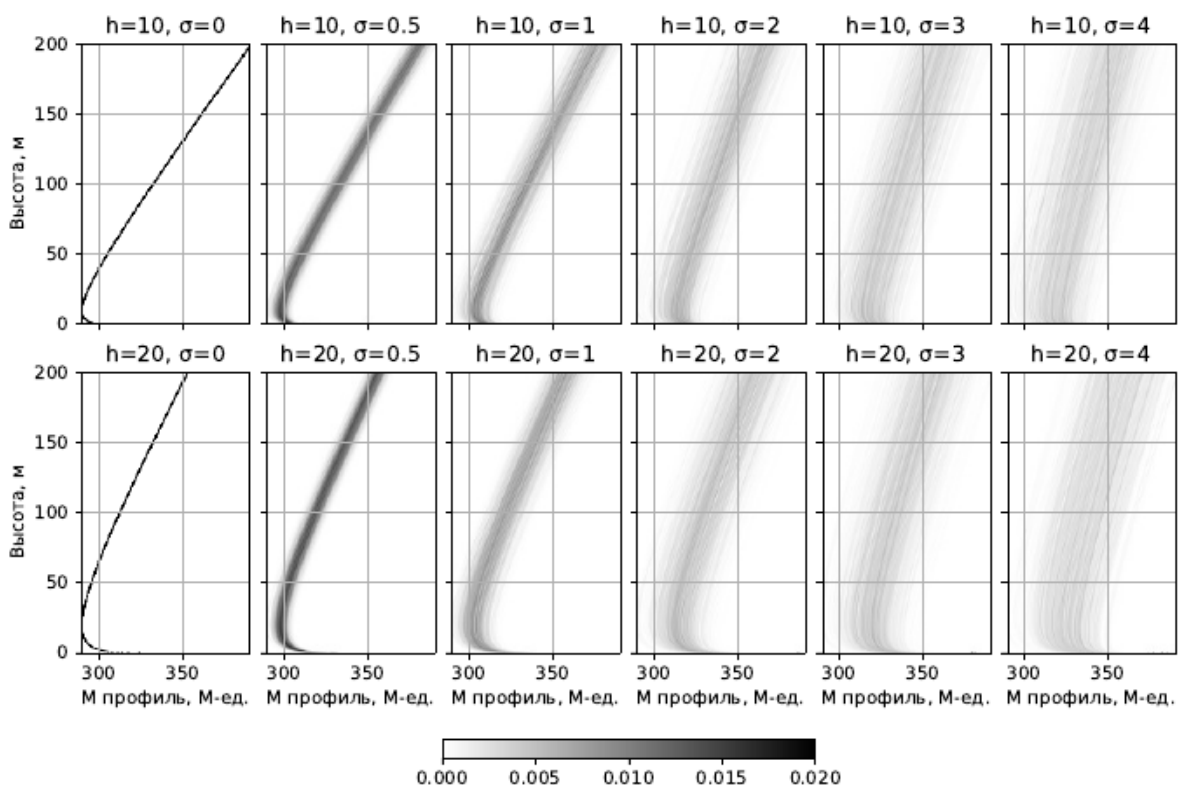


Рис. 1. Плотность распределения профиля волновода испарения, рассматриваемого как случайная величина, для различных средних высот и СКО.

### 5.1 Влияние точности измерения высоты

Рассмотрим, как влияет точность измерения высоты волновода испарения на двумерное распределение амплитуды поля радиоволн. На рис. 2 изображены результаты моделирования для значений  $\sigma_h$ , равных 0.5, 1, 2 и 4 м. Судя по экспериментальным данным [2], СКО высоты для существующих моделей волнопроводов на практике обычно составляет 2-3 м.

Хорошо видно, что с ростом СКО высоты волновода испарения увеличивается СКО случайного поля. Вместе с тем, качественная картина остается неизменной. Вне зависимости от ошибки в определении высоты, хорошо виден эффект затягивания поля внутри волновода, особенно в нижней его части, непосредственно над поверхностью моря. Этот эффект вызван

множественными отражениями радиоволн от подстилающей поверхности и рефракцией, вызванный отрицательным градиентом показателя преломления. С ростом СКО высоты волновода количественная картина претерпевает изменения. В верхней части волновода (10-20 м над уровнем моря) поле, рассчитанное детерминированным алгоритмом, дает занижение на 5-10 дБ. При чем этот эффект усиливается с ростом СКО высоты  $\sigma_h$ . При этом выше волновода (более 20 м над уровнем моря) наблюдается обратная картина – детерминированное поле выше на 3-5 дБ, чем математическое ожидание случайного поля. На расстояниях свыше 200 км от источника вновь наблюдается занижения детерминированного поля.

