

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.7.6>

УДК: 681.883.45

## ПОМЕХОУСТОЙЧИВОСТЬ КОГЕРЕНТНОГО ПРИЕМА СИГНАЛОВ С МНОГОПОЗИЦИОННОЙ ФАЗОВОЙ МАНИПУЛЯЦИЕЙ И СИНУСОИДАЛЬНОЙ ОГИБАЮЩЕЙ В ГИДРОАКУСТИЧЕСКОМ КАНАЛЕ СВЯЗИ

В.Е. Денисов

РТУ МИРЭА, 119454, Москва, пр. Вернадского, 78

Статья поступила в редакцию 6 апреля 2023 г.

**Аннотация. Цели:** Основной целью данной работы является разработка методики определения параметров сигналов с многопозиционной фазовой манипуляцией (М-ФМ), при которых сигналы становятся относительно инвариантными к частотным искажениям в морской среде. Частотные искажения сигналов обусловлены неравномерностью частотной характеристики затухания морской среды. Главной частью указанной методики является оценка влияния частотных искажений сигналов на помехоустойчивость приема. Для этого определяется вероятность ошибки приемника сигналов М-ФМ, который оптимален при отсутствии искажений. **Методы:** Используются положения прикладной гидроакустики, теории случайных процессов и теории передачи дискретных сообщений. **Основное содержание:** В работе рассматривалась модель однолучевого гидроакустического канала связи, характерная для глубокого моря, когда приемник или передатчик расположен в глубине моря. В качестве коэффициента передачи канала используется коэффициент передачи с гауссовской амплитудно-частотной характеристикой и линейной фазо-частотной характеристикой. Определена аддитивная граница вероятности ошибки при когерентном приеме сигналов М-ФМ с синусоидальной огибающей.

В качестве приемника рассматривается когерентный приемник, оптимальный по критерию максимального правдоподобия при действии белого гауссовского шума и отсутствии искажений в морской среде. Введена логарифмическая мера увеличения вероятности ошибки, которая характеризует ухудшение помехоустойчивости за счет частотных искажений в канале. Для некоторых типичных случаев определены значения параметров сигналов, относительно инвариантных к частотным искажениям в морской среде. **Результаты:** Найдены выражения для верхней границы вероятности ошибки когерентных приемников сигналов М-ФМ с синусоидальной огибающей для  $M = 2, 4, 8, 16, 32$ . Введена логарифмическая мера относительного увеличения вероятности ошибки по сравнению со случаем отсутствия искажений. Определена функциональная зависимость этой меры от длительности посылки сигнала, несущей частоты и числа фаз сигнала, а также от дальности связи и отношения сигнал/шум. На плоскости несущая частота, длительность посылки сигнала для каждого вида сигнала построена граница области, выше которой сигналы являются относительно инвариантными к частотным искажениям в морской среде. Проведено сравнение со случаем приема сигналов М-ФМ с прямоугольной огибающей. Показано, что инвариантные сигналы с синусоидальной огибающей имеют меньшую длительность, чем сигналы с прямоугольной огибающей. Кроме того, длительность сигналов с синусоидальной огибающей значительно меньше зависит от числа фаз сигнала.

**Ключевые слова:** гидроакустический канал связи, коэффициент затухания, помехоустойчивость, вероятность ошибки, дальность связи, длительность посылки сигнала, несущая частота, фаза, аддитивная граница, синусоидальная огибающая.

