

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.1.9>

УДК: 538.945

ЭФФЕКТИВНАЯ ДЖОЗЕФСОНОВСКАЯ ИНДУКТИВНОСТЬ ВЧ-СКВИДА КАК ФУНКЦИЯ МОЩНОСТИ МИКРОВОЛНОВОГО ОБЛУЧЕНИЯ

А.С. Аверкин¹, Л.В. Филиппенко²

¹ Национальный исследовательский технологический университет «МИСИС»
119049, г. Москва, Ленинский просп. 4

² ИРЭ им. В.А. Котельникова РАН
125009, г. Москва, ул. Моховая, 11, корп. 7

Статья поступила в редакцию 27 октября 2025 г.

Аннотация. Высокочастотные сверхпроводящие квантовые интерферометры (ВЧ-СКВИДы) являются структурными элементами нелинейных сред, применяемых в сверхпроводящих метаматериалах и сверхпроводящих малошумящих параметрических усилителях. Получено выражение для эффективной джозефсоновской индуктивности в зависимости от мощности внешнего микроволнового сигнала в двухтоновом режиме возбуждения. Эта формула применена для расчета эффективной индуктивности джозефсоновского перехода, встроенного в ВЧ-СКВИД, под воздействием микроволнового излучения. Аналитически рассчитанные зависимости резонансной частоты и эффективной джозефсоновской индуктивности безгистерезисного СКВИДа в зависимости от мощности микроволнового излучения хорошо согласуются с экспериментальными результатами.

Ключевые слова: сверхпроводимость, ВЧ-СКВИД, контакт Джозефсона, СВЧ.

Финансирование: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках программы Приоритет-2030 (Стратегический технологический проект НИТУ МИСИС «Квантовый интернет»).

Автор для переписки: Аверкин Александр Сергеевич, averkin.as@misis.ru

Введение

Джозефсоновские переходы – нелинейные элементы сверхпроводящих цепей [1, 2]. В джозефсоновских переходах наблюдается множество замечательных эффектов: ступеньки Шапиро на вольт-амперных характеристиках под действием микроволнового излучения [3, 4], туннелирование с участием фотонов [5], распространение магнитного флаксона [6], подавление критического тока под действием микроволнового излучения [7, 8].

Высокочастотные сверхпроводящие квантовые интерферометры (ВЧ-СКВИДы), использующие значительную нелинейность джозефсоновского перехода, используются для изучения нелинейного отклика. В частности, были изучены колебания резонансной частоты под действием одиночного микроволнового сигнала [9], явление мультстабильности [10] и отклик двумерных массивов на двухтоновое возбуждение [11].

Сверхпроводящие метаматериалы на основе ВЧ-СКВИДов представляют собой перспективную платформу для управления микроволновым излучением [12, 13]. Экспериментальные исследования в этой области охватывают как одномерные [14, 15], так и двумерные массивы ВЧ-СКВИДов [16, 17, 18, 19]. Резонансную частоту ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности СВЧ сигнала удобно измерять при помощи двухтоновой спектроскопии, когда мощный тон накачки используется для управления нелинейностью, а слабый сигнальный тон используется для считывания состояния СКВИДа. Исследование одномерного массива ВЧ-СКВИДов с помощью двухтоновой спектроскопии [20] позволило получить аналитическое решение, характеризующее зависимость резонансной частоты от мощности микроволнового излучения. Однако физический механизм, лежащий в основе осцилляционного поведения, остался невыясненным.

В данной работе получено выражение для эффективной джозефсоновской индуктивности в зависимости от мощности внешнего микроволнового сигнала в двухтоновом режиме возбуждения. Используя это выражение, мы вычисляем

полную индуктивность и резонансную частоту ВЧ-СКВИДа. Кроме того, резонансная частота ВЧ-СКВИДа измерена в зависимости от СВЧ мощности в двухтоновом режиме.

1. Эффективная индуктивность контакта Джозефсона под воздействием микроволнового излучения

Индуктивность джозефсоновского перехода определяется формулой [21]:

$$L_j = \frac{L_j(0)}{\cos(\varphi)}, \quad (1)$$

где джозефсоновская индуктивность при нулевой разности фаз на контакте $L_j(0) = \Phi_0 / (2\pi I_c)$, а разность фаз на контакте φ . Если джозефсоновский переход облучается внешним микроволновым сигналом $P(t) = A_0 \sin(\omega_p t + \delta_0)$, то разность фаз на контакте осциллирует в ответ на внешнее микроволновое воздействие [20]:

$$\varphi(t) = A_p \sin(\omega_p t + \delta), \quad (2)$$

где амплитуда отклика джозефсоновской фазы равна A_p , а начальная фаза осцилляций джозефсоновской фазы равна δ . Подставив выражение разности фаз (2) в формулу (1), получаем:

$$L_j = \frac{L_j(0)}{\cos(A_p \sin(\omega_p t + \delta))} \quad (3)$$

Знаменатель уравнения (3) можно представить в виде разложения Якоби-Ангера [19]:

$$\cos(A_p \sin(\omega_p t + \delta)) \approx J_0(A_p) + \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(A_p) \cos(2nA_p), \quad (4)$$

