

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.7.1>

УДК: 004.021

ОПТИМИЗАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ СОСТАВЛЕНИЯ РАСПИСАНИЯ НАБЛЮДЕНИЙ ЗА КОСМИЧЕСКИМИ АППАРАТАМИ В ОКОЛОЗЕМНОМ ПРОСТРАНСТВЕ НАЗЕМНЫМИ РАДИОТЕХНИЧЕСКИМИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫМИ СРЕДСТВАМИ

В.С. Григорьев^{1,2}, А.В. Ксендзук^{1,3}

¹ ПАО «МАК «Вымпел»

125319, Москва, ул. Героев Панфиловцев, 10, корп.1

² МФТИ (НИУ)

141701, Московская обл., Долгопрудный, Институтский пер., 9

³ РТУ МИРЭА

119454, Москва, Проспект Вернадского, 78

Статья поступила в редакцию 5 мая 2023 г.

Аннотация. В связи со значительным увеличением количества космических аппаратов на низкой орбите существенную важность приобретает задача планирования наблюдений радиотехническими средствами. В статье показано, что данную задачу можно свести к задаче оптимизации времени наблюдения. Предложено 2 метрики оценки качества плана: метрика минимального значения и среднегеометрическая метрика. Предложено 3 оптимизационных алгоритма планирования: максимизации среднего арифметического, минимизации квадратичного отклонения от среднего, максимизации среднегеометрического. Проведено сравнение предложенных алгоритмов и адаптивного алгоритма случайных блужданий. В результате экспериментальных исследований было выяснено, что наилучшим качеством по выбранным метрикам обладает алгоритм максимизации среднегеометрического, однако, время, затрачиваемое на расчет плана более чем в 65 раз больше, чем для остальных алгоритмов.

Ключевые слова: планирование наблюдений, оценка космической обстановки, методы математической оптимизации, оценка параметров сигнала.

Автор для переписки: Григорьев Василий Сергеевич, grigorev.vs@phystech.edu

Введение

В последнее время наблюдается значительное увеличение количества космических аппаратов (КА) связи и дистанционного зондирования, в первую очередь на низкой орбите. При этом существенную важность приобретает задача планирования наблюдений, так как при недостаточно качественном планировании измерения могут дублироваться, быть избыточными, не формировать требуемый объем информации.

Задачу планирования наблюдения сетью радиотехнических комплексов определим как заблаговременное задание во времени пространственно-частотных областей наблюдения средств, а которых будут обнаруживаться сигналы КА и, после обнаружения, будут определяться их параметры.

Для решения задачи планирования необходимо распределить наблюдения между набором пространственно-разнесенных средств с учетом априорной неопределенности относительно механизмов работы КА, влияния внешних факторов (погода, наличие и характеристики источников радиотехнических помех), характерных статистических зон видимости КА в радиотехническом диапазоне, учета фактов и результатов наблюдения одним средством при планировании работы других средств. Учет всех этих факторов должен быть реализован для создания оптимальных планов наблюдения за космическими группировками.

1. Выбор метрики качества сформированного плана

Результатом наблюдения за группировками КА является информация о их траекторных и не траекторных параметрах. Точность оценки параметров зависит от [1]:

- детерминированных факторов, которые могут быть рассчитаны заранее: геометрии наблюдения космического аппарата, характеристик антенной системы радиотехнического комплекса, средних характеристик атмосферы;
- неизвестных факторов, относящихся к функционированию космического аппарата, – направление передачи сигнала, мощность излучения, характеристики антенной системы, времени и длительность излучения сигнала, механизм обмена данными с наземными станциями/потребителями;
- случайных факторов, влияющих как на энергетические характеристики (наличие облачности и осадков, влажность атмосферы), так и на механизм обмена данными спутников с наземными станциями.

Так как цель работы радиотехнической системы – оценка траекторных и не траекторных параметров КА по результатам оценки параметров сигналов, излучаемых этими КА, качество планирования определим исходя из точности оценки сигнальных параметров λ с учетом функции потерь, в качестве которой принято использовать среднеквадратическое отклонение. С учетом наличия неизвестных и случайных факторов задача имеет статистический характер и решается путем минимизации среднего риска [2]:

$$\lambda_{\text{опт}} = \int_A \lambda p(\lambda|u) d\lambda.$$

Для гауссовского распределения математическое ожидание совпадает с модой. Поэтому при достаточном отношении сигнал/шум оценки по максимуму апостериорной вероятности совпадают с оценками по апостериорному среднему. Это позволяет перейти к оценкам по максимуму правдоподобия. Теоретически предельная точность таких оценок определяется с помощью информационной матрицы Фишера. Например, точность измерения фазы сигнала φ , его частоты f и времени задержки τ определяется матрицей [3]:

$$\Phi^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mu(2\pi)^2 T_{\text{СК}}^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu(2\pi)^2 (2F_{\text{СК}})^2} \end{vmatrix},$$

где μ – энергетическое отношение сигнал/шум, $T_{\text{СК}}^2$ – среднеквадратическая длительность сигнала, $F_{\text{СК}}$ – среднеквадратическая ширина спектра сигнала.

Как было сказано выше, качество планирования необходимо определять исходя из достигаемых точностных характеристик оценок параметров сигналов. Однако, непосредственное использование значений Φ^{-1} приведет к громоздким выражениям. По этой причине для планирования целесообразно использовать отношение сигнал/шум для различных аппаратов μ или, в условиях априорной неопределённости (неизвестны мощность сигнала КА, характеристики его антенных систем и механизм обмена данными), время наблюдения за КА.

В результате планирования формируется вектор времен наблюдения за КА T_N , координаты которого T_i определяют отношение сигнал/шум μ_i и точность оценок параметров сигналов КА.

