

УДК 537.874.2

## СРАВНЕНИЕ ВАРИАНТОВ ИМПЕДАНСНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ПРИ ПАДЕНИИ ПЛОСКОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

И. В. Белькович., М. А. Жексенов, Д. А. Козлов

Московский энергетический институт (Технический университет),  
кафедра Антенных устройств и распространения радиоволн

Получена 4 июля 2011 г.

**Аннотация.** Рассмотрены три варианта импедансных граничных условий (ИГУ) на примере падения плоских электромагнитных волн перпендикулярной и параллельной поляризации на границу раздела воздуха и диэлектрического полупространства. Поверхностный импеданс второй среды в ИГУ берется равным импедансу при падении волны: по нормали к поверхности (ИГУ Леонтовича-Щукина), под углом Брюстера, по касательной к поверхности. Изучены зависимости относительной погрешности модуля и максимальной абсолютной ошибки фазы коэффициента отражения от мнимой части диэлектрической проницаемости.

**Ключевые слова:** плоская электромагнитная волна, параллельная и перпендикулярная поляризации, диэлектрическое полупространство, отражение, импедансные граничные условия.

**Abstract.** Three variants of impedance boundary conditions in case of plane wave incidence on interface between air and dielectric are examined. Parallel and perpendicular polarizations are considered. In given boundary conditions the surface impedance of the second medium is taken equal to impedance in case of: normal incidence (Leontovich-Schukin IBC), incidence at an Brewster angle, grazing incidence. Angular dependences of reflection coefficient magnitude error of all IBCs and dependencies of maximum absolute error of reflection coefficient phazor from imaginary part of complex permittivity are studied.

**Keywords:** plane electromagnetic wave, parallel and perpendicular polarizations, reflection, dielectric halfspace, impedance boundary conditions.

## Введение

Приближенные импедансные граничные условия (ИГУ), предложенные в работах А. Н. Щукина [1] и М. А. Леонтовича [2], стали широко применяться в теоретических исследованиях с появлением сборника [3], в котором была опубликована статья [2] и ряд других работ, использовавших ИГУ. М. А. Леонтовичем [2] были в общем виде сформулированы ИГУ на поверхности тел с комплексными диэлектрической  $\varepsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}] = Z [\mathbf{n}, [\mathbf{n}, \mathbf{H}]], \quad Z = Z_0 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{n}$  – внешняя нормаль к поверхности тела,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  – компоненты электрического и магнитного полей во внешней области,  $Z$  – импеданс среды. В работе [2], где принята гауссова система единиц,  $Z_0=1$ . При использовании международной системы единиц  $Z_0=120 \cdot \pi$  Ом, а  $\varepsilon$  и  $\mu$  – относительные проницаемости среды. Представление (1) основано на допущении, что волна распространяется в среде с потерями по законам геометрической оптики.

Далее в [2] были поставлены два вопроса: «во-первых, дать оценку ошибок, связанных с изображением поля в виде волны, распространяющейся внутрь тела по законам геометрической оптики, и, во-вторых, выяснить, при каких условиях это поле может быть представлено в виде волны такого вида».

Ответ на первый вопрос М. А. Леонтович извлек из работы С. М. Рытова [4]. В [4] с помощью метода малых возмущений было построено разложение электромагнитного поля по малому параметру, в качестве которого была выбрана величина, обратная модулю комплексного показателя преломления среды. Ответ на второй вопрос был сформулирован следующим образом: граничное условие (1) применимо при выполнении следующих требований: «глубина проникновения в тело и длина волны в нем малы по сравнению с длиной волны в окружающем пространстве, по сравнению с расстояниями от источников поля и по сравнению с радиусами кривизны поверхности тела. Изменения  $\varepsilon$  и  $\mu$  тела на длине волны (или на длине, равной глубине проникновения), малы».

Отметим, что из работы С. М. Рытова [4] следуют не только ИГУ (1), но и приближенные граничные условия (ПГУ) с учетом вклада следующего порядка малости.