## 5.2 Влияние высоты волновода

Далее проанализируем, как меняется распределение поля с изменением средней высоты волновода испарения ( $h_e$ ). На рис. 3 показаны результаты моделирования для различных типовых значений высот: 10, 20, 30 м. Видно, что с ростом высоты волноводный эффект усиливается. Действительно, чем выше волновод, тем больше энергии он способен захватить. Наибольшее отклонение наблюдается в случае, когда высота волновода испарения совпадает с высотой излучающей антенны. По всей видимости, это объясняется тем, что данный случай пограничный: равновероятны сценарии, когда антенна будет попадать в волновод, и когда она окажется вне волновода, что будет способствовать заметно меньшему захвату энергии.

## 5.3 Влияние высоты излучающей антенны

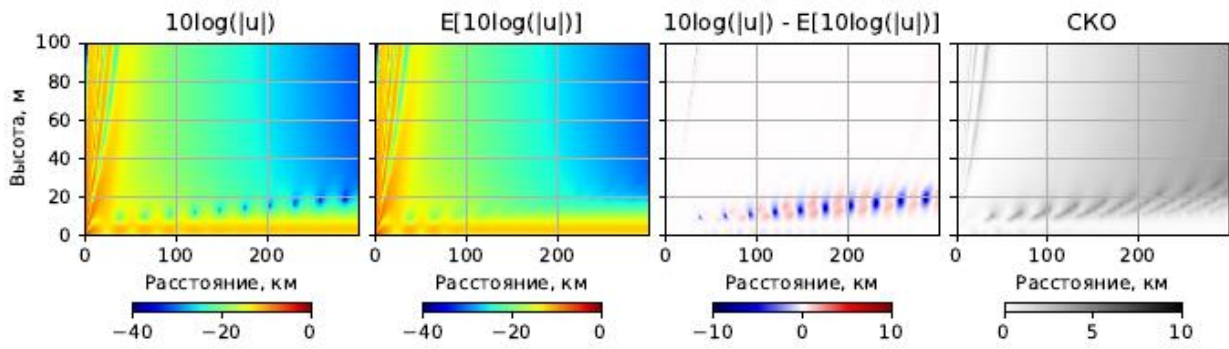
На рис. 4 показаны результаты моделирования для различных значений высоты излучающей антенны. Видно, что расположение излучающей антенны внутри волновода способствует более выраженному эффекту затягивания энергии в волновод. Хотя часть энергии попадает в волновод и при расположении излучающей антенны значительно выше высоты волновода.

Заметно, что при расположении антенны выше волновода, детерминированное решение получается завышенным на 5-10 дБ. Это можно объяснить следующим образом. С вероятностью 50% волновод окажется выше ожидаемого, а значит в него будет затянута больше энергии. С вероятностью 50% процентов волновод окажется ниже ожидаемого, но эта возможность не приводит в столь же существенному занижению уровня амплитуды поля выше волновода. Такие сильные расхождения между ожидаемым и детерминированным полем свидетельствуют с польду важности стохастических моделей распространения и учета погрешности входных данных. В частности, при проведении натуральных экспериментов простое использование среднего значения высоты волновода вероятно привело бы к несовпадению экспериментальных данных и данных моделирования.