**Автор для переписки:** Денисов Валерий Евгеньевич, [dvemirea@mail.ru](mailto:dvemirea@mail.ru)

## Введение

Цифровые гидроакустические системы связи в настоящее время широко применяются на практике. Многие вопросы проектирования таких систем решаются эвристически на основе имеющегося опыта и путем моделирования на ЭВМ. Однако всегда интересно получить аналитическое решение поставленной задачи, хотя бы и на основе известных приближений. К таким задачам в случае гидроакустических систем связи относится проблема выбора сигналов с различными видами манипуляции, относительно инвариантных к неравномерности частотной характеристики затухания морской среды. Решение этой задачи позволит получить теоретическую базу для корректного выбора параметров сигналов с различными видами модуляции. Для решения данной задачи необходимо проанализировать влияние неравномерности частотной характеристики морской среды на помехоустойчивость приемника, оптимального при отсутствии искажений. В работе [1] решалась подобная задача на примере когерентного приемника двоичных сигналов с амплитудной (АМ), частотной (ЧМ) и фазовой (ФМ) манипуляцией и синусоидальной огибающей. Исследовался когерентный приемник, оптимальный по критерию максимального правдоподобия при действии белого гауссовского шума и отсутствии искажений в морской среде. В данной работе в развитие работы [1] определяется верхняя (аддитивная) граница вероятности ошибки при когерентном приеме сигналов М-ФМ с синусоидальной огибающей. Анализируется приемник, опорные сигналы которого совпадают по форме с неискаженными сигналами, но уменьшены в соответствии с коэффициентом затухания на несущей частоте. В качестве модели гидроакустического канала связи (ГАКС) рассматривается однолучевой канал, характеризуемый только частотно зависимым коэффициентом затухания. Данной моделью можно описать вертикальные и близкие к ним каналы [2].

## 1. Коэффициент передачи и импульсная характеристика гидроакустического канала связи

В качестве гидроакустического канала связи (ГАКС) рассматривается совокупность передающей антенны, морской среды и приемной антенны.

Антенны считаются ненаправленными и частотно независимыми. Данные ограничения введены для того, чтобы исследовать собственно морскую среду как канал передачи информации. Используется модель морской среды в виде однородной изотропной среды. В этом случае свойства ГАКС можно описать единственной величиной – коэффициентом затухания  $\alpha(f)$ . Используя аппроксимацию  $\alpha(f)$  функцией  $\alpha(f) = B_K + D_K f^2$ , где  $f$  – частота в килогерцах из работы [3], можно представить комплексный коэффициент передачи ГАКС  $H(j\omega)$  в форме, удобной для аналитических исследований

$$H(j\omega) = H(0) \exp(-a\omega^2 - j\omega t_3). \quad (1)$$

где  $\omega$  – угловая частота, рад/с,

$$H(0) = (R_0 / R) \exp(-0,115 B_K R), \quad a = 0,115 (2\pi)^{-2} 10^{-6} D_K R, \quad (2)$$

$t_3 = R / C$ ,  $R$  – расстояние между передатчиком и приемником, км,  $R_0$  – опорное расстояние (обычно  $R_0 = 1$  м),  $C$  – скорость звука в морской среде, равная 1,5 км/с.

Для аппроксимации 1:  $B_1 = 0$ ;  $D_1 = 0,036 / \sqrt{f_0}$ ; для аппроксимации 8

$$B_8 = 1,9 \times 10^{-3} f_B^{1,5}; \quad D_8 = 0,036 / \sqrt{f_B},$$

где  $f_0, f_B$  – несущая частота и верхняя частота рабочего диапазона в килогерцах соответственно. Частотной характеристике (1) соответствует импульсная характеристика вида

$$h(t) = (2\sqrt{\pi a})^{-1} H(0) \exp[-(t - t_3)^2 / (4a)], \quad (3)$$

где  $h(t)$  – импульсная характеристика, с<sup>-1</sup>,  $t$  – время, с,  $H(0)$  – безразмерный коэффициент из (2),  $a$  – коэффициент из (2), с<sup>2</sup>.

## 2. Сигнал и шум на входе приемника

В каждом интервале времени  $[kT, (k+1)T]$  передатчик производит один сигнал  $S_{xk}(t-kT)$  из заданного множества сигналов  $\{S_1(t), \dots, S_M(t)\}$ , определенных на интервале  $[0, T]$ . Сигналы  $S_i(t), i=1, \dots, M$  имеют вид

$$S_i(t) = \Pi(t) \sin(\nu t) \cos(\omega_0 t + \varphi_i), \quad (4)$$

где  $\Pi(t) = 1(t) - 1(t-T)$ ,  $\varphi_i = 2\pi(i-1)/M$ ,  $\nu = \pi/T$ .