Дальнейшее развитие ПГУ было связано с ослаблением требований, наложенных в [2], и определением ПГУ из решений более общих модельных задач. В ряде работ (см. [5] и цитированные там работы) было предложено использовать в качестве ИГУ поверхностный импеданс для скользящего падения плоской волны на диэлектрическое полупространство. Поверхностный импеданс, найденный для случая падения плоских волн на кусочно – однородную плоскослоистую среду [6], может рассматриваться как ПГУ для искривленных поверхностей. ИГУ были предложены для сильно неоднородной по нормали к поверхности плазмы в [7,8]. Результаты анализа различных вариантов ПГУ систематизированы в монографиях [9-11], см. также недавние работы [12-14].

Вместе с тем ряд вопросов, связанных с ИГУ, остается до сих пор не изученным. Так, с физической точки зрения часто представляет интерес не поверхностный импеданс, а коэффициент отражения (КО) волны, и оценку применимости ИГУ разумно определять по погрешности расчета КО. В [9] оценена точность ИГУ Леонтовича –Щукина в задаче падения плоской волны на однородное диэлектрическое полупространство. Отмечено, что в случае нормального падения формулы для КО, использующие ИГУ, являются точными для любого значения показателя преломления. Утверждается, что при фиксированном показателе преломления их точность уменьшается и является наихудшей при скользящем падении. В [9] приведен также пример использования граничного условия, в котором импеданс второй среды берется при угле Брюстера.

Цель данной работы – более детально изучить влияние выбора различных ИГУ на величину КО на примере простейшей модельной задачи о падении плоских электромагнитных волн на диэлектрическое полупространство с потерями при не слишком больших значениях модуля диэлектрической

проницаемости. В прикладном плане такая задача возникает при анализе распространения и дифракции электромагнитных волн в естественных условиях (рассеяние волн на земной и морской поверхности, льдах и т.д.) и в искусственных диэлектрических структурах.

### Исходные формулы

Выражения для коэффициентов отражения плоских волн линейной поляризации от диэлектрического полупространства с потерями хорошо известны [6]. Пусть  $\theta$  – отсчитываемый от нормали угол падения плоской волны из среды 1 (свободное пространство) в среду 2 (полупроводящая среда).

В случае перпендикулярной поляризации КО по электрическому полю равен

$$R_{\perp} = \frac{Z_{2\perp} - Z_{1\perp}}{Z_{2\perp} + Z_{1\perp}}, \quad (2)$$

$$Z_{1\perp} = \frac{Z_0}{\cos(\theta)}, \quad Z_{2\perp} = \frac{Z_0}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2(\theta)}}$$

В формуле (2) – величины поверхностного импеданса сред 1 и 2, определенные через отношения тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей, падающих в среде 1 и преломленных в среде 2 волн.

Аналогично, в случае параллельной поляризации КО по магнитному полю имеет вид

$$R_{\parallel} = \frac{Z_{1\parallel} - Z_{2\parallel}}{Z_{1\parallel} + Z_{2\parallel}}, \quad \text{где } Z_{1\parallel} = Z_0 \cos(\theta), \quad Z_{2\parallel} = \frac{Z_0 \sqrt{\varepsilon - \sin^2(\theta)}}{\varepsilon}. \quad (3)$$

### Результаты расчетов

В этой части проведено исследование влияния величин действительной  $\varepsilon'$  и мнимой  $\varepsilon''$  части диэлектрической проницаемости второй среды на модуль и фазу КО. Наряду с точным выражением для КО рассмотрены три приближенных выражения, отличающиеся углом  $\theta'$ , при котором фиксируется поверхностный импеданс второй среды  $Z_{2\perp, \parallel}(\theta')$ :

1. нормальное падение волны ( $\theta' = 0$ ), при этом тангенциальные компоненты полного поля во внешней области связаны с помощью граничного условия Леонтовича –Щукина (1);
2. скользящее падение волны на полупроводящее полупространство ( $\theta' = 90^\circ$ );
3. падение волны под углом полного преломления (углом Брюстера  $\theta' = \theta_B = \arctg(\sqrt{\epsilon})$ ).

Коэффициенты отражения, соответствующие каждому из указанных случаев, будем обозначать  $R_{\perp i}$ ,  $R_{\parallel i}$ ,  $i=1, 2, 3$ .

При использовании ИГУ Леонтовича-Щукина приближенное значение импеданса совпадает для обеих поляризаций падающего поля, т.е.