где функция Бесселя [19]:

$$J_n(A_p) = \frac{w_p}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(A_p \sin(\omega_p t) - n\omega_p t) dt. \quad (5)$$

Взяв только первый член разложения (4) и подставив его в уравнение (3), получаем выражение для эффективной джозефсоновской индуктивности в зависимости от мощности СВЧ сигнала:

$$L_j^{eff} = \frac{L_j(0)}{J_0(A_p)}, \quad (6)$$

где $J_0(A_p)$ – функция Бесселя нулевого порядка от амплитуды джозефсоновской фазы A_p , индуцированной СВЧ тоном накачки. Из формулы (6) видно, что эффективная индуктивность контакта Джозефсона обратно пропорциональна амплитуде отклика джозефсоновской фазы $L_j^{eff} \sim 1 / A_p$.

2. Модель ВЧ-СКВИДа.

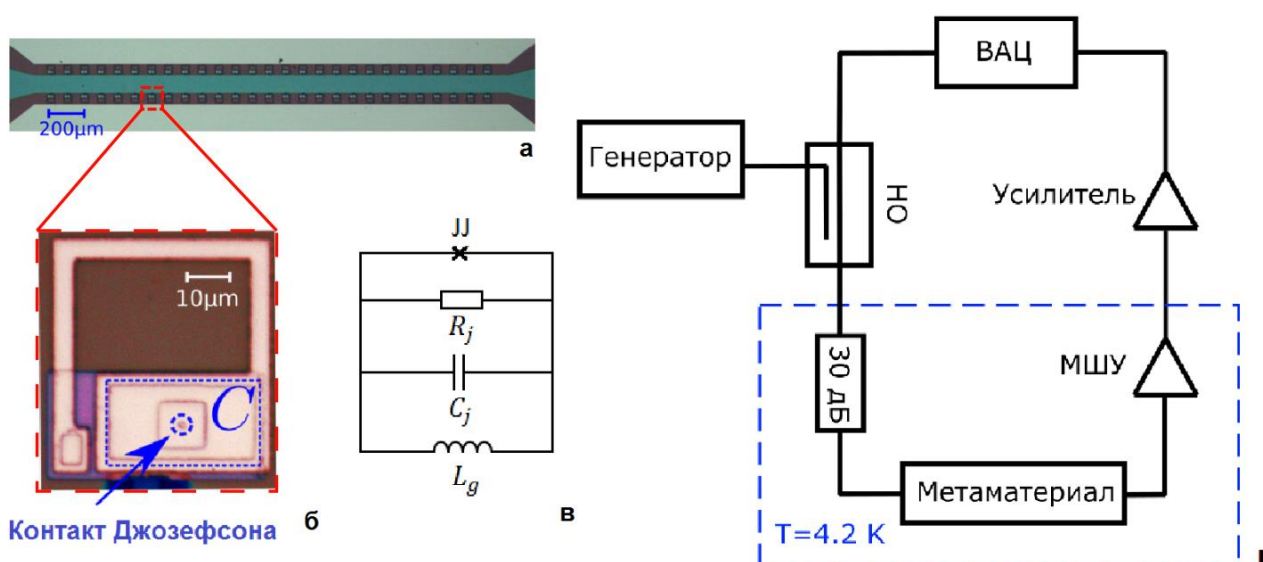


Рис. 1. (а) Фотография образца метаматериала с 54 ВЧ-СКВИДами. (б) Фотография ВЧ-СКВИДа. ВЧ-СКВИД состоит из контакта Джозефсона, шунтирующего конденсатора и кольца из сверхпроводника. (в) Эквивалентная схема ВЧ-СКВИДа. ВЧ-СКВИД может быть представлен идеальным джозефсоновским переходом, шунтирующей емкостью C , сопротивлением перехода в нормальном состоянии R_j и геометрической индуктивностью кольца СКВИДа L_g . (г) Схема экспериментальной установки.

ВЧ-СКВИД состоит из сверхпроводящего кольца, перехваченного джозефсоновским контактом. Эквивалентная схема ВЧ-СКВИДа представлена на рисунке 1в. Контакт Джозефсона описывается моделью RCSJ [22].

Ток, текущий в ВЧ-СКВИДе равен сумме токов через идеальный джозефсоновский переход, шунтирующий конденсатор C , резистор R_j и тока, текущего через геометрическую индуктивность сверхпроводящего кольца ВЧ-СКВИДа L_g :

$$I(t) = C \frac{\Phi_0}{2\pi} \ddot{\varphi} + \frac{\Phi_0}{2\pi R_j} \dot{\varphi} + \frac{\Phi_0}{2\pi L_g} \varphi + I_c \sin(\varphi), \quad (7)$$