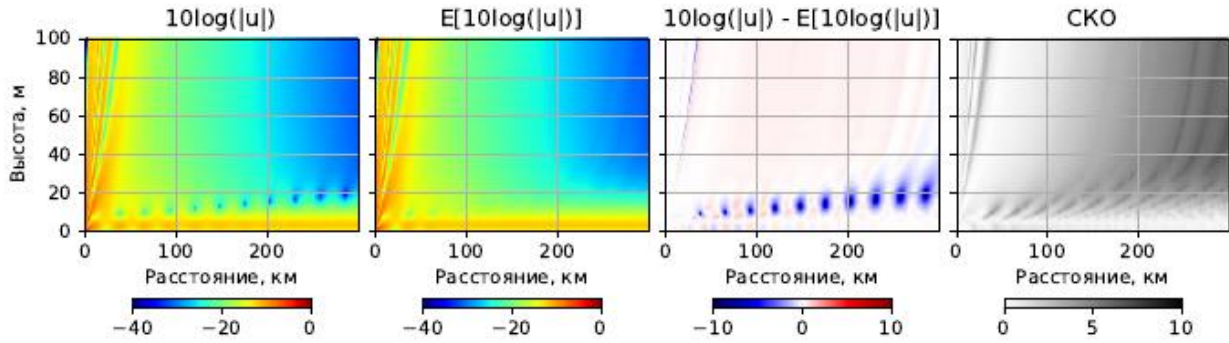
#### **5.4 Влияние частоты излучения**

Наконец проанализируем, как влияет частота излучения на волноводный эффект и волны на каких частотах лучше всего захватываются волноводом испарения. Результаты моделирования показаны на рис. 5.

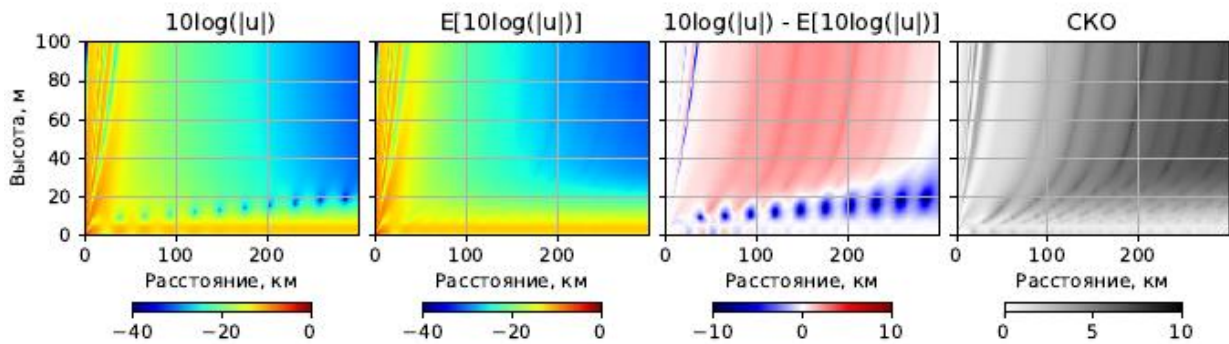
Хорошо видно, что волноводный эффект лучше проявляется с ростом частоты излучения. Для метровых волн ( $f = 300$  МГц), наличие волновода испарения практически не оказывает влияния на дальнейшее распространение. Как следствие, разброс высоты волновода испарения также не влияет на распределения амплитуды поля. Устойчивый волноводный эффект проявляется только на частотах выше 3 ГГц.