$Z_{2\perp} = Z_{2\parallel} = \frac{Z_0}{\sqrt{\epsilon}}$ . В двух других случаях приближенные значения импедансов различаются для каждой поляризации, поэтому вторая среда характеризуется диагональным тензором импеданса, и, соответственно, в формуле (1) скалярная функция импеданса должна быть заменена тензором.

Была проведена серия расчетов модулей и фаз КО по строгим и приближенным формулам для следующих значений диэлектрической проницаемости  $\epsilon = 3$ ,  $3 - i0.1$ ,  $3 - i1$ ,  $3 - i3$ ,  $3 - i10$ . Такой выбор обусловлен тем, что они включают типичные для сухого грунта и ряда строительных материалов значения проницаемости в диапазоне метровых - сантиметровых волн. Заметим, что ИГУ для полупространства принято вводить только при наличии потерь в среде, чтобы исключить отражения от объектов, которые могут находиться внутри среды. Тем не менее мы рассмотрим случай среды без потерь, как предельный.

Результаты расчета модулей КО по строгим формулам для двух поляризаций приведены на рис. 1 а) и рис. 2 а) для диэлектрической проницаемости второй среды, равной  $\epsilon = \epsilon' = 3$ . Угол Брюстера для данной среды равен  $60^\circ$ . На рис. 1 б) и рис. 2 б) приведены зависимости

относительной погрешности  $\delta_i$ , КО для трех вариантов ПГУ. Погрешность определяется следующим образом

$$\delta_i = \frac{||R| - |R_i||}{|R|} \cdot 100\% , \quad (4)$$

где  $R = R_{\perp,1}$  - точное выражение для КО при определенной поляризации,  $R_i = R_{\perp,1,i}$  - приближенное выражение для КО той же поляризации,  $i=1, 2, 3$ .

На рис. 1в), 2в) для сравнения приведены относительные погрешности поверхностных импедансов.

Сплошные кривые на рис. 1б), 1в) и 2б), 2в) соответствуют заданию ИГУ при  $\theta' = 0$ , пунктирные – при  $\theta' = 90^\circ$ , штриховые – при  $\theta' = \theta_B$ .

Из зависимостей рис. 1б), 2б) видно, что относительная погрешность всех трех выражений для приближенных КО обеих поляризаций обращается в нуль при угле падения, стремящемся к  $90^\circ$ . В этом пределе проявляется принципиальное отличие от поведения погрешности поверхностного импеданса в вариантах 1 и 3 (рис. 1в), 2в)), которая является достаточно большой. Заметим в этой связи, что Леонтовичем было проведено сравнение приближенного коэффициента отражения Френеля со строгим для параллельной поляризации и сделан вывод, что ошибка приближенного коэффициента отражения, имеет

порядок  $\frac{\sin^2(\theta)}{|\epsilon|}$  [2]. Однако эта оценка несправедлива при скользящих углах падения, когда погрешность приближенного коэффициента отражения

стремится к нулю, как  $\frac{\sin(90^\circ - \theta)}{|\sqrt{\epsilon}|}$ .

Обратимся к сравнительному анализу погрешностей приближенных КО.

При использовании ИГУ Леонтовича-Щукина (вариант 1) КО имеют нулевую погрешность  $\delta_1$  при нормальном падении плоской волны обеих поляризаций. В случае перпендикулярной поляризации относительная погрешность модуля КО в первом варианте ИГУ максимальна при промежуточных углах (в данном случае  $\delta_1 = 10\%$  при угле  $\theta \approx 55^\circ$ ).