где емкость C – это сумма емкостей между обкладками джозефсоновского перехода и шунтирующей емкости, $\Phi_0 = h / (2e)$ – квант магнитного потока для куперовских пар, φ – разность фаз на джозефсоновском контакте, $\dot{\varphi}$ – первая и $\ddot{\varphi}$ – вторая производные по времени от разности фаз на контакте, R_j – сопротивление джозефсоновского перехода в нормальном состоянии, I_c – критический ток джозефсоновского контакта, h – постоянная планка, $2e$ – заряд куперовской пары. Перепишем уравнение (7) в удобном виде:

$$\frac{2\pi L_g}{\Phi_0} I(t) = w_g^{-2} \ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} + \varphi + b_L \sin(\varphi), \quad (8)$$

где $w_g = 1 / \sqrt{L_g C}$ – резонансная частота ВЧ-СКВИДа, $b_L = L_g / L_j(0)$ – коэффициент экранировки СКВИДа, коэффициент потерь $\gamma = L_g / R_j$. ВЧ-СКВИД связан с возбуждающей СВЧ линией через взаимную индуктивность.

3. Эффективная индуктивность джозефсоновского перехода в двухтоновом режиме.

Подставив выражение для двух тонов в уравнение (8):

$$w_g^{-2} \ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} + \varphi + b_L \sin(\varphi) = A_{pe} \sin(w_p t) + A_{se} \sin(w_s t), \quad (9)$$

где A_{pe} и w_p – амплитуда и частота тона накачки, A_{se} и w_s – амплитуда и частота сигнального тона. Амплитуда тона накачки дана формулой:

$A_{pe} \sim q \frac{2\pi L_g}{\Phi_0} \sqrt{10^{(-3+P_p/10)}}$; амплитуда сигнального тона дана формулой:

$A_{se} \sim q \frac{2\pi L_g}{\Phi_0} \sqrt{10^{(-3+P_s/10)}}$, где P_p и P_s – мощности накачки и сигнала

соответственно в дБм, q – коэффициент связи между амплитудой сигнала на ВЧ-СКВИДе и амплитудой сигнала на выходе измерительных приборов. Найдем решение уравнения (9) в виде:

$$\varphi(t) = A_p \sin(w_p t + \delta) + \varphi_s, \quad (10)$$

где амплитуда джоуфсоновской фазы отклика A_p и начальная фаза колебаний джоуфсоновской фазы δ на частоте w_p , отклик джоуфсоновской фазы φ_s на частоте w_s . Подставим выражение (10) в уравнение (9):

$$\begin{aligned} & -\frac{w_p^2}{w_g^2} A_p \sin(w_p t + \delta) + \gamma w_p A_p \cos(w_p t + \delta) + A_p \sin(w_p t + \delta) + \\ & + w_g^{-2} \ddot{\varphi}_s + \gamma \dot{\varphi}_s + \varphi_s + \beta_L \sin(A_p \sin(w_p t + \delta) + \varphi_s) = A_{pe} \sin(w_p t) + A_{se} \sin(w_s t) \end{aligned} \quad (11)$$

Разложим нелинейный член в ряд Маклорена:

$$\sin(A_p \sin(w_p t + \delta) + \varphi_s) = \sin(A_p \sin(w_p t + \delta)) + \varphi_s \cos(A_p \sin(w_p t + \delta)). \quad (12)$$

Предполагая, что тон накачки и сигнальный тон слабо взаимодействуют друг с другом, возможно записать уравнения для связанных мод (Coupled mode equations) [24]. Уравнение для тона накачки:

$$\begin{aligned} & \left(A_p - A_p \frac{w_p^2}{w_g^2} + 2\beta_L \sin(A_p \sin(w_p t + \delta)) \right) \sin(w_p t + \delta) + \\ & + \gamma w_p A_p \cos(w_p t + \delta) = A_{pe} \sin(w_p t) \end{aligned} \quad (13)$$

Уравнение для сигнального тона:

$$w_g^{-2} \ddot{\varphi}_s + \gamma \dot{\varphi}_s + (1 + \beta_L \cos(A_p \sin(w_p t + \delta))) \varphi_s = A_{se} \sin(w_s t). \quad (14)$$

Сначала решим уравнение для сигнального тона. Предполагая, что амплитуда тона накачки много больше амплитуды сигнального тона $A_{pe} \gg A_{se}$,

возможно пренебречь амплитудой сигнального тона $A_{se} \approx 0$. Используя разложение Якоби-Ангера [19]:

$$w_g^{-2} \ddot{\varphi}_s + \gamma \dot{\varphi}_s + \left(1 + \beta_L J_0(A_p)\right) \varphi_s = 0, \quad (15)$$

где $J_0(A_p)$ – функция Бесселя нулевого порядка. Формула (15) – это уравнение гармонического осциллятора с потерями. Подставив формулу (6) в уравнение (15):

$$w_g^{-2} \ddot{\varphi}_s + \gamma \dot{\varphi}_s + L_g \left(\frac{1}{L_g} + \frac{1}{L_j^{eff}} \right) \varphi_s = 0, \quad (16)$$

где эффективная джозефсоновская индуктивность дана формулой (6). Формула (16), записанная через полную индуктивность ВЧ-СКВИДа:

$$w_g^{-2} \ddot{\varphi}_s + \gamma \dot{\varphi}_s + \frac{L_g}{L_{tot}} \varphi_s = 0, \quad (17)$$