Результирующее качество планирования можно оценить путем использования среднего Колмогорова [4], которое для действительных чисел определяется выражением:

$$M(x_1, \dots, x_n) = \varphi^{(-1)} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x_k) \right),$$

причем при выборе различных φ среднее Колмогорова дает классические средние:

- при $\varphi(x) = x$ – среднее арифметическое;
- при $\varphi(x) = \ln x$ – среднее арифметическое;
- при $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ – среднее гармоническое;
- при $\varphi(x) = x^2$ – среднее квадратическое.

Использование среднего арифметического нецелесообразно, так как одинаковый результат будет получен при $T_i + T_j = C$ для $T_i \gg T_j = C - T_i$ (качество измерений для КА i будет намного выше, чем для КА j) и для

$T_i = T_j = \frac{c}{2}$ (качество измерений будет одинаковым).

В работе предлагается использовать среднее геометрическое:

$$G(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\prod_{i=1}^n x_i)^{(1/n)},$$

которое обладает следующими преимуществами:

- «чувствительность» относительно пропуска спутника, так как нулевое время наблюдения обнуляет эту метрику;
- устойчивость к небольшим вариациям относительно среднего значения, вызванных различным временем видимости КА.

Также в качестве дополнительной метрики можно использовать минимальное время наблюдения КА $\min(T_N)$, которое, при условии сохранения общего времени наблюдения всех КА, и неравенства нулю среднегеометрической метрики показывает минимальное значение отношения сигнал/шум, которое имеет место при данном плане наблюдений. Данная метрика играет роль «порогового устройства», показывая, что сформированный план обеспечивает значение времени наблюдения (отношения сигнал/шум и точности оценки параметров) не меньше заданного.

2. Математическая постановка задачи

Определим переменные:

a_{min}^j – минимально необходимое время наблюдения j -ого спутника. Это входной параметр алгоритма составления расписания;

a_{max}^j – максимально необходимое время наблюдения j -ого спутника. Это входной параметр алгоритма составления расписания;

T^j – время наблюдения j -ого спутника, добавленное в план. Это неизвестная переменная, которая определяется после составления расписания;

τ_i – i -ая длительность интервала коллизии. Этот параметр неизвестен, однако его возможно получить из начальных данных прежде, чем будет составлено расписание. Поиск данного параметра будет описан далее;

t_i^j – длительность наблюдения j-ого спутника в i-ый интервал коллизии.

Это неизвестная переменная, ее поиск и является целью решения оптимизационной задачи;

t_i^{trans} – время на перестройку поста наблюдения в i-ый интервал коллизии.

Это неизвестный параметр;

t_{clear}^j – время, когда наблюдается только j-ый спутник. Этот параметр неизвестен, однако его возможно получить из начальных данных прежде, чем будет составлено расписание. Поиск данного параметра будет описан далее;

N – общее количество спутников. Это входной параметр алгоритма составления расписания;

$F(T^j)$ – выбранная целевая функция.

Запишем систему (1):

$$\begin{cases} a_{min}^j < T^j < a_{max}^j \\ F(T^j) \rightarrow \max \\ \tau_i = \sum_j t_i^j + t_i^{trans}. \\ T^j = \sum_i t_i^j + t_{clear}^j \end{cases}$$

Это общая постановка оптимизационной задачи составления расписания наблюдений за космическими аппаратами в околоземном пространстве наземными радиотехническими измерительными средствами. В данной статье будет рассматриваться частный случай этой задачи: $t_i^{trans} = 0$.

3. Целевые функции

В данной статье будет представлено и проанализировано 3 целевых функции: среднее арифметическое времен наблюдений, квадратичное отклонение времен наблюдений от среднего, среднее геометрическое времен наблюдений. Каждой целевой функции соответствует свой алгоритм планирования.

1) Оптимизация среднего арифметического

Как и следует из названия выбранная целевая функция определяется выражением: $F(T^j) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T^j$. В этом случае решение системы (1) сводится к

решению задачи линейного программирования [5]. Одним из стандартных способов решения такой задачи является симплекс-метод [6].

2) Оптимизация квадратичного отклонения от среднего

Данная целевая функция определяется следующим выражением:

$$F(T^j) = \sum_{j=1}^N (T^j - T_{mean})^2,$$

где $T_{mean} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T_{obs}$, а T_{obs} – время нахождения всех КА в области видимости радиотехнического поста в течение интервала планирования. Минимум данного выражения обеспечивает минимальное отклонение от идеального распределения (наиболее равномерного), которое достигается, когда все КА наблюдаются одинаковое количество времени. Систему (1) с указанным $F(T^j)$ можно привести к следующему виду (2):

$$\begin{cases} 0.5x^T H x + f^T x \rightarrow \min \\ x < u_b \\ l_b < x \\ A_{eq} \cdot x = b_{eq} \end{cases}.$$

То есть к задаче квадратичного программирования с линейными ограничениями [7].

3) Оптимизация среднего геометрического

Данная целевая функция определяется выражением:

$$F(T^j) = \left(\prod_{j=1}^N T^j \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Среднее геометрическое в силу своих свойств достигает максимума, когда распределение T^1, \dots, T^N наиболее равномерно и общее время работы радиотехнического средства максимально. Эту же метрику можно переписать в логарифмическом масштабе, тогда выражение становится линейным:

$$F(T^j) = \sum_{j=1}^N \log(T^j).$$

Поскольку целевой функцией является логарифм, то это задача нелинейного программирования при линейных ограничениях [8]. Логарифм является выпуклой функцией, соответственно можно воспользоваться численными алгоритмами выпуклого анализа, например методом внутренней точки [9,10,11].

4. Алгоритмы составления расписания

1 шаг: на основе орбитальных параметров рассчитываются траектории КА с выбранным дискретом времени (в статье шаг по времени равняется 1).

2 шаг: составление матрицы наблюдений – строке матрицы соответствует номер КА (идентификатор КА), столбцу матрицы соответствует дискрет времени. Матрица заполняется следующим образом: если в данный момент времени КА с определенным номером находится в зоне видимости радиотехнического поста, то в соответствующее место в матрице ставится 1, иначе – 0.

