



DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.1.5>

УДК: 621.396.96: 621.391

## ОБ ЭФФЕКТЕ ДОПЛЕРА В ОТРАЖЕННОМ СИГНАЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

М.Н. Крамм, В.В. Штыков

Национальный исследовательский университет «МЭИ»,  
111250, Москва, ул. Красноказарменная, д. 14, стр. 1

Статья поступила в редакцию 12 сентября 2025 г.

**Аннотация.** Статья посвящена строгому изложению эффекта Доплера на основе базовых постулатов современной физической картины мира. Показано отличие в описании эффекта Доплера для упругих волн и для электромагнитных волн. Для случая электромагнитных волн в радиолокации получен коэффициент масштабирования времени, учитывающий релятивистское замедление времени и являющийся многозначной функцией модуля и угла направления скорости отражающего объекта. Предложено и проанализировано представление отраженного сигнала произвольной формы и его спектра на основе масштабирования времени.

**Ключевые слова:** эффект Доплера, релятивистское замедление времени, коэффициент масштаба времени, спектр отраженного сигнала произвольной формы.

**Автор для переписки:** Крамм Михаил Николаевич, [KrammMN@mail.ru](mailto:KrammMN@mail.ru)

## Введение

Эффект Доплера [1] широко используется для решения многих задач. Например, в радиолокации он используется для определения скорости объекта при экстраполяции его траектории, а также для селекции движущихся объектов на фоне неподвижных объектов [2]. В медицине доплеровский режим широко используется в УЗИ сканерах, прежде всего для выделения на сонограммах областей кровотока и определения его скорости [3].

Однако при толковании эффекта Доплера широко распространено мнение, что для определения поправки к частоте достаточно взять производную по времени от полной фазы. Это решение не соответствует реальной физической картине явления. Противоречивость такого подхода очевидна, если рассмотреть, например, известную в радиолокации формулу для частоты принимаемых колебаний при зеркальном отражении волн от объекта, удаляющегося со скоростью  $v$ :  $f_{\text{пр}} = f(1 - 2v/c)$ , где  $c$  – скорость света. Согласно данной формуле при скорости объекта  $v = 0,6 c$  получаем  $f_{\text{пр}} = -0,2 f$ , что не имеет реального физического смысла. Удивительно, что использованная формула широко распространена не только среди студентов, но и среди специалистов.

Целью настоящей статьи является строгое изложение эффекта Доплера, основанное на фундаментальных постулатах в современной физической картине мира. Этот подход ориентирован на получение оценок границ применимости других вариантов объяснения эффекта Доплера в случаях использования упругих волн и электромагнитных волн. Также представляется практически важным получить представление отраженных сигналов сложной формы в рамках данного подхода.

Нас будет интересовать изменение временных интервалов, между событиями, регистрируемыми в двух системах отсчета, перемещающихся друг относительно друга с некоторой скоростью. В качестве событий можно рассматривать «тиканье часов», испускание колебаний или импульсов генератора. Будем одну систему отсчета условно связывать с источником, а другую – с приемником (регистратором событий). Существенно, что информация

о событиях для приемника переносится волнами или потоками частиц той или иной физической природы.

Тогда масштабный множитель, связывающий временные интервалы, может быть, например, преобразован в масштабный множитель, связывающий частоты регистрируемых колебаний (эффект Доплера обычно формулируется для частоты колебаний).

## 1. Эффект Доплера для упругих волн

Распространение упругих волн связано с движением материальных частиц, обладающих массой покоя. Все явления, происходящие в упругих волнах, могут быть с высочайшей степенью точности описаны классической механикой, согласно которой законы механики инвариантны относительно инерциальных систем отсчета (ИСО) (принцип относительности Галилея-Ньютона) [4]. В частности, во всех ИСО время одинаково и абсолютно.

Если связать ИСО со средой, состоящей из материальных частиц, обладающих массой покоя, то в ней можно будет различить, какой из объектов движется – источник или приемник. Поэтому формулы для эффекта Доплера должны быть разными для этих двух случаев.