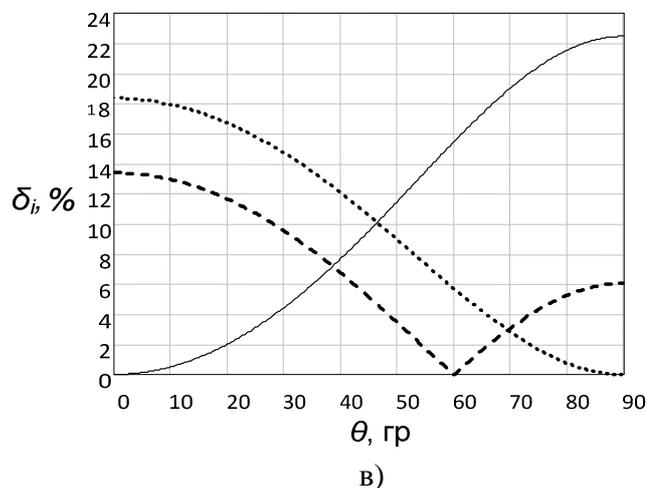
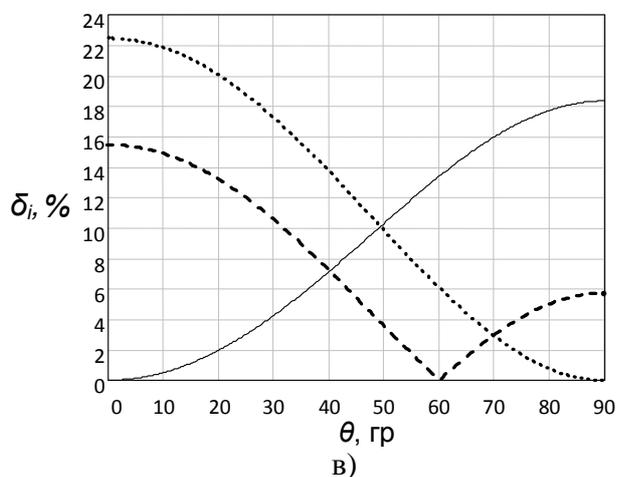
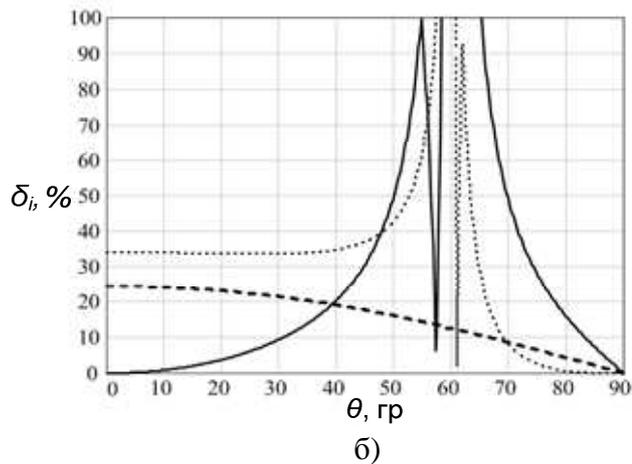
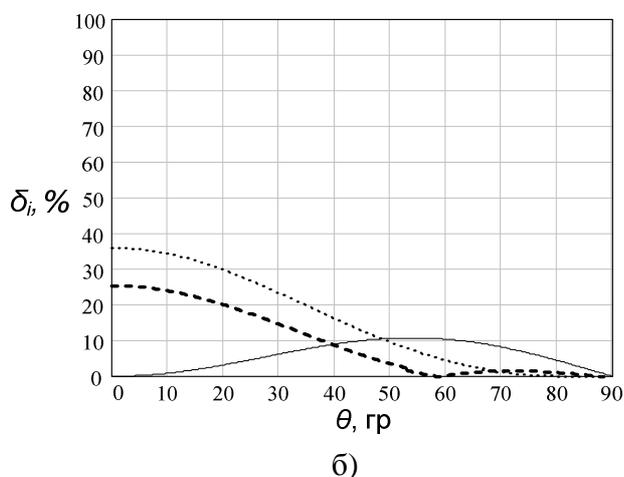
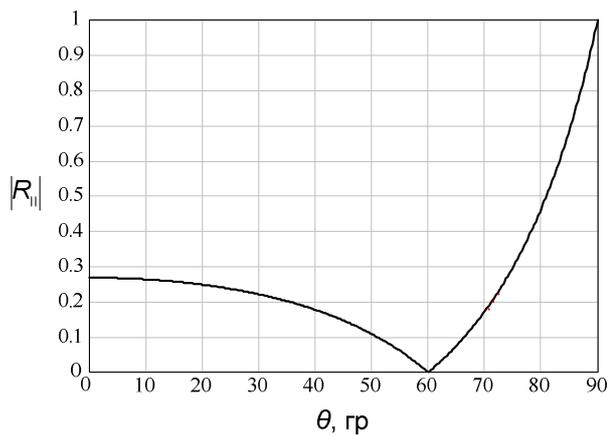
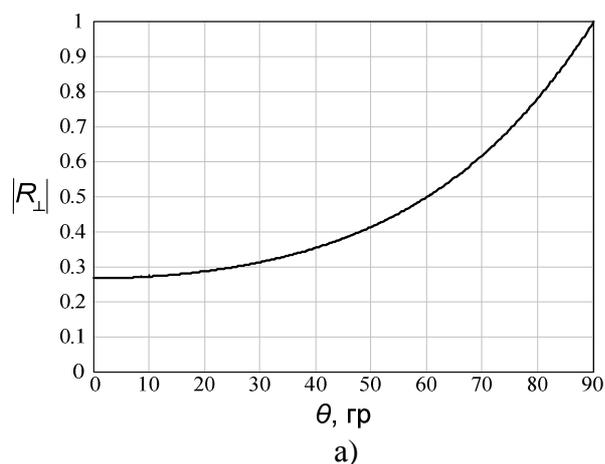