3 шаг: поиск неизвестных параметров t_{clear}^j и τ_i . Из траекторий спутников и координат радиотехнического поста можно определить интервалы времени, в которые спутники будут попадать в область видимости радиотехнического поста. Чтобы найти отрезки коллизий достаточно найти пересечения уже известных интервалов.

4 шаг: на данном шаге производится решение задачи оптимизации. Задача оптимизации и соответственно способ решения зависит от целевой функции:

а) Алгоритм максимизации среднего арифметического. Решение данной системы было проведено в среде MATLAB с помощью библиотеки Optimization Toolbox (Linear Programming and Mixed-Integer Linear Programming), функцией `linprog` и соответствующего метода оптимизации [12].

б) Алгоритм минимизации квадратичного отклонения. Решение данной системы было проведено в среде MATLAB с помощью библиотеки Optimization Toolbox (Quadratic Programming and Cone Programming), функцией `quadprog` и метода внутренней точки [13,14].

в) Алгоритм максимизации среднего геометрического. Решение данной системы было проведено в среде MATLAB с помощью библиотеки Optimization Toolbox (Nonlinear Optimization, Solver-Based Nonlinear Optimization), функцией `fmincon`.

5. Результаты экспериментальных исследований

Для анализа и сравнения алгоритма было составлено 363 суточных планов с января 2021 года по декабрь 2022 года для группировки спутников связи «Iridium» (100 КА). Координаты наблюдательного поста задавались как 55.88° с. ш. и 37.43° в. д. Ограничения для наблюдателя по азимуту [$100^\circ, 340^\circ$], по возвышению [$10^\circ, 90^\circ$]. Для формирования траекторий КА использовались орбитальные данные из открытых источников (TLE), которые потом пересчитывались с помощью алгоритма SGP4[15,16].

На рисунках 1, 2, 3 представлено распределение усредненной по 363 планам длительности наблюдений при формировании расписания по описанным критериям.

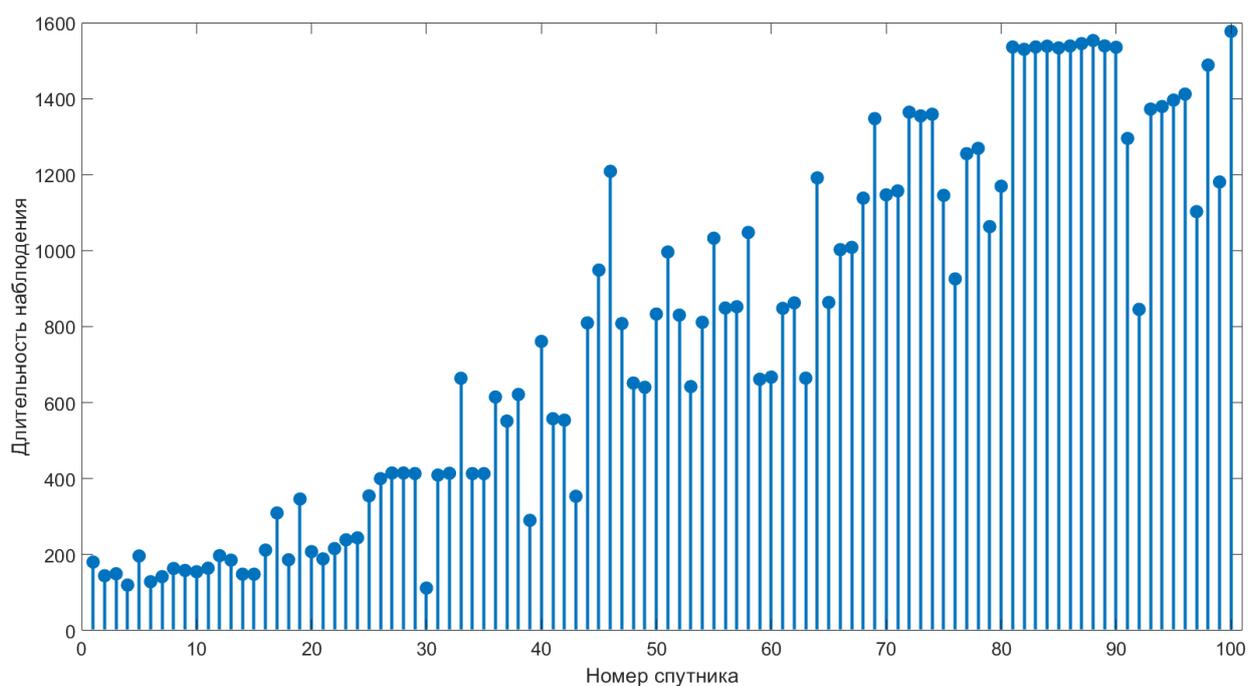


Рис. 1. Распределение среднего времени наблюдения в сутки для спутников связи «Iridium». Усреднение проводилось по 363 планам. Планирование осуществлялось алгоритмом максимизации среднего арифметического