где общая индуктивность ВЧ-СКВИДа:

$$L_{tot} = \frac{L_g L_j^{eff}}{L_g + L_j^{eff}} \quad (18)$$

– это параллельная комбинация эффективной джозефсоновской индуктивности перехода и геометрической индуктивности. Решение уравнения (17):

$$\varphi_s = C_1 \exp\left(-\frac{\gamma w_g^2}{2} t\right) \cos(w_r t + C_2), \quad (19)$$

где резонансная частота ВЧ-СКВИДа в двухтоновом режиме равна:

$$w_r = w_g \sqrt{L_g / L_{tot} - (\gamma w_g)^2 / 4}, \quad (20)$$

Резонансная частота ВЧ-СКВИДа, выраженная через эффективную индуктивность Джозефсона:

$$f_r = \frac{w_r}{2\pi} \sqrt{L_g \left(\frac{1}{L_g} + \frac{1}{L_j^{eff}} \right) - (\gamma w_g)^2 / 4}. \quad (21)$$

Решим уравнение (13) для сигнала накачки, используя теорему о гармоническом сложении [23]:

$$\left(A_p - A_p \frac{w_p^2}{w_g^2} + 2\beta_L \sin(A_p \sin(w_p t + \delta)) \right)^2 + (A_p \gamma w_p)^2 = A_{pe}^2. \quad (22)$$

Получаем трансцендентное уравнение, которое связывает A_p и амплитуду внешнего сигнала накачки A_{pe} :

$$A_{pe} = \sqrt{\left(A_p - A_p \frac{w_p^2}{w_g^2} + 2\beta_L J_1(A_p) \right)^2 + \left(A_p \frac{w_p}{w_c} \right)^2} \quad (23)$$

Как следует из уравнения (6), эффективная индуктивность Джозефсона обратно пропорциональна амплитуде отклика джозефсоновской фазы в двухтоновом режиме. При этом амплитуда отклика джозефсоновской фазы пропорциональна амплитуде внешнего микроволнового сигнала, следуя уравнению (23) $A_p \sim A_{pe}$.

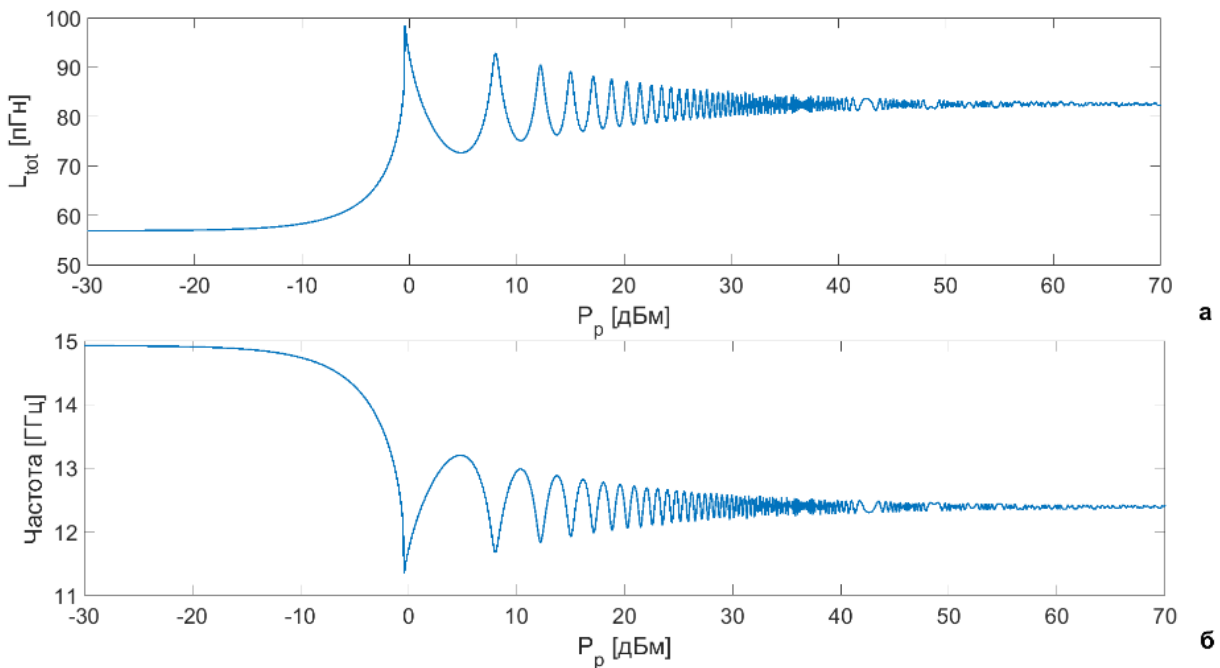


Рис. 2. Аналитические расчеты. (а) Общая индуктивность ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности тона накачки P_p , приложенного на частоте $f_p = 10$ ГГц, рассчитанной по формуле (18). (б) Резонансная частота ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности тона накачки P_p , приложенного на частоте $f_p = 10$ ГГц, рассчитанной по формуле (21).