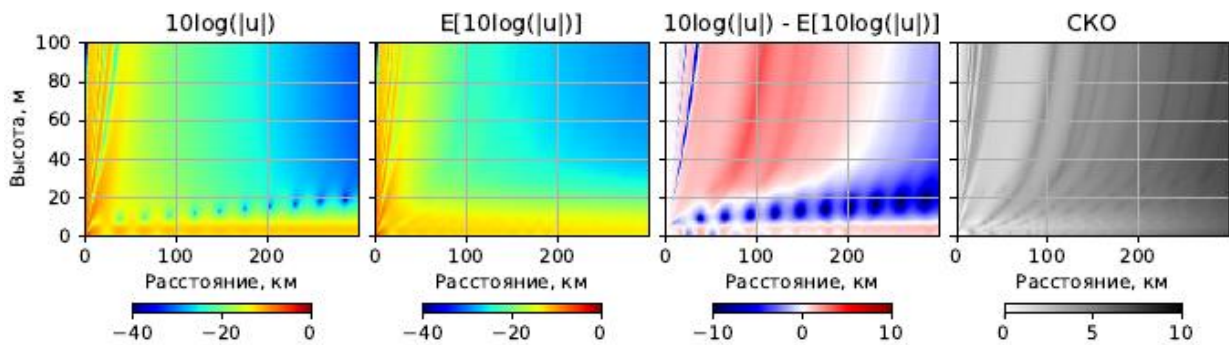
(а)  $\sigma_h = 0.5$  м



(б)  $\sigma_h = 1.0$  м

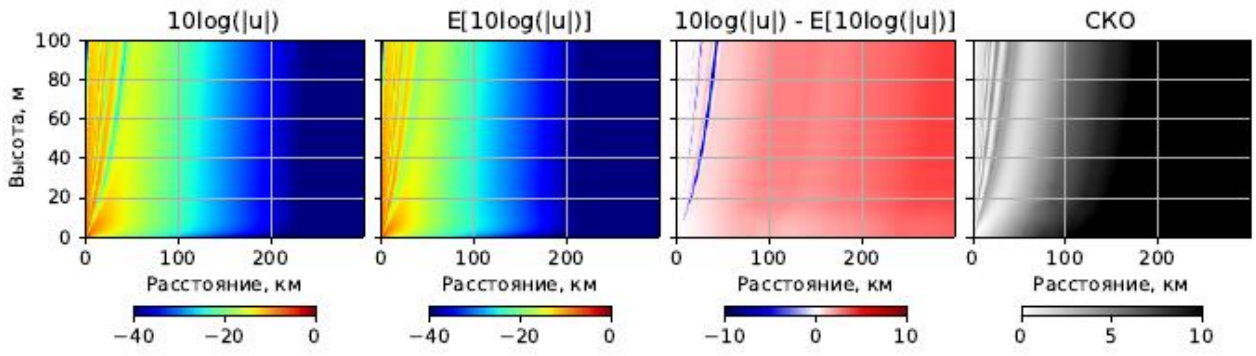


(в)  $\sigma_h = 2.0$  м

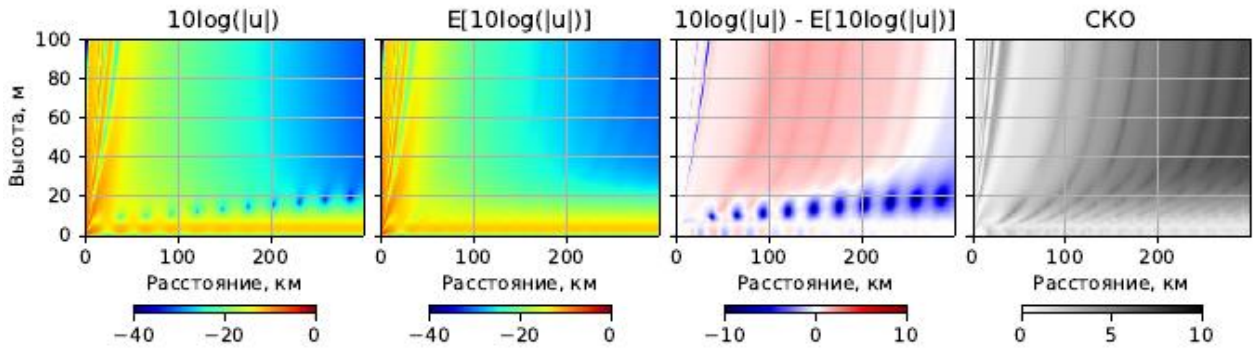


(г)  $\sigma_h = 4.0$  м

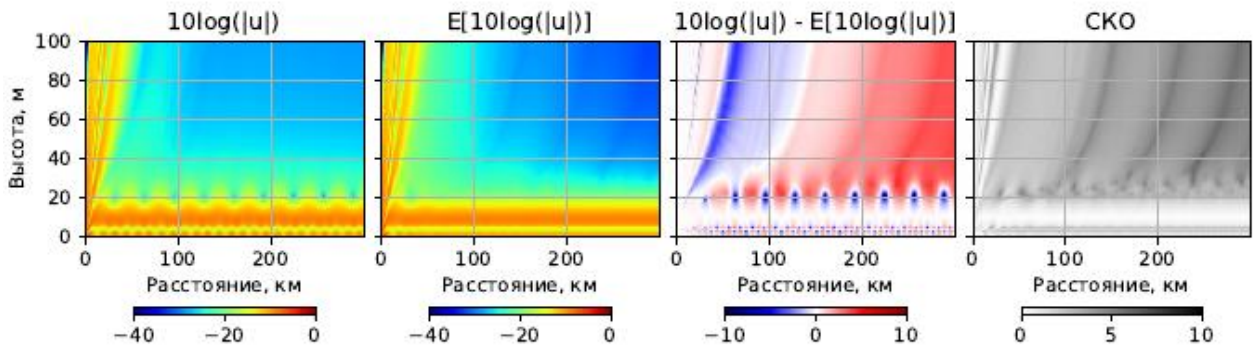
Рис. 2. Сравнение результатов моделирования для различных значений SKO высоты волновода испарения ( $\sigma_h$ ).  $f = 10$  ГГц,  $h_{src} = 10$  м,  $h_e = 20$  м.