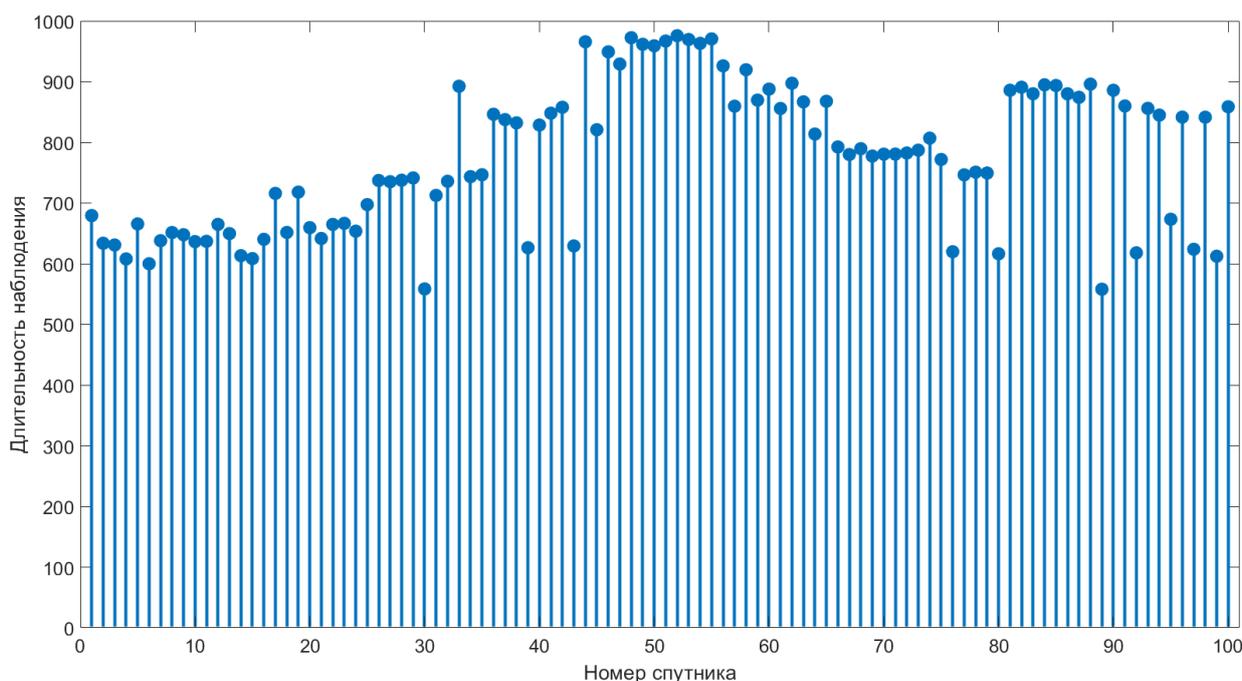


Рис. 2. Распределение среднего времени наблюдения в сутки для спутников связи «Iridium». Усреднение проводилось по 363 планам. Планирование осуществлялось алгоритмом минимизации квадратичного отклонения от среднего

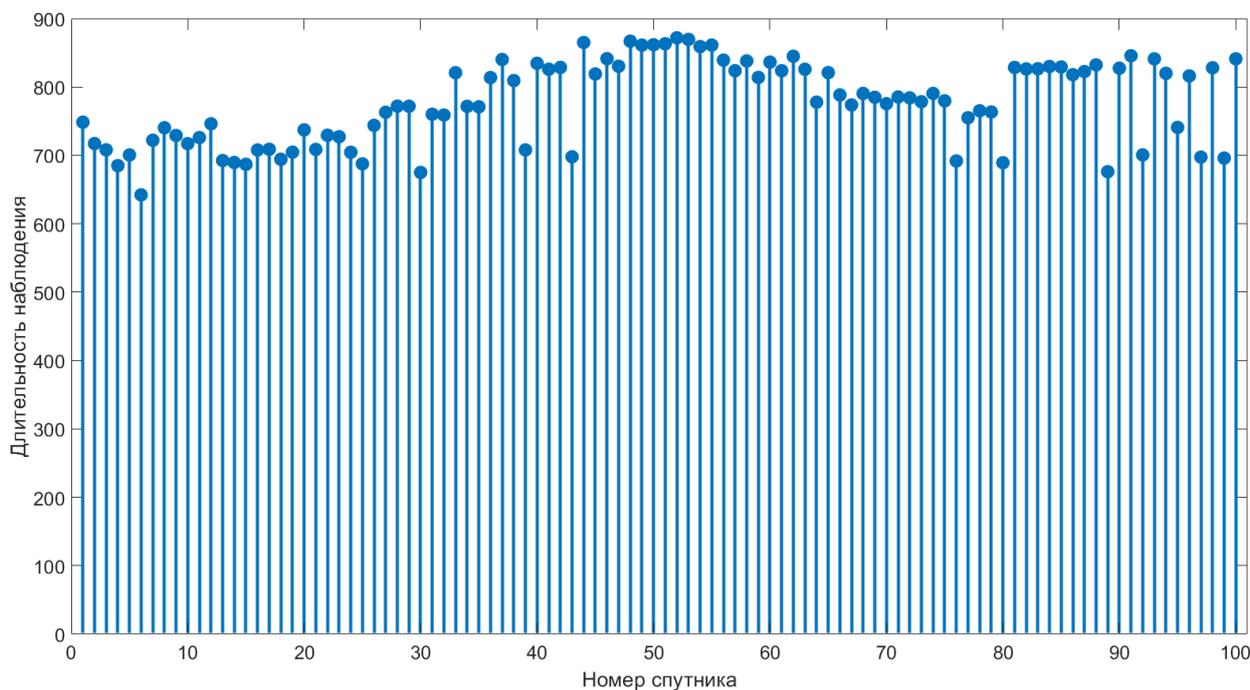


Рис. 3. Распределение среднего времени наблюдения в сутки для спутников связи «Iridium». Усреднение проводилось по 363 планам. Планирование осуществлялось алгоритмом максимизации среднего геометрического

На рисунках 4, 5 представлены средние значения и отклонения по метрике минимального значения и среднегеометрической метрике для алгоритмов: максимизации среднего арифметического (Линейный), минимизации квадратичного отклонения (Квадратичный), максимизации среднего геометрического (Нелинейный), адаптивный случайных блужданий (Адаптивный) [17].