Рис. 1 Зависимости модуля строгого КО а), относительных погрешностей приближенных выражений для КО б), относительных погрешностей поверхностных импедансов в) от угла падения  $\theta$  в случае перпендикулярной поляризации.

Рис. 2 Зависимости модуля строгого КО а), относительных погрешностей его приближенных выражений б), относительных погрешностей поверхностных импедансов в) от угла падения  $\theta$  в случае параллельной поляризации.

Второй вариант ИГУ дает наибольшую относительную погрешность вычисления КО по сравнению с другими вариантами при нормальном падении волны. При скользящем падении, естественно, этот вариант ИГУ дает наилучшие результаты.

При угле Брюстера относительная погрешность КО параллельной поляризации для первого и второго вариантов ИГУ  $\delta_1 = \infty$ , т.к. строгий КО равен нулю. Отметим, что при значениях КО, близких к нулю, информативнее становится абсолютная погрешность  $\Delta$ .

Использование вариантов 1 и 2 ИГУ приводит к тому, что положение угла Брюстера смещается для этих приближений по сравнению с истинным значением угла Брюстера. Соответственно, для углов, в которых приближенные выражения КО  $R_{1i}$ ,  $i = 1, 2$ , равны нулю, относительная погрешность  $\delta_i = 1$ , что непосредственно вытекает из выражения (4). В тех точках, где точное значение КО  $R_1 = 0$ , погрешность  $\delta_i = \infty$ ,  $i = 1, 2$ .

Третий вариант приближенного расчета КО имеет нулевую погрешность  $\delta_3$  при падении волны перпендикулярной поляризации под углом Брюстера. Относительная погрешность КО в этом варианте максимальна при  $\theta = 0^\circ$  и равна  $\delta_{3 \max} = 26\%$ .

Сравним результаты расчета приближенных КО между собой. Для среды без потерь в случае перпендикулярной поляризации метод вычисления модуля КО с использованием ИГУ Леонтовича – Щукина (вариант 1) в диапазонах углов падения волны  $0^\circ \div 48^\circ$  и  $0^\circ \div 39^\circ$  имеет меньшую погрешность, чем второй и третий варианты ИГУ соответственно. Для обеих поляризаций погрешность КО при использовании первого варианта ИГУ меньше погрешностей вариантов 2 и 3 в широком секторе углов, прилегающем к нормальному падению ( $0^\circ - 40^\circ$ ), а погрешность КО при использовании третьего варианта ИГУ меньше погрешностей остальных вариантов в окрестности угла Брюстера ( $40^\circ - 70^\circ$ ). Если учесть, что при скользящих углах падения малую погрешность КО дают второй и третий варианты задания ИГУ, то можно рекомендовать

последний для использования в широком диапазоне углов падения, включающем скользкие углы.

Что касается фаз приближенных выражений для КО, то в случае среды без потерь при перпендикулярной поляризации они полностью совпадают с фазой точного выражения  $\arg(R_{\perp})$  во всем секторе углов падения  $\theta$ . В случае параллельной поляризации только фаза третьего варианта КО  $\arg(R_{\parallel 3})$  совпадает с  $\arg(R_{\parallel})$ , фазы остальных приближенных выражений для КО сдвинуты относительно точного результата или, что тоже самое, сдвинуты величины углов Брюстера  $\theta'_B$ . Для первого и второго вариантов ИГУ они равны  $54,5^\circ$  и  $62^\circ$  соответственно.