Если относительно среды с неподвижным приемником со скоростью  $v$  движется источник (удаляется в радиальном направлении), то за счет закона сложения векторов скорости длина волны в ИСО, связанной с источником,  $\lambda = T_0(v + c)$ , где  $T_0$  – период колебаний в источнике. Наряду с этим для наблюдателя в ИСО, связанной с приемником  $\lambda\lambda = T_{\text{пр}}c$ . Таким образом, в данном случае:

$$T_{\text{пр}} = T_0 \frac{(c + v)}{c}; f_{\text{пр}} = \frac{f_0}{(1 + v/c)}, \quad (1)$$

где  $f_0$  – частота колебаний в источнике,  $T_{\text{пр}}$  и  $f_{\text{пр}}$  – период и частота колебаний, регистрируемых в приемнике.

Если относительно среды с неподвижным источником движется приемник (удаляется), то длина волны, распространяющейся в среде, неизменна, но меняется период регистрируемых колебаний (например, период следования максимумов, считываемых приемником):

$$T_{\text{пп}} = \frac{T_0 c}{(c - v)}; f_{\text{пп}} = f_0 (1 - v/c), \quad (2)$$

Если в ситуациях, описываемых формулами (1) и (2) источник и приемник приближаются друг к другу, то знак перед скоростью  $v$  следует поменять на обратный.

Принципиально важно, что формулы для эффекта Доплера отличаются и определяются движением приемника или источника волн относительно упругой среды. Существенно, что при движении источника происходит сжатие (растяжение) волн, которое может быть обнаружено *во всех точках волнового процесса*. В то же время при движении приемника эффект Доплера может быть обнаружен *только тем приемником, до которого дошла волна*. Также принципиально, что в упругих волнах эффект определяется строго радиальной (продольной) составляющей вектора скорости.

При переходе к случаю локации (двойной эффект Доплера) [1] следует вначале в качестве приемника рассмотреть колебания среды на поверхности движущегося объекта – приемника, создающие отраженную волну по формуле (2), а затем рассмотреть эти колебания как колебания, создаваемые движущимся в среде источником и принимаемые исходным излучателем в соответствии с формулой (1). В итоге:

$$f_{\text{пп}} = f_0 \frac{1 - v/c}{1 + v/c}. \quad (3)$$

## 2. Эффект Доплера для электромагнитных волн

Ситуация в этом случае принципиально отличается от вышеизложенной. Электромагнитные волны (ЭМВ) распространяются в отсутствие какой-либо

среды, и это существенно изменяет картину распространения. В соответствии с принципом относительности Эйнштейна [5] все физические процессы, включая электромагнитные, в инерциальных системах отсчета протекают одинаково. В специальной теории относительности (СТО) скорость света во всех ИСО одинакова, а время относительно.

Пусть ИСО источника волн (обозначим ее как ИСО-1) удаляется от приемника в противоположном направлении со скоростью  $v$ . Если источник излучает два коротких электромагнитных импульса («вспышки») с интервалом  $T_0$  в ИСО-1, то в ИСО-2, связанной с приемником, интервал регистрации импульсов  $T_{\text{пр}}$  равен:

$$T_{\text{пр}} = T_0 \frac{1 + v/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; f_{\text{пр}} = f_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + v/c} = f_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}, \quad (4)$$

где учтено, что в соответствии СТО происходит релятивистский эффект замедления времени [5,6]. В соответствии с принципом относительности результат не изменится при удалении приемника излучения.

Формула (4) принципиально отличается от формулы (1) эффекта Доплера для упругой волны. Так, при  $v = c$  в упругой волне получаем  $f_{\text{пр}} = 0,5f_0$ , а для электромагнитной волны  $f_{\text{пр}} = 0$ . Существенно, что в основе вывода формулы (4) лежит представление о постоянстве скорости света во всех ИСО, а формулы (1) – представление об абсолютном времени для всех ИСО.

В общем случае необходимо учитывать угол  $\theta$  между волновым вектором и вектором скорости приемника. В известной книге Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшица «Теория поля» [7] на базе преобразования Лоренца в пространстве Минковского для 4-вектора плоской волны получено, что для данного случая:

$$f_{\text{пр}} = f_0 \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c)\cos\theta}. \quad (5)$$

Отсюда, в частности вытекает поперечный эффект Доплера (обнаружен экспериментально в 1938 г американцем Г. Айвсом [8]): при  $\theta = \pi/2$  получаем

$f_{\text{пр}} = f_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$ , что трактуется как чисто релятивистский эффект замедления времени.