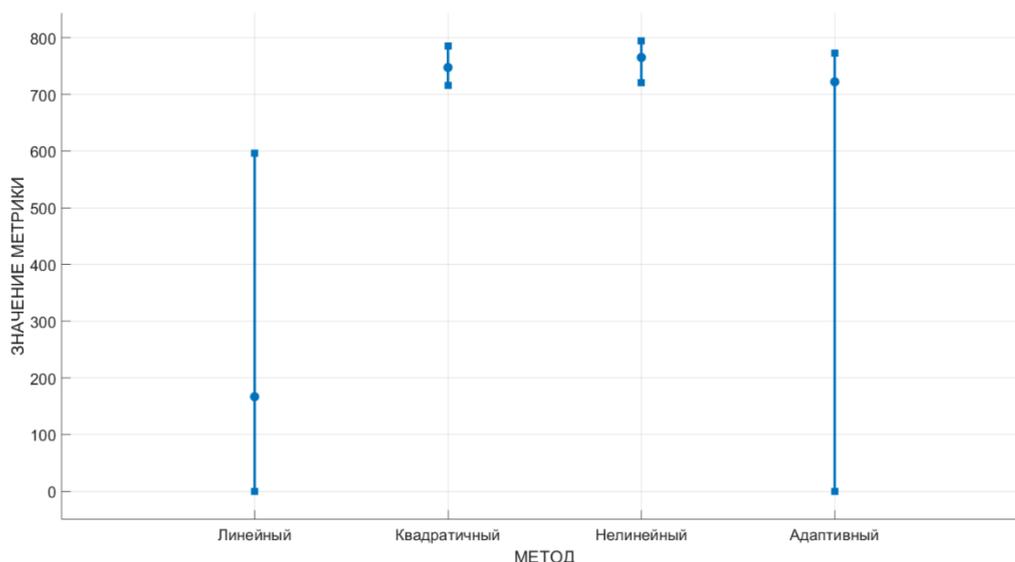


Рис. 4. График минимального, среднего и максимального значений метрики среднего геометрического для 363 составленных планов для рассматриваемых алгоритмов

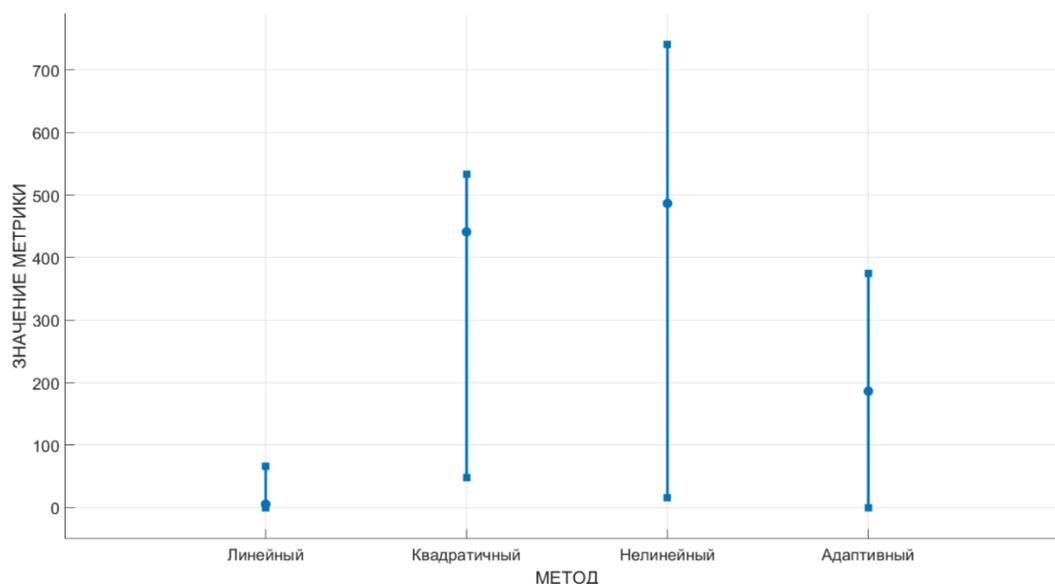


Рис. 5. График минимального, среднего и максимального значений метрики минимального значения для рассматриваемых алгоритмов

На рисунках 6 и 7 изображены зависимости значений средней геометрической метрики и метрики минимального значения от номера суточного плана.

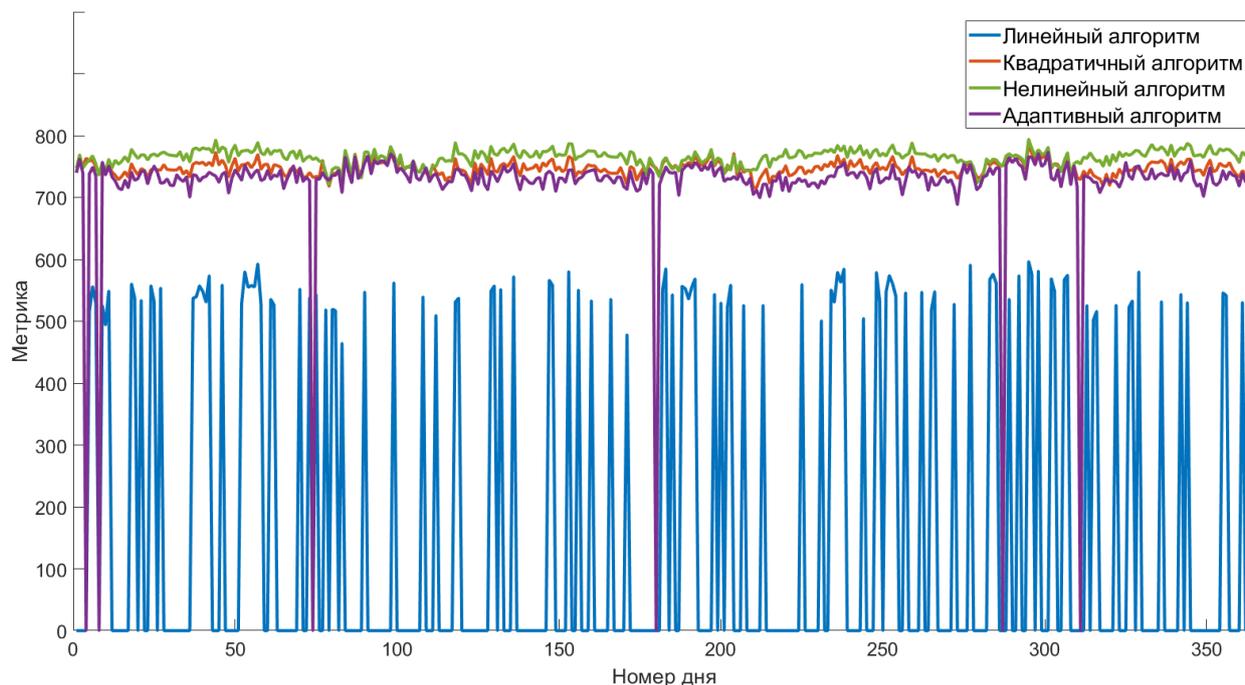


Рис. 6. График зависимости значения средней геометрической метрики от дня, на который составлялся план для рассматриваемых алгоритмов