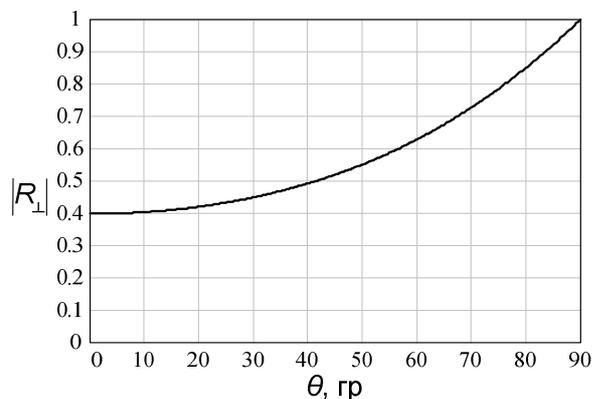
Рассмотрим случай среды с потерями, приняв диэлектрическую проницаемость второй среды равной  $\varepsilon = 3 - i3$ . Обозначения кривых КО на рис. 3 и 4 аналогичны рис. 1 и 2. На рис. 3 а) и 4 а) изображены угловые зависимости КО при наличии потерь во второй среде. Так как  $\varepsilon$  комплексная величина, угол Брюстера уже не является действительным

$\theta_B = (65,22 - 8,89 \cdot i)^\circ$ . Из рис. 3 б) видно, что в случае перпендикулярной поляризации погрешность  $\delta$  расчета КО по первому варианту ИГУ не превышает  $2,5\%$ . Во всем диапазоне углов падения второй вариант вычисления КО дает относительную погрешность  $\delta_2 < 0,4\%$ .

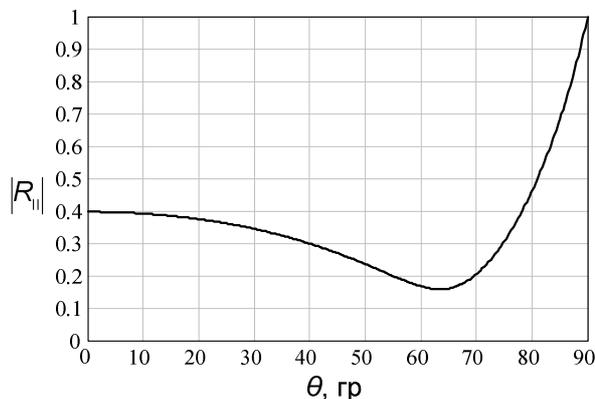
Отметим следующую закономерность. При  $\varepsilon'' = 0$ , как было показано выше, второй вариант вычисления КО имел максимальную по сравнению с другими вариантами погрешность. С увеличением  $\varepsilon''$  погрешность  $\delta_2$  уменьшается быстрее погрешностей других вариантов ИГУ, и уже при  $\varepsilon'' > 1,5$  она минимальна в значительной части диапазона углов.

Рассмотрим случай параллельной поляризации падающего поля. Из рис. 4 б) видно, что первый вариант вычисления КО имеет самую низкую погрешность в диапазоне углов  $0^\circ \div 42^\circ$ . В окрестности минимума КО погрешность достигает значительной величины  $\delta_1 = 31\%$ . Вторым вариантом

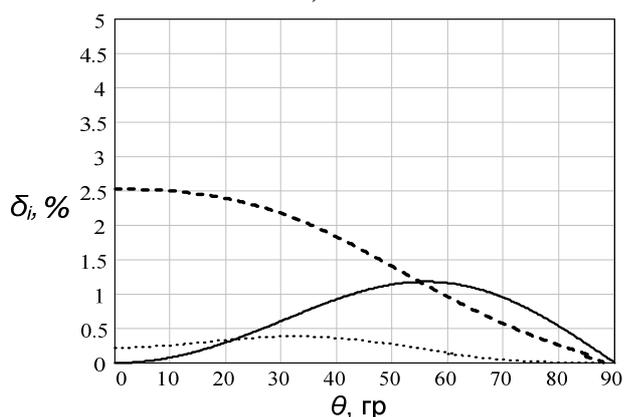
вычисления КО имеет погрешность не более **3%** во всем диапазоне углов, кроме окрестности угла Брюстера, в которой погрешность модуля КО достигает 7,3%. В третьем случае, величина погрешности КО  $\delta_3$  максимальна при угле  $\theta = 0^\circ$  и равна 4%. При увеличении угла  $\theta$  она монотонно спадает до нуля.