(а)  $h_e = 10$  м



(б)  $h_e = 20$  м



(в)  $h_e = 30$  м

Рис. 3. Сравнение результатов моделирования для различных значений высоты волновода испарения ( $h_e$ ).  $\sigma = 2.0$  м,  $f = 10$  ГГц,  $h_{src} = 10$  м.



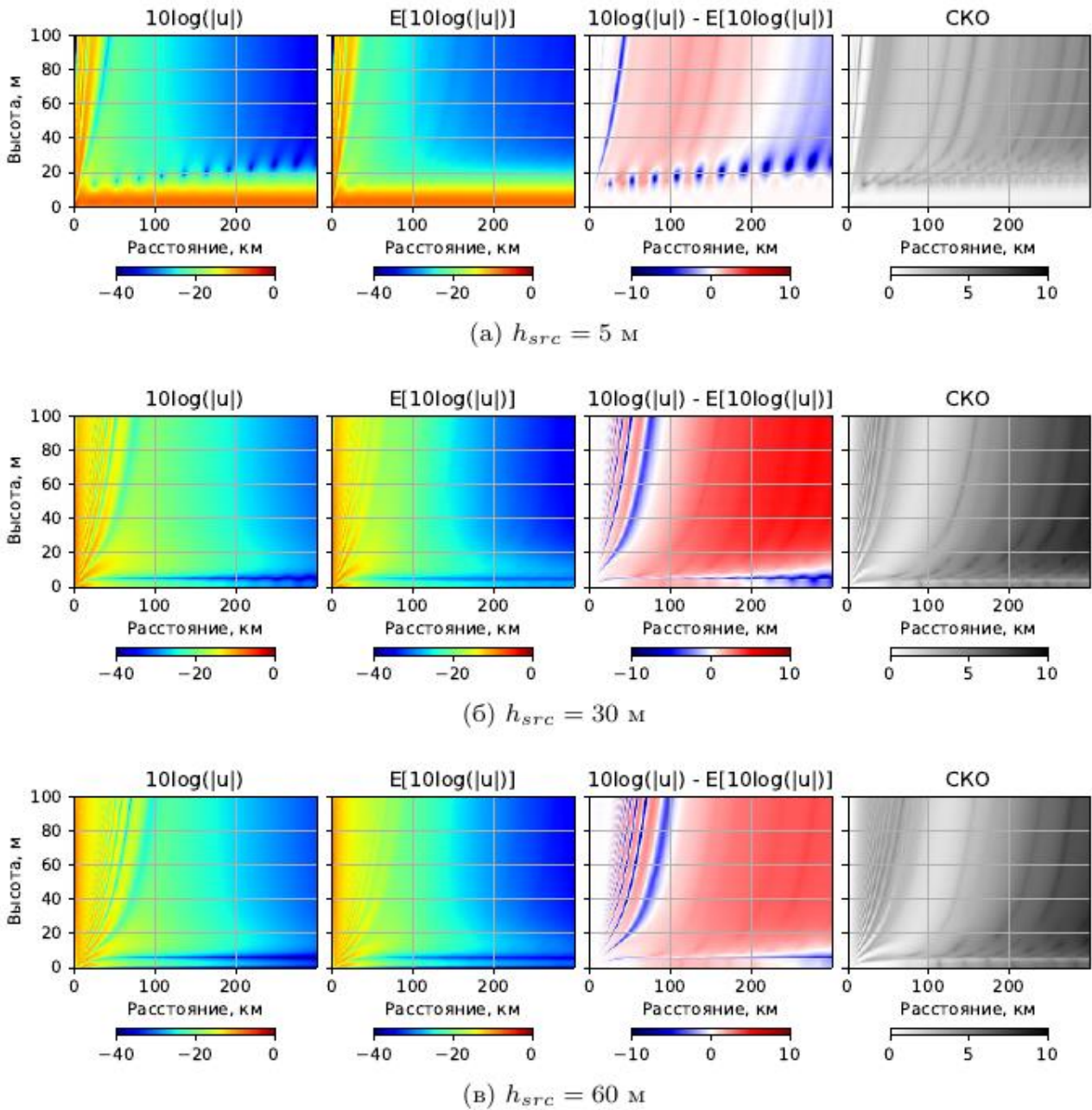
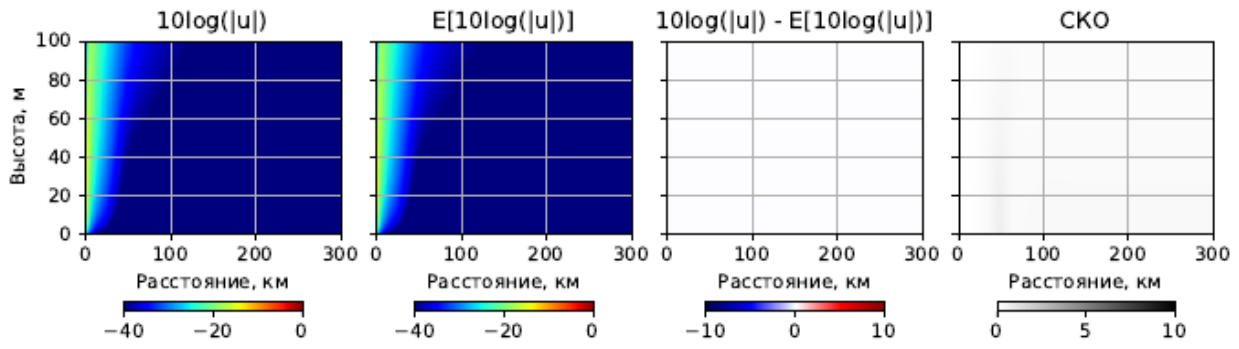
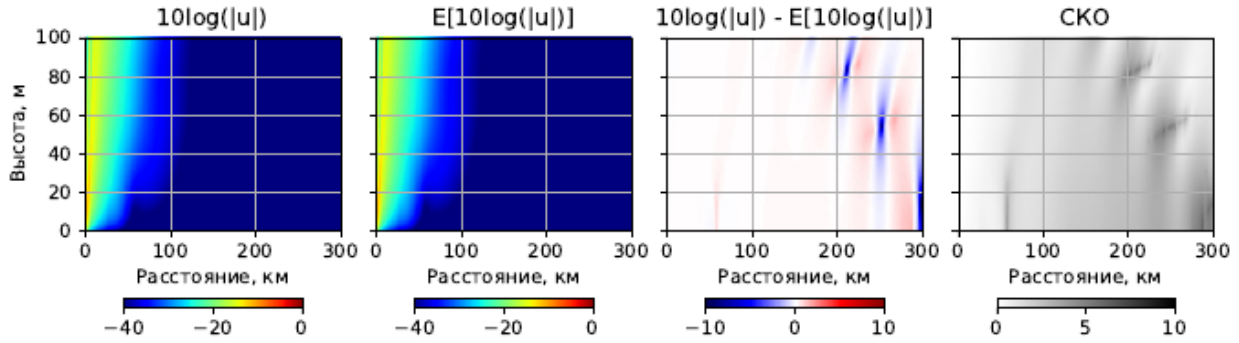