Какой именно из этих сигналов будет произведен, определяется блоком  $\vec{x}_k$  из  $k = \log_2 M$  двоичных символов информационной последовательности, поступающей на вход модулятора в течение интервала  $[kT, (k+1)T]$ . Таким образом, сигнал на выходе передатчика будет иметь вид

$$S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} S_{xk}(t-kT), \quad 0 \leq t \leq T_{CB}, \quad (5)$$

где  $T_{CB} = NT$  – длительность сеанса связи,  $N$  – число переданных символов.

Передаваемые сигналы  $S_{xk}(t)$  в отличие от радиоканалов в общем случае не считаются узкополосными, т.е. на длительности посылки  $T$  может укладываться только 2 или 3 периода  $T_0 = 2\pi / \omega_0$ .

Реакция  $C(t)$  ГАКС на этот сигнал может быть представлена в следующем виде

$$C(t) = \sum_{k=0}^{N-1} C_{xk}(t-kT), \quad (6)$$

где

$$C_{xk}(t) = \int_0^{\infty} S_{xk}(\tau) h(t-\tau) d\tau. \quad (7)$$

При определении  $C_{xk}(t)$  интеграл в (7) (и подобных интегралов далее) вычисляется непосредственно, так как для не узкополосного сигнала  $S_{xk}(\tau)$  метод комплексных огибающих не применим.

Как показывают расчеты, на дальностях не более 3 км, длительность  $T_h$  импульсной характеристики  $h(t)$  не превосходит 0,05 мс. При  $T > T_h$  сигналы

$C_{x(l-1)}(t-(l-1)T)$  и  $C_{x(l+1)}(t-(l+1)T)$  практически не перекрываются во времени. Следовательно, при приеме сигнала  $C_{xl}(t-lT)$  на интервале  $[t_3+lT, t_3+(l+1)T]$  необходимо учитывать только один предшествующий  $C_{x(l-1)}(t-(l-1)T)$  и один последующий  $C_{x(l+1)}(t-(l+1)T)$  сигналы. Удобно далее положить  $t_3 = 0$  и  $l = 0$ . В этом случае на интервале приема  $[0, T]$  сигнал  $C(t)$  примет вид

$$C(t) = C_{x(-1)}(t+T) + C_{x0}(t) + C_{x(+1)}(t-T). \quad (8)$$

Полезный сигнал  $C(t)$  суммируется в морской среде с аддитивными помехами  $n(t)$ . В качестве модели  $n(t)$  рассматривается белый гауссовский шум с односторонней спектральной плотностью мощности  $N_0$ . Таким образом, сигнал на входе приемника имеет вид

$$Z(t) = C(t) + n(t). \quad (9)$$

### 3. Определение вероятности ошибки приемника

Опорные сигналы приемника на интервале  $[0, T]$  имеют вид  $\mu_i S_i(t)$  где,  $\mu_i$  – коэффициенты передачи морской среды на несущей частоте  $f_0$  для этих сигналов. Приемник, оптимальный по критерию максимального правдоподобия, принимает решение о том, что передан сигнал  $S_j(t)$   $j$ , если выполняется неравенство [4]

$$X_j > X_r \quad (10)$$

для всех  $r \neq j$ . В неравенстве (10)

$$X_j = \frac{2}{T} \int_0^T Z(t) \mu_j S_j(t) dt, \quad X_r = \frac{2}{T} \int_0^T Z(t) \mu_r S_r(t) dt. \quad (11)$$

Предположим, что на интервале  $[0, T]$  передается сигнал  $S_j(t)$ . Тогда вероятность ошибки приемника представляет собой вероятность того, что неравенство (10) не выполняется. На работу приемника в интервале  $[0, T]$  будут влиять также сигналы от предшествующего и последующего символов.