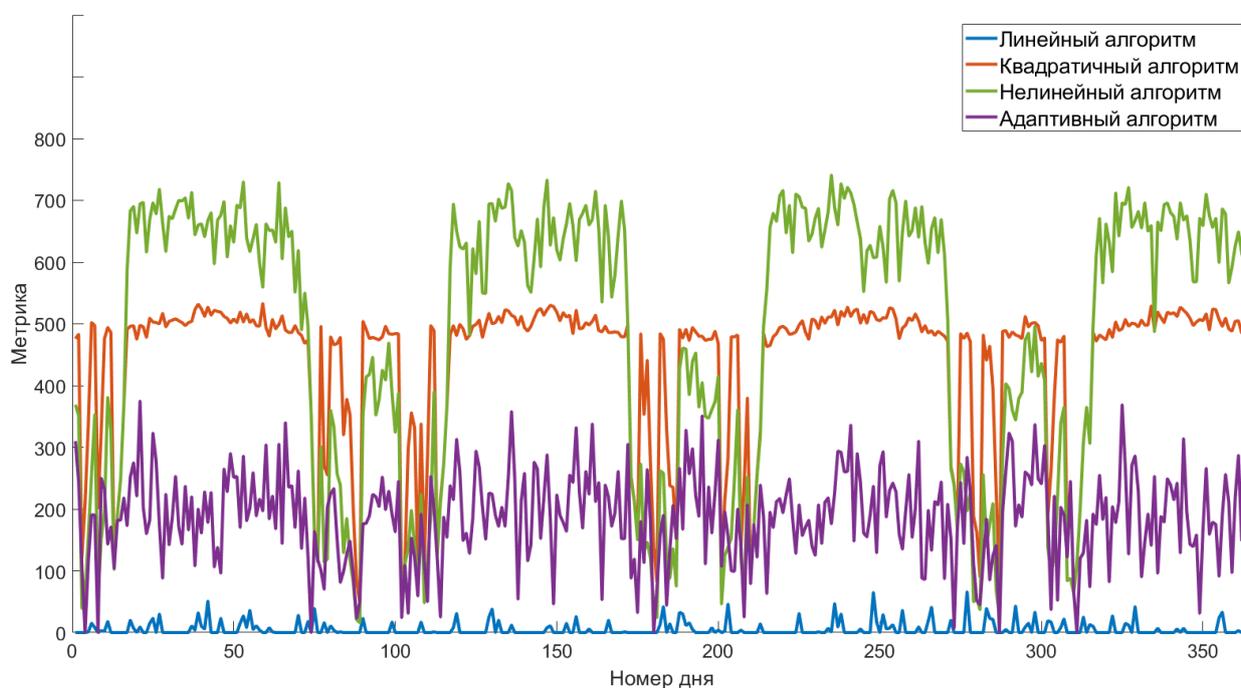


Рис. 7. График зависимости метрики минимального значения от дня, на который составлялся план для рассматриваемых алгоритмов

На рисунке 8 представлена диаграмма времени, затрачиваемого на формирование плана выбранными алгоритмами.

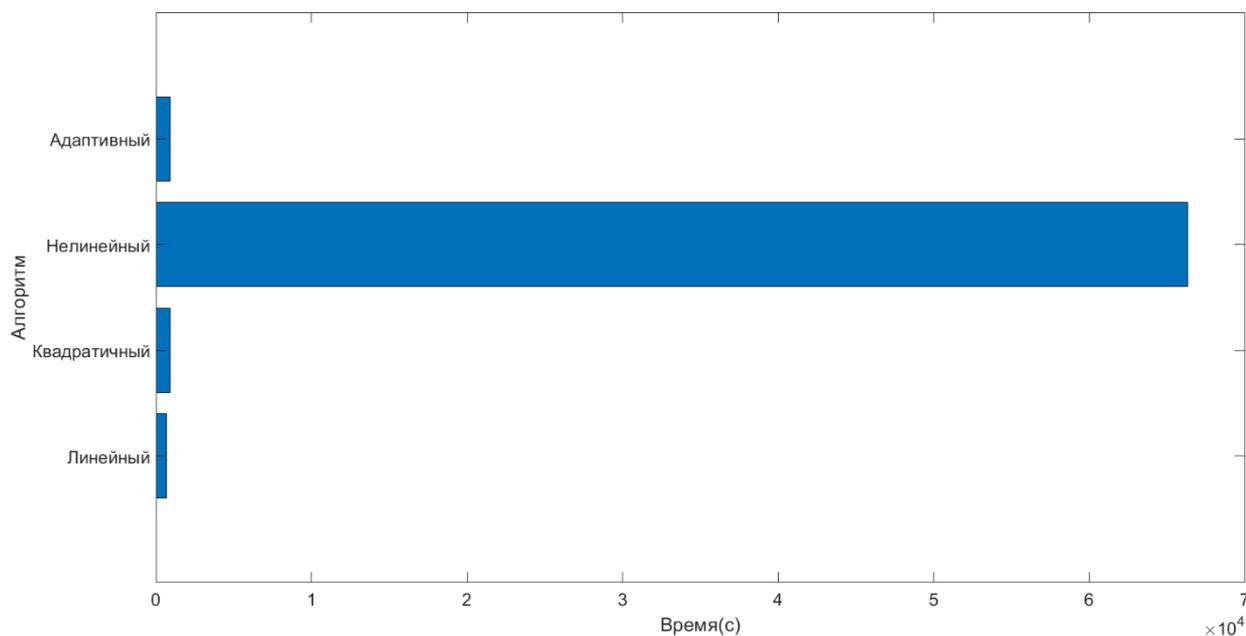


Рис. 8. Диаграмма затрачиваемого вычислительного времени при составлении 363 планов для рассматриваемых алгоритмов