Перейдем к радиолокации (двойной эффект Доплера), когда традиционно рассматривается нормальное падение ЭМВ на отражающую поверхность или обратное рассеяние (однопозиционная радиолокация). При этом токи, возбуждаемые на отражающей поверхности, становятся источниками обратной волны. Поскольку на этапах до и после отражения ЭМВ относительная скорость и относительное положение источника и отражающей поверхности не меняются, то изменение масштаба частоты и времени определяются возведением в квадрат масштаба в (5):

$$f_{\text{пр}} = f_0 \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + (v/c)\cos\theta)^2}. \quad (6)$$

Данное соотношение отличается, например, от формулы (8.51) в [9], в которой эффект определяется только радиальной (продольной) составляющей скорости отражающего объекта. Изменение частоты в (6) следует рассматривать как изменение масштаба времени и описывать масштабным множителем:

$$T_{sc} = \begin{cases} \frac{1 - v^2/c^2}{(1 + (v/c)\cos\theta)^2}, & -c < v \leq c; \\ 0 & \text{в точке } (v = -c; \theta = 0). \end{cases} \quad (7)$$

В формулах (6), (7) предлагается понимать скорость в алгебраическом смысле – использовать со знаком «+» при увеличении расстояния между объектами и со знаком «-» при уменьшении этого расстояния. При этом  $0 \leq \theta \leq \pi/2$ . Если, например, в соответствии с (6), (7)  $f_{\text{пр}} < f_0$  и  $T_{sc} < 1$ , то это означает увеличение периода регистрируемых колебаний, т.е. замедление времени в ИСО приемника.

На рис. 1 представлена зависимость масштаба времени от относительной скорости  $v/c$ . В соответствии с (6), (7) в случае радиального движения ( $\theta = 0$ )

при  $v/c \rightarrow -1$  наблюдаются сколь угодно большие значения масштаба  $T_{sc}$ .

Однако при ненулевых углах  $\theta$  и при  $v/c \rightarrow -1$  согласно (7), масштаб  $T_{sc}$  уменьшается

и стремится к нулю, что соответствует замедлению времени.

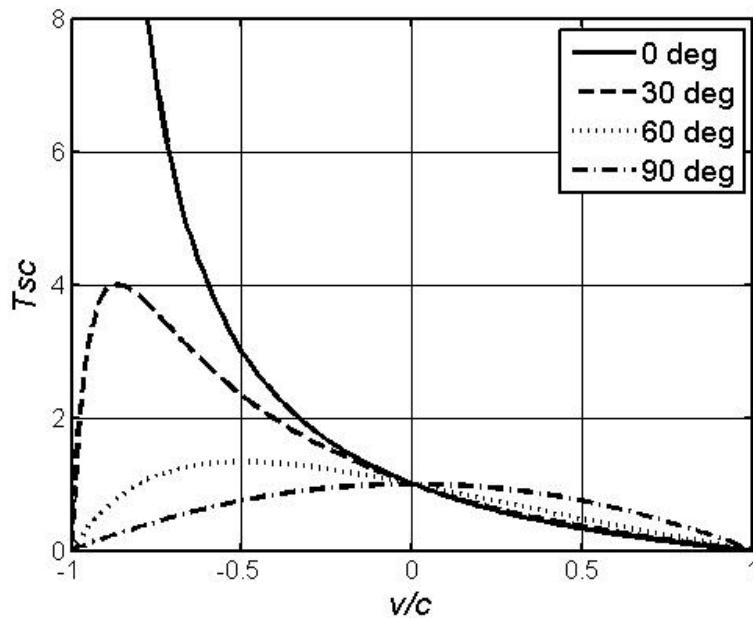


Рис. 1. Зависимость масштаба времени от относительной скорости для разных значений угла между волновым вектором и скоростью.