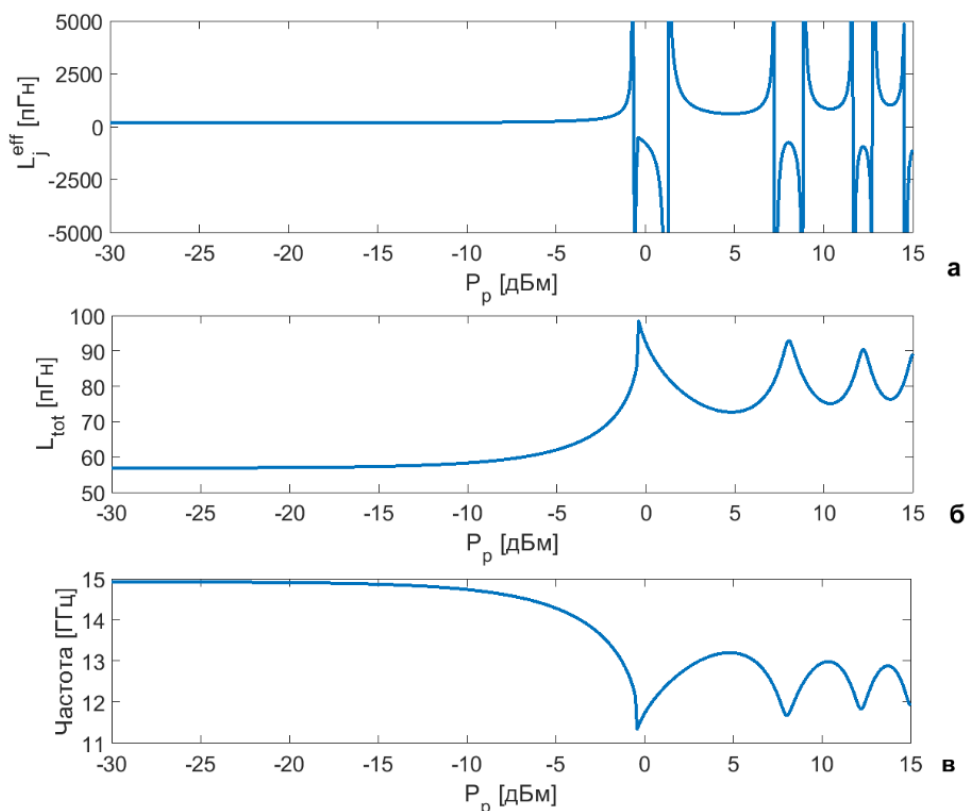


Рис. 3. Аналитические расчеты в более узком диапазоне мощностей по сравнению с Рис. 2. (а) Эффективная индуктивность джозефсоновского перехода в зависимости от мощности тона накачки P_p , приложенного на частоте $f_p = 10$ ГГц, рассчитанная по формуле 6. (б) Общая индуктивность ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности тона накачки P_p , приложенного на частоте $f_p = 10$ ГГц, рассчитанная по формуле (18) показана в узком диапазоне мощностей по сравнению рисунком 2. (в) Резонансная частота ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности тона накачки P_p , приложенного на частоте $f_p = 10$ ГГц, рассчитанная по формуле (21).

4. Эксперимент.

Ключевым элементом образца является ВЧ-СКВИД, состоящий из ниобиевого кольца, прерываемого джозефсоновским контактом $Nb / AlO_x / Nb$. Параллельно джозефсоновскому переходу подключен плоский конденсатор. Изготовлен образец со следующими параметрами ВЧ-СКВИДа: критический ток джозефсоновского перехода $I_c = 1.8$ мкА, емкость шунтирующего конденсатора $C = 2$ пФ, сопротивление джозефсоновского перехода в нормальном состоянии $R_j = 1$ КОм, геометрическая индуктивность контура

СКВИДа $L_g = 82.5$ пГн. Джозефсоновская индуктивность при нулевой разности фаз на контакте $L_j(0) = 183$ пГн, параметр экранирования СКВИДа $\beta_L = L_g / L_j(0)$ определяет то, что СКВИД является безгистерезисным ($\beta_L = 0.45 < 1$).