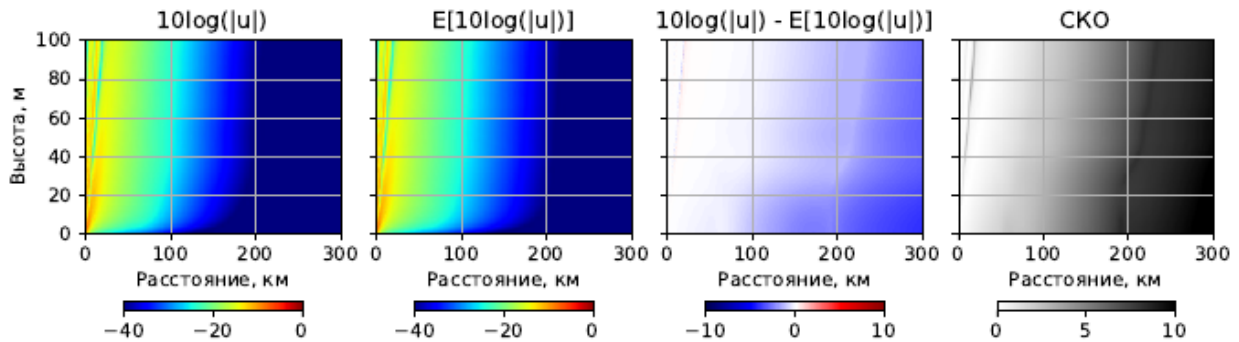
Рис. 4. Сравнение результатов моделирования для различных значений высоты излучающей антенны ( $h_{src}$ ).  $\sigma = 2.0$  м,  $f = 10$  ГГц,  $h_e = 20$  м.