Существенно, что в соответствии с (7) и рис.1 коэффициент масштаба времени является многозначной функцией двух переменных:

$$T_{sc} = T_{sc}\left(\frac{v}{c}, \theta\right),$$

и может принимать определенное значение при различных комбинациях скорости и угла. Таким образом, строго говоря, радиолокационная задача сводится к определению двух неизвестных параметров.

Для важного для практики случая малых скоростей, когда  $|v/c| \ll 1$ , согласно (7), масштаб времени:

$$T_{sc} \approx 1 - \frac{2v}{c} \cos \theta, \quad (8)$$

что дает в случае радиального движения ( $\theta = 0$ ) известное соотношение  $\tilde{T}_{sc} = 1 - \frac{2v}{c}$ . Систематическая ошибка при использовании данного приближения, определяемая формулой  $\delta = (\tilde{T}_{sc} - T_{sc})/T_{sc}$ , оценивается при  $|v/c| \ll 1$ , как  $\delta = 2v^2/c^2$  и составляет, например, 0,02 % при  $v/c = 10^{-2}$ .

Для случая движения, близкого к поперечному, когда  $\theta = \frac{\pi}{2} + \Delta\theta$  и  $\Delta\theta \ll 1$ , на основании (7):

$$T_{sc} \approx \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 + 2\Delta\theta \frac{v}{c}\right), \quad (9)$$

т. е. поправка к масштабу линейно зависит от приращения угла.

### 3. Представление отраженного сигнала произвольной формы

Нас интересует запись принимаемого отраженного радиосигнала  $u_R(t)$  при двойном эффекте Доплера. Непрерывный гармонический сигнал в соответствии с предыдущим рассмотрением записывается в виде  $\cos\left[2\pi f_0 T_{sc} \left(t - \frac{2z}{c}\right)\right]$ , где  $f_0$  – частота излученного сигнала;  $z$  – расстояние до отражающей поверхности;  $T_{sc}$  – масштабный множитель, определяемый в (7). Здесь учтено, что задержка определяется скоростью света, одинаковой во всех ИС.

Поскольку спектральное Фурье описание сигнала сложной формы предусматривает его интегральное представление в базисе гармонических колебаний вида  $e^{j2\pi ft}$  [10], то с учетом изменения масштаба времени и задержки в отраженном сигнале:

$$u_R(t) = 2\pi \sqrt{T_{sc}} \int_{-\infty}^{\infty} S(2\pi f) e^{j2\pi f T_{sc} \left(t - \frac{2z}{c}\right)} df, \quad (10)$$

где  $S(2\pi f)$  – спектральная плотность излученного сигнала  $u(t)$ ; множитель  $\sqrt{T_{sc}}$  связан с сохранением энергии сигнала при эффекте Доплера. После замены переменных  $f \rightarrow T_{sc}f$  приходим к выражению:

$$u_R(t) = \frac{2\pi}{\sqrt{T_{sc}}} \int_{-\infty}^{\infty} S\left(\frac{2\pi f}{T_{sc}}\right) e^{j2\pi f\left(t - \frac{2z}{c}\right)} df, \quad (11)$$

откуда спектральная плотность принимаемого отраженного сигнала:

$$S_R(2\pi f) = \frac{1}{\sqrt{T_{sc}}} S\left(\frac{2\pi f}{T_{sc}}\right) \exp\left[-j2\pi f \frac{2z}{c}\right], \quad (12)$$

причем принимаемый сигнал:

$$u_R(t) = \sqrt{T_{sc}} u\left(T_{sc}\left(t - \frac{2z}{c}\right)\right). \quad (13)$$

Таким образом, эффект Доплера приводит к масштабированию спектра радиосигнала (см. также [11], стр. 76). В то же время в литературе, часто эффект Доплера трактуется как сдвиг несущей частоты радиосигнала. На рис. 2 в качестве примера рассмотрен вид прямоугольного радиоимпульса до отражения от движущегося отражателя (рис. 2а)) и после отражения (рис. 2в)), для сравнения не показана задержка по трассе.