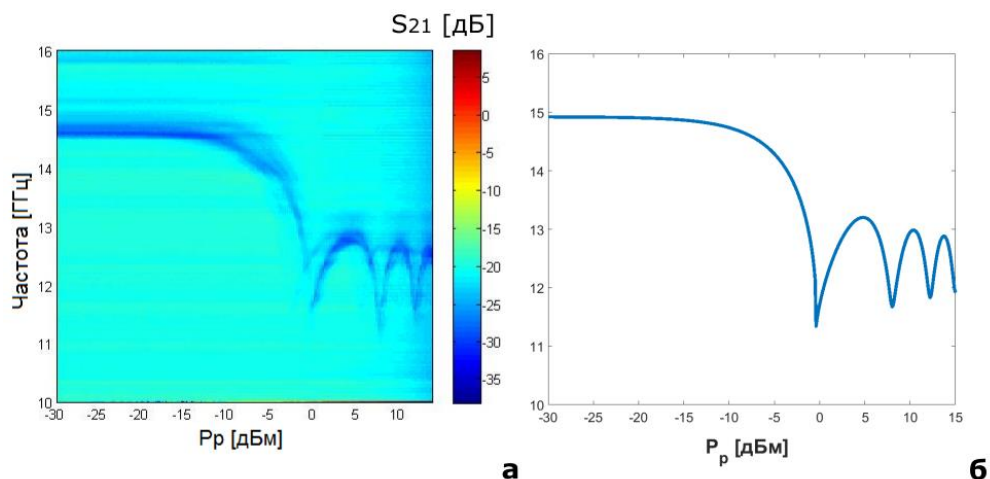


Рис. 4. (а) Измеренный отклик массива ВЧ-СКВИДов при двухтоновом возбуждении. Частота тона сигнала f_s измерена в зависимости от мощности тона накачки P_p , подаваемого на частоте $f_p = 10$ ГГц. Коэффициент передачи S_{21} в дБ через образец показан цветом. (б) Резонансная частота ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности тона накачки P_p , приложенного на частоте $f_p = 10$ ГГц, рассчитанная по формуле (21).

Массив из 54 ВЧ-СКВИДов изготовлен в зазоре копланарной линии (КПЛ). Каждый ВЧ-СКВИД индуктивно связан с центральным проводником КПЛ. Характеристическое сопротивление КПЛ близко к $Z_0 = 50$ Ом. Фотография образца представлена на рисунке (1). Образцы изготовлены с использованием трехслойного процесса $Nb / AlO_x / Nb$ на оборудовании, входящем в состав уникальной научной установки УНУ «Криоинтеграл» [25].

Схема экспериментальной установки представлена на рисунке 1г. Образец установлен в держателе образца и подключен при помощи ультразвуковой сварки алюминиевой проволокой. Держатель образца установлен внутри магнитного экрана из криопермалоя, измерения проводятся внутри сосуда Дьюара, заполненного жидким гелием. Для подачи СВЧ

сигналов на образец используются две коаксиальные линии. Внутри криостата на входной СВЧ линии установлены СВЧ аттенюаторы с общим затуханием 30 дБ. Выходная СВЧ линия проходит через малошумящий усилитель (МШУ) и усилитель, работающий при комнатной температуре. Коэффициент передачи S_{21} измеряется с помощью векторного анализатора цепей (ВАЦ). Второй СВЧ тон подается от генератора сигналов через направленный ответвитель СВЧ мощности. Отклик образца измерен при подаче двух тонов: тона сигнала на частоте f_s и тона накачки на частоте f_p . Коэффициент передачи S_{21} в зависимости от частоты сигнала f_s и от мощности тона накачки P_p измерен с помощью векторного анализатора цепей (Рис. 4).

5. Дискуссия

Далее приведены результаты аналитических расчетов. Параметры СКВИДа для расчетов выбраны такими же, как и в эксперименте. Коэффициент связи между амплитудами выбран $q=1.78e-4$. В первую очередь, вычислена амплитуда джозефсоновской фазы в зависимости от мощности сигнала накачки по формуле (23). Затем эффективная индуктивность контакта Джозефсона как функция мощности тона накачки рассчитана по формуле (6) и показана на рисунке (3а). Общая индуктивность ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности сигнала накачки, рассчитанная по формуле (18) представлена на рисунке (3б). И наконец, резонансная частота ВЧ-СКВИДа как функция мощности СВЧ сигнала накачки вычислена по формуле (21) показана на рисунке (3в). На рисунке 3 видно, что точки экстремумов на оси x совпадают для кривых (Рис. 3б и Рис. 3в). Это свидетельствует о том, что осцилляции резонансной частоты от мощности являются следствием осцилляций общей индуктивности ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности тона накачки. Общая индуктивность и резонансная частота ВЧ-СКВИДа рассчитаны в зависимости от мощности тона накачки (Рис. 2). Амплитуда осцилляций затухает при увеличении мощности СВЧ сигнала.

Резонансная частота ВЧ-СКВИДа измерена в зависимости от мощности сигнала накачки (Рис. 4а). При малой мощности накачки резонансная частота около 14.8 ГГц. При увеличении мощности сигнала накачки резонансная частота уменьшается и достигает минимального значения приблизительно 11.5 ГГц. При дальнейшем увеличении мощности появляются осцилляции резонансной частоты в зависимости от мощности сигнала накачки.