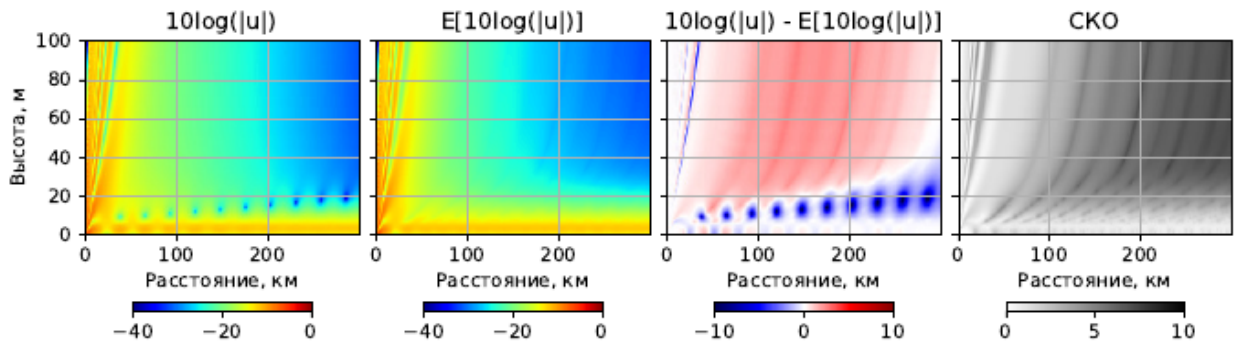
(a)  $f = 300$  МГц



(б)  $f = 1$  ГГц



(в)  $f = 3$  ГГц



(г)  $f = 10$  ГГц

Рис. 5. Сравнение результатов моделирования для различных значений частоты излучения ( $f$ ).  $\sigma = 2.0$  м,  $h_{src} = 10$  м,  $h_e = 20$  м.

## **Заключение**

Показано, что разница между детерминированным полем и математическим ожиданием случайного поля может превышать 10 дБ. Таким образом, учет погрешности входных данных является фактически необходимым при анализе результатов моделирования, проведении натурных экспериментов и внедрении математических моделей в прикладные программные комплексы. В большинстве случаев дисперсия поля радиоволн растет с ростом расстояния от источника. Несмотря на значительные количественные различия, качественно картина распространения остается неизменной даже при больших погрешностях высоты волновода испарения.

Единственным методом, позволяющим надежно рассчитывать поле радиоволн при произвольном показателе преломления и других неоднородностях является метод ПУ. В принципе, на основе методов численного решения ПУ можно построить эффективный алгоритм учета случайных входных данных. В данной работе для этого был использован метод Монте-Карло. Тем не менее, появление случайных величин фактически увеличивает размерность задачи и требуемые на ее решение вычислительные ресурсы. Так что повышение производительности численных методов решения ПУ является актуальной задачей.

**Финансирование:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда No 23-71-01069.



## Литература

1. Zhang J.P. et al. A four-parameter M-profile model for the evaporation duct estimation from radar clutter //Progress In Electromagnetics Research. – 2011. – Т. 114. – С. 353-368.
2. Иванов В.К., Шаляпин В.Н., Левадный Ю.В. Определение высоты волновода испарения по стандартным метеорологическим данным //Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. – 2007. – Т. 43. – №. 1. – С. 42-51.
3. Ji H. et al. Joint inversion of evaporation duct based on radar sea clutter and target echo using deep learning //Electronics. – 2022. – Т. 11. – №. 14. – С. 2157.
4. Karimian A. et al. Refractivity estimation from sea clutter: An invited review //Radio science. – 2011. – Т. 46. – №. 06. – С. 1-16.
5. Huang L.F. et al. Comparative analysis of intelligent optimization algorithms for atmospheric duct inversion using Automatic Identification System signals //Remote Sensing. – 2023. – Т. 15. – №. 14. – С. 3577.
6. Михайлов М.С. и др. Влияние тропосферных волноводов на работу радиолокатора над морской поверхностью //Радиолокация, навигация, связь. – 2018. – С. 23-34.
7. Zhang H. et al. Statistical modeling of evaporation duct channel for maritime broadband communications //IEEE Transactions on Vehicular Technology. – 2022. – Т. 71. – №. 10. – С. 10228-10240.
8. Пищин О.Н., Пузанков Д.С., Лыдкина К.С. Методика расчета влияния фактора сезонности на распространение радиоволн в южных регионах России вблизи гидросферных объектов в диапазоне ультравысоких частот //Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2022. – №. 3. – С. 51-60.
9. Леонтович М.А., Фок В.А. Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения //Журн. эксперим. и теор. физики. – 1946. – Т. 16. – С. 557-573.