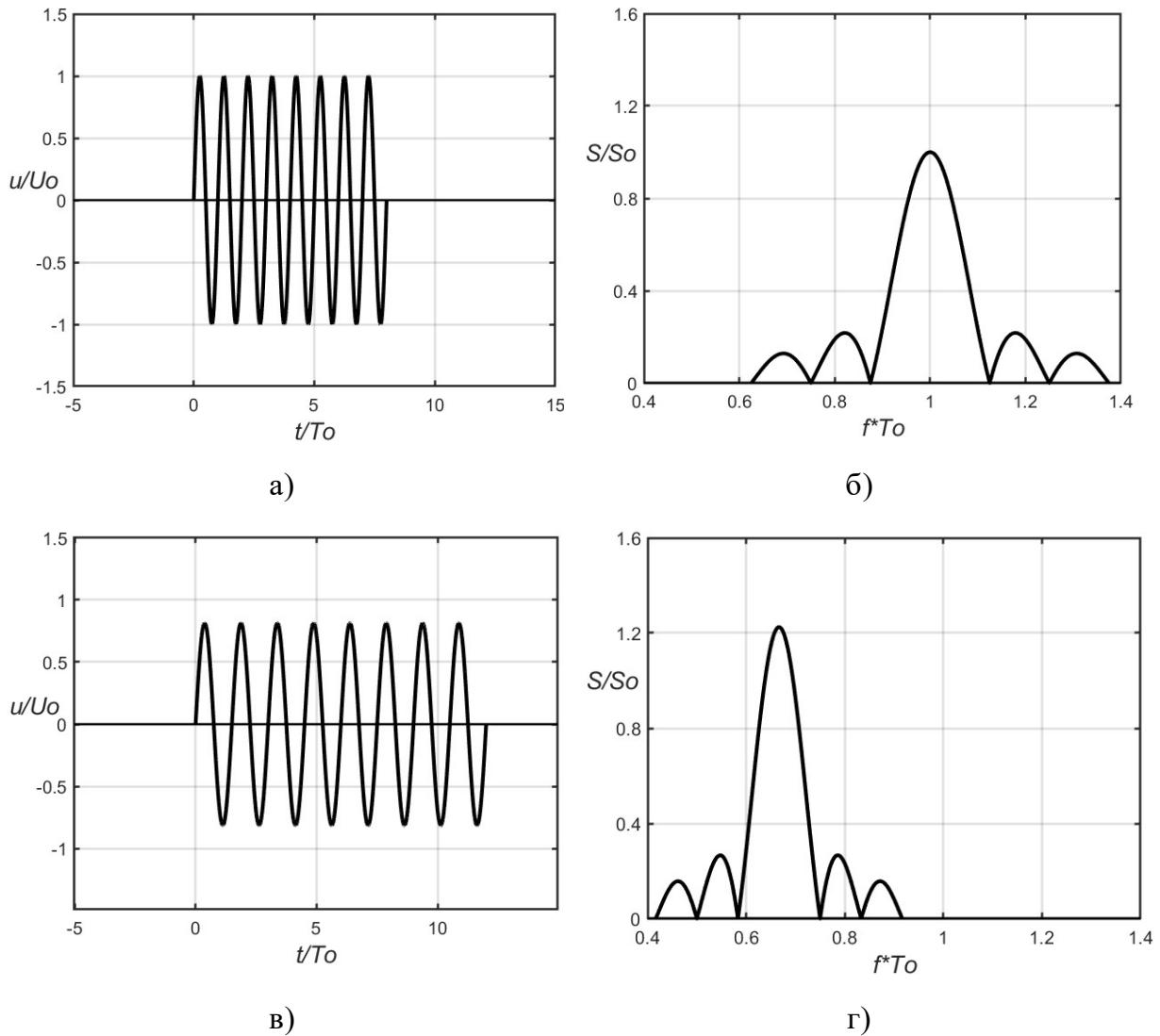


Рис. 2. Прямоугольный радиоимпульс: исходный радиоимпульс (а) и его спектр (б); отраженный радиоимпульс (в) и его спектр (г).