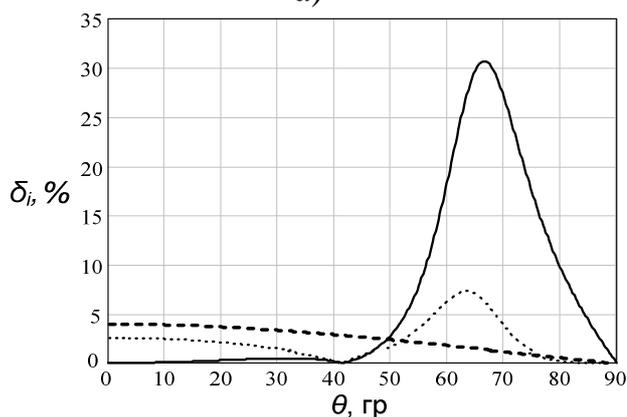
а)



а)



б)



б)

Рис. 3 Зависимости модуля строго КО а) и относительных погрешностей его приближенных выражений б) от угла падения  $\theta$  в случае перпендикулярной поляризации.

Рис. 4 Зависимости модуля строго КО а) и относительных погрешностей его приближенных выражений б) от угла падения  $\theta$  в случае параллельной поляризации.

Зависимости максимальной в диапазоне углов  $0^\circ \div 90^\circ$  абсолютной погрешности фазы КО  $\Delta\varphi_{max}$  от  $\epsilon''$  для различных вариантов ИГУ изображены на рис. 5, 6. В случае перпендикулярной поляризации все зависимости имеют экстремальный характер с максимумом при  $\epsilon'' = 1 \div 2$ , причем величина ошибки не превышает **15°**. Минимальную погрешность дает первый вариант

вычисления КО ( $\Delta\varphi_{max} < 4^\circ$ ), а максимальную - второй. При параллельной поляризации кривые погрешности фазы  $R_{||1}$  и  $R_{||2}$  монотонно спадают от максимального значения  $180^\circ$  до . Наибольшую точность в вычислении фазы дает третий вариант ИГУ.

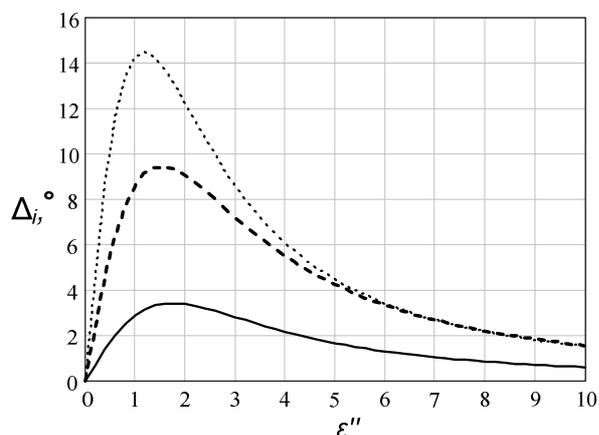


Рис. 5 Зависимость максимальной абсолютной погрешности фазы КО от мнимой части диэлектрической проницаемости  $\epsilon''$  в случае перпендикулярной поляризации.

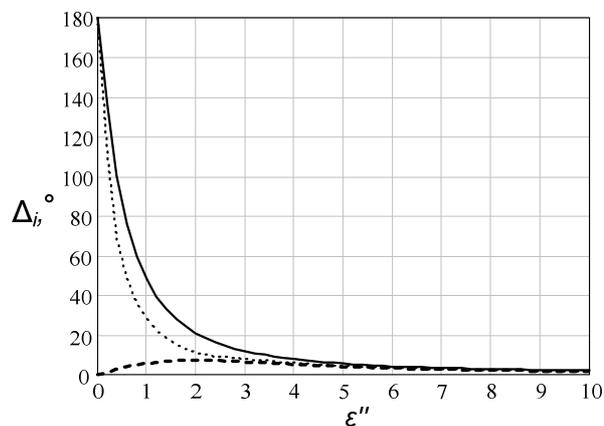


Рис. 6 Зависимость абсолютной погрешности фазы КО от мнимой части диэлектрической проницаемости  $\epsilon''$  в случае параллельной поляризации.