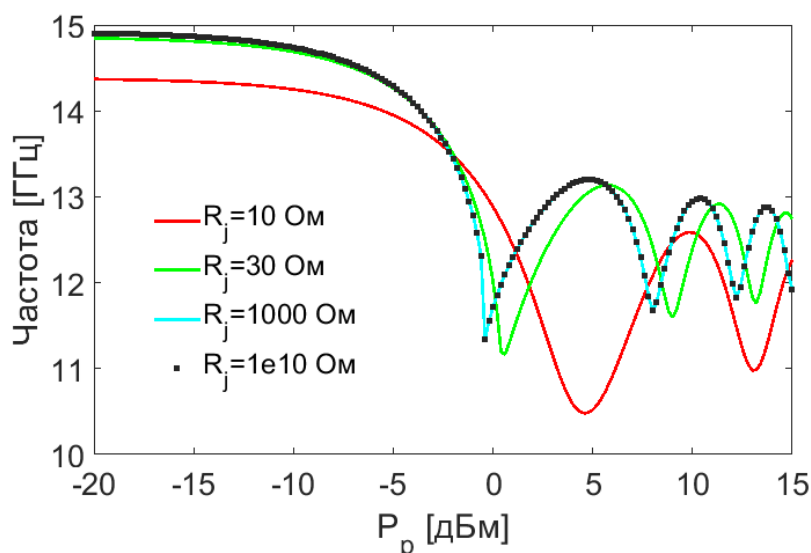


Рис. 5. Резонансная частота ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности тона накачки P_p , приложенного на частоте $f_p = 10$ ГГц, рассчитанная по формуле (21) для различных сопротивлений контакта в нормальном состоянии R_j .

Измеренная зависимость резонансной частоты ВЧ-СКВИДа от мощности накачки хорошо совпадает с рассчитанной зависимостью (Рис. 4б). Эффективная джозефсоновская индуктивность обратно пропорциональна амплитуде джозефсоновской фазы и обратно пропорциональна амплитуде внешнего тона накачки $L_j^{eff} \sim 1 / A_p \sim 1 / A_{pe}$ как следует из формул (6) и (23).

Резонансная частота ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности тона накачки P_p рассчитана для различных сопротивлений контакта в нормальном состоянии (Рис. 5). Уменьшение сопротивления контакта в нормальном состоянии R_j приводит к увеличению коэффициента потерь γ в уравнении (8). В результате резонансная частота ВЧ-СКВИДа f_r уменьшается в соответствии с формулой (21). В предельном случае, если R_j стремится к бесконечности,

то γ в уравнении (8) стремится к нулю. Тогда, формула (21) принимает вид зависимости резонансной частоты LC контура $f_r = 1 / (2\pi\sqrt{L_{tot}C})$. На рисунке 5 видно, что кривые для сопротивлений контакта в нормальном состоянии $R_j = 1e3$ и $R_j = 1e10$ совпадают.

Заключение

Получено аналитическое выражение для эффективной джозефсоновской индуктивности в зависимости от мощности приложенного микроволнового сигнала в двухтоновом режиме под воздействием двух СВЧ тонов: мощного тона накачки и слабого считывающего тона. Рассчитаны зависимости эффективной индуктивности джозефсоновского контакта, общей индуктивности ВЧ-СКВИДа и резонансной частоты ВЧ-СКВИДа в зависимости от мощности СВЧ тона накачки. Резонансная частота ВЧ-СКВИДа измерена как функция мощности СВЧ сигнала накачки в двухтоновом режиме. Аналитические расчеты хорошо согласуются с экспериментальными результатами. Эффективная индуктивность джозефсоновского контакта в ВЧ-СКВИДе является функцией мощности СВЧ сигнала. Осцилляции резонансной частоты ВЧ-СКВИДа от СВЧ мощности являются следствием осцилляций джозефсоновской индуктивности в зависимости от СВЧ мощности. Полученные результаты открывают возможности для проектирования и оптимизации устройств на основе ВЧ-СКВИДов, в частности, сверхпроводящих метаматериалов с управляемыми свойствами и малозумящих параметрических усилителей.

Благодарности: Мы благодарим Ф. Юнга и С. Бутз за помощь при выполнении этой работы.

Финансирование: Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках программы Приоритет-2030 (Стратегический технологический проект НИТУ МИСИС «Квантовый интернет»).

Литература

1. Josephson B. Possible new effects in superconductive tunnelling // *Physics Letters*, vol. 1, no. 7, pp. 251–253, 1962. [https://doi.org/10.1016/0031-9163\(62\)91369-0](https://doi.org/10.1016/0031-9163(62)91369-0)
2. Anderson P.W. and Rowell J.M. Probable observation of the Josephson superconducting tunneling effect // *Phys. Rev. Lett.*, vol. 10, pp. 230–232, Mar 1963. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.10.230>
3. Shapiro S. Josephson currents in superconducting tunneling: The effect of microwaves and other observations // *Phys. Rev. Lett.*, vol. 11, pp. 80–82, Jul 1963. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.11.80>
4. Danchi W.C., Habbal F. and Tinkham M. AC Josephson effect in small-area superconducting tunnel junctions at 604 GHz // *Applied Physics Letters*, vol. 41, pp. 883–885, 11 1982. <https://doi.org/10.1063/1.93685>
5. Tien P.K. and Gordon J.P. Multiphoton process observed in the interaction of microwave fields with the tunneling between superconductor films // *Phys. Rev.*, vol. 129, pp. 647–651, Jan 1963. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.129.647>
6. Wildermuth M., Powalla L., Voss J.N., Schön Y., Schneider A., Fistul M.V., Rotzinger H. and Ustinov A.V. Fluxons in high-impedance long Josephson junctions // *Applied Physics Letters*, vol. 120, no. 11, 2022. <https://doi.org/10.1063/5.0082197>
7. Koval Y., Fistul M.V., and Ustinov A.V. Enhancement of Josephson phase diffusion by microwaves // *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, p. 087004, Aug 2004. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.93.087004>
8. Guozhu S., Yiwen W., Junyu C., Jian C., Zhengming J., Lin K., Weiwei X., Yang Y., Siyuan H. and Peiheng W. Microwave-induced phase escape in a Josephson tunnel junction // *Phys. Rev. B*, vol. 77, p. 104531, Mar 2008. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.77.104531>
9. Hizanidis J., Lazarides N., and Tsironis G.P. Robust chimera states in squid metamaterials with local interactions // *Phys. Rev. E*, vol. 94, p. 032219, Sep 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.94.032219>