Пусть на предшествующем интервале  $[-T, 0]$  передавался символ  $i$ , а на последующем интервале  $[T, 2T]$  символ  $k$ . В этом случае полезный сигнал  $C(t)$  на интервале  $[0, T]$  можно представить в виде

$$C_{ijk}(t) = C_i(t+T) + C_j(t) + C_k(t-T), \quad (12)$$

где

$$C_v(t) = \int_0^t S_v(\tau)h(t-\tau)d\tau. \quad (13)$$

С учетом аддитивных помех сигнал на входе приемника на интервале  $[0, T]$  принимает вид

$$Z(t) = C_{ijk}(t) + n(t). \quad (14)$$

Получить аналитическое выражение вероятности ошибки анализируемого приемника в данном случае затруднительно. Поэтому воспользуемся верхней границей вероятности ошибки, которая называется аддитивной границей [5]. Известно, что для любой системы сигналов  $S_1(t), \dots, S_M(t)$ , передаваемых в любом канале, справедлива оценка, называемая аддитивной границей [5]

$$p_v \leq \sum_{l=1}^M p_2(v, l), \quad l \neq v, \quad (15)$$

где  $p_v$  – вероятность ошибочного приема при передаче сигнала  $S_v(t)$ ,  $p_2(v, l)$  – вероятность ошибки в двоичной системе, использующей сигналы  $S_v(t)$  и  $S_l(t)$ .

Эта граница допускает упрощение за счет огрубления [6]:

$$p_{ош} \leq p_M = (M-1)p_{2m}, \quad (16)$$

где  $p_{ош}$  – вероятность ошибки в  $M$ -ичной системе при передаче любого сигнала,  $p_M$  – верхняя граница вероятности ошибки,  $p_{2m} = \max p(v, l)$  – максимальная по всем парам  $v, l$  вероятность ошибки в двоичной системе с сигналами  $S_v(t)$  и  $S_l(t)$ .

Таким образом, для определения верхней границы вероятности ошибки  $p_M$  необходимо вначале определить вероятность ошибки  $p_2(i, j)$  при передаче произвольных сигналов  $S_i(t)$  и  $S_j(t)$ . Будем считать, что сигналами

$$\begin{aligned} S_0(t) &= \Pi(t) \sin(\nu t) \cos(\omega_0 t + \psi_0), \\ S_1(t) &= \Pi(t) \sin(\nu t) \cos(\omega_0 t + \psi_1), \nu = \pi / T \end{aligned} \quad (17)$$

передаются соответственно символы 0 и 1 в двоичной системе. Каждый из сигналов (17) с синусоидальной огибающей можно представить как разность соответствующих двух сигналов с прямоугольной огибающей

$$S_0(t) = 0,5[S_{02}(t) - S_{01}(t)], \quad S_1(t) = 0,5[S_{12}(t) - S_{11}(t)]$$

где

$$\begin{aligned} S_{01}(t) &= \Pi(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_0), \quad S_{02}(t) = \Pi(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_0), \\ S_{11}(t) &= \Pi(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad S_{12}(t) = \Pi(t) \cos(\omega_2 t + \varphi_1), \\ \varphi_0 &= \psi_0 - 0,5\pi; \quad \varphi_1 = \psi_1 - 0,5\pi; \quad \omega_1 = \omega_0 - \nu; \quad \omega_2 = \omega_0 + \nu. \end{aligned}$$

В этом случае можно непосредственно использовать общее выражение вероятности ошибки из [1], которое справедливо для произвольных двоичных сигналов с различными видами манипуляции. Для сигналов М-ФМ удобно представить величину  $p_2(\nu, l)$  в виде  $p_2(\varphi_0, \varphi_1)$ , где

$$\varphi_0, \varphi_1 \in \left\{ 0, \frac{2\pi}{M}, \frac{2\pi \cdot 2}{M}, \dots, \frac{2\pi(M-1)}{M} \right\}. \quad (18)$$

Используя результаты работы [1], можно получить следующее выражение  $p_2(\varphi_0, \varphi_1)$

$$p_2(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_j \sum_{r \neq j} \sum_i \sum_k P(j)P(i)P(k)p(r/i, j, k), \quad (19)$$

где  $P(j)$ ,  $P(i)$ ,  $P(k)$  – априорные вероятности символов, равные 0,5,  $j, i, k \in \{0, 1\}$ ,  $p(r/i, j, k)$  – условная вероятность ошибочного приема символа  $j$  при последовательности переданных символов  $i, j, k$ .