На рис. 2б,г также показаны нормированные амплитудные спектры данных радиоимпульсов (центральные лепестки). При этом  $T_0 = 1/f_0$ , для наглядности взят случай  $v/c = 0,2$ ,  $\theta = 0$ , откуда в соответствии с (7) масштаб  $T_{sc} = 2/3$ . Существенно, за счет изменения временного масштаба при эффекте Доплера изменяется как несущая частота, так и длительность импульса. В итоге число периодов колебаний несущей частоты в импульсе *неизменно*. Если же предполагать, что эффект Доплера заключается только в сдвиге несущей частоты, то число периодов в импульсе изменится, возможно появление постоянной составляющей, что не соответствует действительности. Что касается изменения спектра, то помимо его сдвига, в случае удаления отражающего объекта происходит сжатие спектра и увеличение его уровня (см. рис. 2б и рис. 2г).

## Заключение

При рассмотрении эффекта Доплера методически некорректно находить поправку к частоте на основании подсчета фазового набега и взятии производной по времени от полной фазы. Строгое описание эффекта Доплера, учитывающее положения СТО и приводящее к масштабированию времени в отраженном сигнале, позволяет получить границы применимости при использовании других вариантов описания эффекта Доплера.

Важно отметить принципиальное различие в описании эффекта Доплера в акустике и в электромагнитных волнах. Описание эффекта Доплера в акустических волнах зависит от того, что движется относительно материальной упругой среды – источник или приемник колебаний. Описание эффекта Доплера в электромагнитных волнах должно быть основано на постоянстве скорости света во всех инерциальных системах отсчета и учитывать замедление времени в специальной теории относительности. Это приводит к принципиальному влиянию на эффект как продольной, так и поперечной составляющей скорости отражающего объекта: коэффициент масштаба времени является многозначной функцией двух переменных – скорости объекта и угла, под которым он движется.

Анализ сигналов, отраженных от движущегося объекта, удобно проводить с использованием множителя изменения временного масштаба, приводящего к масштабированию спектра исходного сигнала. При этом, в частности, изменяются несущая частота, длительность импульса, закон внутриимпульсной модуляции. Нельзя говорить об исчезновении эффекта Доплера после демодуляции (переноса спектра) принимаемого радиоимпульса.

В случае использовании существенно широкополосных сигналов, следует переходить к учету дисперсионных свойств среды распространения, когда за счет зависимости фазовой скорости от частоты, коэффициент временного масштаба начинает дополнительно зависеть от частоты. Это требует дополнительного теоретического рассмотрения.

## Литература

1. Введенский Б. А. (ред.). Физический энциклопедический словарь. – Советская энциклопедия, 1960. – Т. 1 – 664 с.
2. Skolnik M. I., Edition Т. Справочник по радиолокации /Под ред. М.И. Сколника. Пер. с англ. под общей ред. В.С. Вербы. В 2 книгах. Книга 1 Москва: Техносфера, 2014. –672 с., ISBN 978-5-94836-381-3.
3. Осипов Л.В. Ультразвуковые диагностические приборы – Москва: ИзоМед, 2011. – 316 с.
4. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. I – Москва : ACT, 2022. – 448 с.
5. Einstein A. Zur Elektrodynamik der bewegter Korper.— Annalen der physik, 1905, 17, S. 891 – 921. Рус. пер. в кн.: Эйнштейн А. Собр.науч.трудов.Т.1 – Москва : Наука, 1965, с. 7 – 35.
6. Угаров В.А. Специальная теория относительности – Москва : Наука, 1977. – 384 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. Т.2 – 7-е изд. – Москва : Наука, 1988. –512 с.
8. Ives, H. E. (1938). An experimental study of the rate of a moving atomic clock. Journal of the Optical Society of America. 28 (7), 1938, p. 215 <https://doi.org/10.1364/JOSA.28.000215>.
9. Ширман Я. Д. и др. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория. Справочник – Москва : Радиотехника, 2007. – 512с.
10. Корн Г.А., Корн Т.М. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – 4-е изд. – Москва : Наука, 1978. – 832 с.
11. Кук Ч., Бернфельд М. Радиолокационные сигналы. Пер. с англ. – Москва : Советское радио, 1971. – 568 с.

### Для цитирования:

Штыков В.В., Крамм М.Н. Об эффекте Доплера в отраженном сигнале произвольной формы. // Журнал радиоэлектроники. – 2026. – №. 1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.1.5>