10. Jung P., Butz S., Marthaler M., Fistul M.V., Leppöakangas J., Koshelets V.P. and Ustinov A.V. Multistability and switching in a superconducting metamaterial // *Nature Communications*, vol. 5, p. 174507, Apr 2014. <https://doi.org/10.1038/ncomms4730>
11. Zhang D., Trepanier M., Antonsen T., Ott E. and Anlage S.M. Intermodulation in nonlinear squid metamaterials: Experiment and theory // *Phys. Rev. B*, vol. 94, p. 174507, Nov 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.94.174507>
12. Lazarides N. and Tsironis G. Superconducting metamaterials // *Physics Reports*, vol. 752, pp. 1–67, 2018. *Superconducting Metamaterials*. <https://doi.org/10.1016/j.physrep.2018.06.005>
13. Jung P., Ustinov A.V., and Anlage S.M. Progress in superconducting metamaterials // *Superconductor Science and Technology*, vol. 27, p. 073001, may 2014. <https://doi.org/10.1088/0953-2048/27/7/073001>
14. Jung P., Butz S., Shitov S.V. and Ustinov A.V. Low-loss tunable metamaterials using superconducting circuits with Josephson junctions // *Applied Physics Letters*, vol. 102, p. 062601, 02 2013. <https://doi.org/10.1063/1.4792705>
15. Butz S., Jung P., Filippenko L.V., Koshelets V.P., and Ustinov A.V. A one-dimensional tunable magnetic metamaterial: erratum // *Opt. Express*, vol. 22, pp. 13041–13042, Jun 2014. <https://doi.org/10.1364/OE.22.013041>
16. Trepanier M., Zhang D., Mukhanov O. and Anlage S.M. Realization and modeling of metamaterials made of rf superconducting quantum-interference devices // *Phys. Rev. X*, vol. 3, p. 041029, Dec 2013. <https://doi.org/10.1103/PhysRevX.3.041029>
17. Averkin A.S., Zhuravel A.P., Jung P., Maleeva N., Koshelets V.P., Filippenko L.V., Karpov A. and Ustinov A.V. Imaging coherent response of superconducting metasurface // *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 26, no. 3, pp. 1–3, 2016. <https://doi.org/10.1109/TASC.2016.2519509>

18. Trepanier M., Zhang D., Mukhanov O., Koshelets V.P., Jung P., Butz S., Ott E., Antonsen T.M., Ustinov A.V. and Anlage S.M. Coherent oscillations of driven rf squid metamaterials // Phys. Rev. E, vol. 95, p. 050201, May 2017. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.95.050201>
19. Abramovitz M. and Stegun I. Handbook of Mathematical Functions. – United States Department of Commerce, National Bureau of Standards Applied Mathematics Series – 55. – 1972. 1062 p.
20. Kiselev E.I., Averkin A.S., Fistul M.V., Koshelets V.P., and Ustinov A.V. Two-tone spectroscopy of a squid metamaterial in the nonlinear regime // Phys. Rev. Res., vol. 1, p. 033096, Nov 2019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.1.033096>
21. Kadin A.M., Kroemer H. Introduction to superconducting circuits // Physics Today. – 2000. – Т. 53. – №. 5. – С. 184. <https://doi.org/10.1063/1.883103>
22. Tinkham M. Introduction to superconductivity 2d ed. // Mc Graw-Hill international editions, -1996. с. 202. <https://doi.org/10.1063/1.883083>
23. Apostol T. Calculus. – New York: Wiley, second ed., -1967.
24. Yaakobi O., Friedland L., Macklin C., Siddiqi I. Parametric amplification in Josephson junction embedded transmission lines // Physical Review B, Volume 87, Issue 14, 2013, Pages 144301. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.87.144301>
25. Уникальная научная установка «Криоинтеграл» – «Технологический и измерительный комплекс для создания сверхпроводниковых наносистем на основе новых материалов» // ИРЭ им. В.А.Котельникова РАН - [cplire.ru](http://www.cplire.ru) <http://www.cplire.ru/rus/UNU/kriointegral/kriointegral.html>

Для цитирования:

Аверкин А.С., Филиппенко Л.В. Эффективная джозефсоновская индуктивность ВЧ-СКВИДа как функция мощности микроволнового облучения // Журнал Радиоэлектроники. – 2026. – №. 1. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2026.1.9>