Сравнивая обе поляризации, видим, что третий вариант вычисления КО с помощью приближенных ИГУ является оптимальным при наличии потерь в среде, т.к. для данных параметров среды он обеспечивает погрешность вычисления модуля КО не более 4% во всем диапазоне углов падения волны для обеих поляризаций и минимальную погрешность фазы КО (менее  $10^\circ$ ).

### Заключение

Рассмотрены три варианта приближенных ИГУ и рассчитанных на их основе коэффициентов отражения однородной плоской волны от диэлектрического полупространства. Во всех случаях импеданс второй среды  $Z_{2L,1}(\theta)$  считается не зависящим от угла падения  $\theta$  и берется равным: 1)  $Z_{2L,1}(0)$ , 2)  $Z_{2L,1}(90^\circ)$ , 3)  $Z_{2L,1}(\theta_B)$ . Проведено сравнение приближенных выражений для коэффициентов отражения плоских волн с точными значениями для полупространства при задании действительной части диэлектрической

проницаемости, равной 3, и различных значениях ее мнимой части, что соответствует параметрам, типичным для строительных материалов и сухой почвы. Показано, что для волны перпендикулярной поляризации наименьшую погрешность во всем диапазоне углов падения волны дает вычисление коэффициентов отражения на основе приближенных граничных условий Леонтовича-Щукина. Для волны параллельной поляризации более предпочтительным является задание поверхностного импеданса при угле Брюстера. Последний вариант ИГУ является оптимальным и при наличии потерь во второй среде для обеих поляризаций. Полученные рекомендации могут служить ориентирами при выборе импедансных граничных условий для случаев падения плоских волн на естественные земные поверхности и конструкции из строительных материалов (дерево, бетон, кирпич).

Авторы благодарят профессора Пермякова В.А. за предложенную тему и полезные обсуждения.

### **Литература**

1. Щукин А.Н. Распространение радиоволн. - М.: Связьиздат, 1940,-399 с.
2. Леонтович М.А. О приближенных граничных условиях для электромагнитного поля на поверхности хорошо проводящих тел. // Исследования по распространению радиоволн. Сборник второй. М-Л, изд. АН СССР, 1948,с. 5-12.
3. Исследования по распространению радиоволн. Сборник второй. М-Л, изд. АН СССР, 1948, -216 с.
4. Рытов С.М. Расчет скин-эффекта методом возмущений. //ЖЭТФ, 1940, т.10, вып.2, с. 180-190.
5. Фейнберг Е.Л. Распространение радиоволн вдоль земной поверхности. – М.: Изд. АН СССР, -546 с.
6. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. -М. Наука, 1973, - 343 с.
7. Васильев Е.Н., Орлов Ю.И., Пермяков В.А. Граничные условия на поверхности плазмы с резко меняющимися параметрами. // ЖТФ, 1964, т.34, №.8, с. 1341-1344

8. Гильденбург В.Б., Жидко Ю.М., Кондратьев И.Г., Миллер М.А. Некоторые вопросы дифракции электромагнитных волн на плазменных образованиях. // Известия высших учебных заведений, Радиофизика, 1967, т.10, № 9-10, с. 1358-1375.
9. Senior T.B.A. , Volakis J.L. Approximate boundary conditions in electromagnetics. London, the IEE, 1995, - 351 p.
10. Hoppe D. J., Rahmat-Samii Y.. Impedance boundary conditions in electromagnetics. Taylor and Francis, Boca Raton, 1995, -176 p.
11. Yuferev S.V., Ida N. Surface impedance boundary conditions. A comprehensive approach. CRC Press, 2009, - 410 p.
12. Альшиц В.И., Любимов В.Н. Обобщение приближения Леонтовича для электромагнитных полей на границе диэлектрик – металл. // УФН, т.179, №8, 2009, с.865-871.
13. Гульельми А.В. К 70-летию формулировки граничного условия Леонтовича. // УФН, т.180, №1, 2010, с.105-106.
14. Альшиц В.И., Любимов В.Н. К юбилею плодотворной идеи. // УФН, т.180, №1, 2010, с.106.