6. Анализ экспериментальных исследований

Из рисунка 1 видно, что алгоритм максимизации среднего арифметического (как и следует из анализа) обеспечивает наименее равномерное распределение: минимальное среднее время наблюдения спутника (номер 30, IRIDIUM 105) равняется 112 с, а максимальное среднее время наблюдения спутника 1577 с (номер 100, IRIDIUM 167). Согласно рисунку 2 алгоритм минимизации квадратичного отклонения обеспечивает минимальное среднее время наблюдения спутника (номер 89, IRIDIUM 164) равное 558 с и максимальное среднее время наблюдения спутника (номер 52, IRIDIUM 132) равное 976 с. Согласно рисунку 3 алгоритм максимизации среднего геометрического обеспечивает минимальное среднее время наблюдения спутника (номер 6, IRIDIUM 921) равное 642 с и максимальное среднее время наблюдения спутника (номер 52, IRIDIUM 132) равное 872 с.

На рисунке 4 для алгоритмов максимизации среднего арифметического, минимизации квадратичного отклонения от среднего, максимизации среднего

геометрического и адаптивного алгоритма случайных блужданий отображены следующие значения: минимальное, среднее арифметическое и максимальное значение метрики среднего геометрического для каждого из алгоритмов. Данные значения рассчитаны для 363 дней (см. табл. 1).

Таблица 1. Значения среднегеометрической метрики

Алгоритм	Минимальное значение	Среднее арифметическое значение	Максимальное значение
Линейный	0	167	596
Квадратичный	716	747	786
Нелинейный	720	765	794
Адаптивный	0	722	773

На рисунке 5 для алгоритмов максимизации среднего арифметического, минимизации квадратичного отклонения от среднего, максимизации среднего геометрического и адаптивного алгоритма случайных блужданий отображены следующие значения: минимальное, среднее арифметическое и максимальное значение метрики минимального значения для каждого из алгоритмов. Значения рассчитаны для 363 дней (см. табл. 2).

Таблица 2. Значения метрики минимального значения

Алгоритм	Минимальное значение	Среднее арифметическое значение	Максимальное значение
Линейный	0	5	66
Квадратичный	48	441	533
Нелинейный	16	487	741
Адаптивный	0	186	375

На рисунке 6 изображена зависимость средней геометрической метрики алгоритмов максимизации среднего арифметического, минимизации квадратичного отклонения от среднего, максимизации среднего

геометрического и адаптивного алгоритма случайных блужданий от номера дня. Из графика можно сделать вывод, что при планировании алгоритмом среднего арифметического для 252 дней метрика нулевая, то есть минимум один спутник в этот день не наблюдался. Для адаптивного алгоритма случайных блужданий этот параметр значительно ниже: только для 6 дней, в которые хотя бы один спутник не наблюдался. Для алгоритмов максимизации среднего геометрического и минимизации квадратичного отклонения от среднего такие ситуации отсутствуют. Однако кривая алгоритма максимизации среднего геометрического лежит выше, чем для алгоритма минимизации квадратичного отклонения, максимальное различие по метрике для этих двух алгоритмов равняется 33 (наблюдается в 171 день).

На рисунке 7 изображена зависимость метрики минимального значения алгоритмов максимизации среднего арифметического, минимизации квадратичного отклонения от среднего, максимизации среднего геометрического и адаптивного алгоритма случайных блужданий от номера дня. Алгоритм максимизации среднего арифметического обладает наихудшим качеством, поскольку соответствующий ему график находится ниже всех. При сравнении остальных трех алгоритмов интервалы времени можно разбить на 2 группы. К первой группе относятся интервалы: [16, 74], [116, 173], [213, 272], [316, 363]. В этих интервалах можно явно выделить, что алгоритм максимизации среднего геометрического обладает наилучшим качеством, далее идет алгоритм минимизации квадратичного отклонения и за ним адаптивный метод случайных блужданий. В оставшихся интервалах наблюдается сильная флуктуация метрик качества.

На диаграмме 8 представлена зависимость времени, затрачиваемого на вычисление от алгоритма при составлении 363 планов. Для алгоритма случайных блужданий время вычислений составляет 894 с, максимизации среднего геометрического 66284 с, минимизации квадратичного отклонения 906, максимизации среднего арифметического 682 с. Вычисления проводились на 12-

ядерным процессоре CPU AMD Ryzen 5 5500U, с общим объемом оперативной памяти 16 Гб при средней загрузке порядка 91%.

Алгоритм среднего арифметического занимает меньше всего вычислительного времени, однако данный критерий не удовлетворяют условию равномерности: при оптимальном решении существуют спутники, за которыми не проводилось наблюдение. Это связано с тем, что критерий среднего арифметического не накладывает штраф за не наблюдение спутников по отдельности, а важно лишь общее время наблюдения:

$$\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T^j \rightarrow \max \Leftrightarrow \frac{1}{N} T^{sum} \rightarrow \max .$$

Так, например, если в расписание добавить геостационарный спутник, который все время находится в зоне наблюдения средства и множество низкоорбитальных спутников, то критерий обеспечит одинаковое значение качества плана для наблюдения только геостационарных спутников или множества низкоорбитальных спутников. В связи с этим критерий среднего арифметического нецелесообразно использовать.

Алгоритм минимизации квадратичного отклонения от среднего удовлетворяет условию равномерности, то есть каждый КА наблюдается ненулевое количество времени. Кроме того, данный алгоритм занимает время незначительно большее, чем алгоритм максимизации среднего арифметического и формирует расписания лучше, чем адаптивный алгоритм случайных блужданий по обоим метрикам и незначительно уступает по качеству алгоритму максимизации среднего геометрического (не для всех дней, в некоторые обеспечивает лучшее расписание). К тому же данный алгоритм наиболее устойчив ко входным данным по метрике минимального значения, то есть обладает максимальным минимальным значением.