10. Ахияров В.В. Вычисление множителя ослабления над земной поверхностью методом параболического уравнения //Журнал радиоэлектроники. – 2012. – №. 1.
11. Levy M. Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation. – IET, 2000. – №. 45.
12. Lytaev M.S. Reducing the numerical dispersion of the one-way Helmholtz equation via the differential evolution method //Journal of Computational Science. – 2023. – Т. 71. – С. 102057.
13. Илюшин Я.А. и др. Решение параболического уравнения дифракции при радиопросвечивании ионосферных слоев //Журнал радиоэлектроники. – 2013. – №. 11.
14. Enstedt M., Wellander N. A spectral expansion-based Fourier split-step method for uncertainty quantification of the propagation factor in a stochastic environment //Radio science. – 2016. – Т. 51. – №. 11. – С. 1783-1791.
15. Ахияров В.В. Моделирование дальнего тропосферного распространения радиоволн методом параболического уравнения //Журнал радиоэлектроники. – 2022. – №. 1.
16. Оксендаль Б. Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения. М.: Мир – 2003.
17. Lytaev M.S. Rational interpolation of the one-way Helmholtz propagator //Journal of Computational Science. – 2022. – Т. 58. – С. 101536.
18. Fishman L., McCoy J. J. Derivation and application of extended parabolic wave theories. I. The factorized Helmholtz equation //Journal of Mathematical Physics. – 1984. – Т. 25. – №. 2. – С. 285-296.
19. Лытаев М.С. О применении конечно-разностной аппроксимации Паде псевдодифференциального параболического уравнения в задаче тропосферного распространения радиоволн //Вычислительные методы и программирование. – 2020. – Т. 21. – №. 4. – С. 405-419.

20. Ozgun O. et al. PETOOL v2. 0: Parabolic Equation Toolbox with evaporation duct models and real environment data //Computer physics communications. – 2020. – Т. 256. – С. 107454.
21. Brookner E., Cornely P.R., Lok Y.F. AREPS and TEMPER-getting familiar with these powerful propagation software tools //2007 IEEE Radar Conference. – IEEE, 2007. – С. 1034-1043.
22. Zhou H., Chabory A., Douvenot R. A fast wavelet-to-wavelet propagation method for the simulation of long-range propagation in low troposphere //IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2021. – Т. 70. – №. 3. – С. 2137-2148.
23. Lytaev M.S. Fresnel reflection modeling within the higher-order parabolic equation and discrete nonlocal boundary conditions //2022 IEEE Radar Conference (RadarConf22). – IEEE, 2022. – С. 1-5.
24. Lytaev M.S. Nonlocal boundary conditions for split-step padé approximations of the helmholtz equation with modified refractive index //IEEE antennas and wireless propagation letters. – 2018. – Т. 17. – №. 8. – С. 1561-1565.
25. Лытаев М.С. Численный метод расчета тропосферного распространения электромагнитных волн в задачах построения геоинформационных систем дистанционного мониторинга //Труды СПИИРАН. – 2018. – Т. 1. – №. 56. – С. 195-213.
26. Кузнецов Д.Ф. Стохастические дифференциальные уравнения: теория и практика численного решения. Спб: Изд-во Политехн. Ун-та – 2009.
27. Higham D.J. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations //SIAM review. – 2001. – Т. 43. – №. 3. – С. 525-546.
28. PyWaveProp. URL: <https://github.com/mikelytaev/wave-propagation> (дата обращения: 05.10.2023).

**Для цитирования:**

Лытаев М.С. Численный анализ влияния неопределенности высоты волновода испарения на тропосферное распространение радиоволн. // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.1.4>