Алгоритм максимизации среднего геометрического является лучшим с точки зрения метрики среднего геометрического и, за исключением некоторых дней, с точки зрения минимального значения. Основным недостатком данного метода является значительное количество времени, затрачиваемого на составление расписания, по сравнению с остальными алгоритмами.

Заключение

В статье показано, что задачу поиска оптимальной оценки сигнальных параметров можно свести к задаче оптимизации времен наблюдения за космическими аппаратами. Выбраны и обоснованы 2 метрики оценки качества сформированного плана наблюдений: среднегеометрическая метрика и метрика минимального значения. Сформулирована математическая постановка задачи.

Предложено 3 алгоритма формирования плана наблюдений: алгоритм максимизации среднего арифметического времен наблюдений, алгоритм минимизации среднеквадратичного отклонения от среднего времени наблюдения, алгоритм максимизации среднего геометрического времен наблюдений.

Проведены экспериментальные исследования и сравнение качества приведенных алгоритмов и алгоритма случайных блужданий [17]. Было составлено 363 суточных плана и рассчитаны метрики качества для каждого из алгоритмов. В качестве исследуемой группировки было выбрано 100 КА системы спутниковой связи «Iridium». Считалось, что перенацеливание на КА происходит мгновенно, что соответствует использованию фазированных антенных решеток. Для формирования траекторий КА использовались орбитальные данные из открытых источников (TLE).

Из анализа результатов экспериментальных условий следует, что наибольшее качество по среднегеометрической метрике обеспечивает алгоритм максимизации среднего геометрического времен наблюдений. Для 363 планов наименьшее значение метрики – 720, среднее значение метрики – 765, максимальное значение метрики – 794. Для метрики минимального значения обладает наилучшими результатами среди сравниваемых алгоритмов по среднему арифметическому значению метрики – 487 с и максимальному значению метрики – 741 с. Однако, формирование плана данным методом занимает наибольшее время: формирование 363 планов заняло более чем в 65 раз больше времени, чем для остальных алгоритмов.

Предложенные алгоритмы строились для одного измерительного радиотехнического средства, способного одновременно обрабатывать информацию только от одного КА, и позволяющего осуществлять мгновенное переключение между КА. В дальнейших работах предполагается строить алгоритмы для сети территориально разнесенных измерительных средств. Также планируется формировать алгоритмы для средств, обладающих конечной скоростью переключения, для которых придется учитывать изменяющееся во времени угловое расстояние между космическими аппаратами.

Литература

1. Шилин В.Д., Олейников И.И. Область контроля – околоземное пространство: Проблемы и перспективы развития системы контроля космического пространства. *Воздушно-космическая оборона*. 2010. №1. С.46-53.
2. Волосюк В.К. *Статистическая теория радиотехнических систем дистанционного зондирования и радиолокации*. Москва, Физматлит. 2008. 703 с.
3. Фалькович С.Е., Хомяков Э.Н. *Статистическая теория измерительных радиосистем*. Москва, Радио и связь. 1981. 288 с.
4. Колмогоров А.Н. *Избранные труды. Математика и механика*. Москва, Наука. 1985. 470 с.
5. Канторович Л.В. *Математические методы организации планирования производства*. Ленинград, Издание ЛГУ. 1939. 68 с.
6. Гасс С. *Линейное программирование (методы и приложения)*. Москва, Физматлит. 1961. 304 с.
7. Кюнц Г.П., Крелле В. *Нелинейное программирование*. Москва, Советское радио. 1965. 304 с.
8. Хедли Дж. *Нелинейное и динамическое программирование*. Москва, Мир. 1967. 506 с.

9. Byrd R.H., Gilbert J.C., Nocedal J. A trust region method based on interior point techniques for nonlinear programming. *Mathematical Programming*. 2000. V.89. №1. P.149-185. <https://doi.org/10.1007/PL00011391>
10. Waltz R.A., Morales J.L., Nocedal J., Orban D. An interior algorithm for nonlinear optimization that combines line search and trust region steps. *Mathematical Programming*. 2006. V.107. №3. P.391-408. <https://doi.org/10.1007/s10107-004-0560-5>
11. Byrd R.H., Hribar M.E., Nocedal J. An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming. *SIAM Journal on Optimization*. 1999. V.9. №4. P.877-900. <https://doi.org/10.1137/S105262349732510>
12. Dantzig G.B., Orden A., Wolfe P. Generalized simplex method for minimizing a linear form under linear inequality restraints. *Pacific Journal Math*. 1955. V.5. P.183-195. <https://doi.org/10.2140/pjm.1955.5.183>
13. Дикин И.И. Итеративное решение задач линейного и квадратичного программирования. *Докл. АН СССР*. 1967. Т.174. №4. С.747-748.
14. Boyd S., Boyd S.P., Vandenberghe L. *Convex optimization*. Cambridge university press. 2004. 730 p.
15. Vallado D., Crawford P. SGP4 orbit determination. *AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference and Exhibit*. 2008. P.6770. <https://doi.org/10.2514/6.2008-6770>
16. Boyce W.H. Examination of NORAD TLE accuracy using the iridium constellation. *Spaceflight mechanics*. 2004. V.119. P.2133-2142.
17. Григорьев В.С., Ксендзук А.В. Планирование наблюдений за космическими аппаратами. адаптивный метод случайных блужданий. *VI Международная научно-практическая конференция «Радиоинфоком-2022»*. 2022. С.67-71.

Для цитирования:

Григорьев В.С., Ксендзук А.В. Оптимизационные методы составления расписания наблюдений за космическими аппаратами в околоземном пространстве наземными радиотехническими измерительными средствами. *Журнал Радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.7.1>