Вероятность  $p(r/i, j, k)$  определяется по формуле

$$p(r/i, j, k) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[ q_{jr}(i, j, k) \right] \right\}, \quad (20)$$



где

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt - \text{табулированная функция.}$$

Величины  $q_{jr}(i, j, k)$  в (20) определяются по формулам

$$q_{01}(1, 0, 1) = h_1 [k_{S_0 C_1}(-T) + mk_{S_0 C_0}(0) + k_{S_0 C_1}(T) - 2k_{S_1 C_1}(T) - mk_{S_1 C_0}(0)],$$

$$q_{01}(0, 0, 1) = h_1 [mk_{S_0 C_0}(T) + mk_{S_0 C_0}(0) + (1-m)k_{S_0 C_1}(T) - mk_{S_1 C_0}(0)]$$

$$q_{01}(0, 0, 0) = mh_1 [2k_{S_0 C_0}(T) + k_{S_0 C_0}(0) - k_{S_1 C_0}(0) - k_{S_0 C_1}(T) - k_{S_0 C_1}(-T)],$$

$$q_{01}(1, 0, 0) = h_1 [(1-m)k_{S_0 C_1}(-T) + mk_{S_0 C_0}(0) + mk_{S_0 C_0}(T) - mk_{S_1 C_0}(0) - k_{S_1 C_1}(T)]$$

$$q_{10}(1, 1, 1) = h_1 [2k_{S_1 C_1}(T) + k_{S_1 C_1}(0) - k_{S_0 C_1}(0) - k_{S_0 C_1}(T) - k_{S_0 C_1}(-T)],$$

$$q_{10}(0, 1, 1) = h_1 [(m-1)k_{S_0 C_1}(T) + k_{S_1 C_1}(0) - k_{S_0 C_1}(0) + k_{S_1 C_1}(T) - mk_{S_0 C_0}(T)]$$

$$q_{10}(0, 1, 0) = h_1 [mk_{S_0 C_1}(T) + k_{S_1 C_1}(0) + mk_{S_0 C_1}(-T) - k_{S_0 C_1}(0) - 2mk_{S_0 C_0}(T)],$$

$$q_{10}(1, 1, 0) = h_1 [k_{S_1 C_1}(T) + k_{S_1 C_1}(0) - mk_{S_0 C_0}(T) + (m-1)k_{S_0 C_1}(-T) - k_{S_0 C_1}(0)]$$

где  $k_{S_j C_\nu}(-T)$ ,  $k_{S_j C_\nu}(0)$ ,  $k_{S_j C_\nu}(T)$  значения коэффициента корреляции

$$k_{S_j C_\nu}(\tau) = \frac{K_{S_j C_\nu}(\tau)}{\sqrt{E_{S_j} E_{C_\nu}}} \quad (21)$$

соответственно при  $\tau = -T, 0, T$ ,  $K_{S_j C_\nu}(\tau)$  – функция взаимной корреляции сигналов  $S_j(t)$  и  $C_\nu(t)$ .

Функция  $K_{S_j C_\nu}(\tau)$  при разных значениях  $j, \nu \in \{0, 1\}$  имеет вид

$$K_{S_0 C_1}(\tau) = K_{S_1 C_0}(-\tau) = 0,25 [K_{02,12}(\tau) - K_{01,12}(\tau) - K_{02,11}(\tau) + K_{01,11}(\tau)], \quad (22)$$

$$K_{S_0 C_0}(\tau) = 0,25 [K_{02,02}(\tau) - K_{01,02}(\tau) - K_{01,02}(-\tau) + K_{01,01}(\tau)], \quad (23)$$

$$K_{S_1 C_1}(\tau) = 0,25 [K_{12,12}(\tau) - K_{11,12}(\tau) - K_{11,12}(-\tau) + K_{11,11}(\tau)], \quad (24)$$

где  $K_{nm, \nu l}(\tau)$  – функция взаимной корреляции сигнала на входе ГАК с прямоугольной огибающей  $S_{nm}(t) = \Pi(t) \cos(\omega_m t + \varphi_n)$ ,  $\varphi_n = \psi_n - 0,5\pi$  и реакции ГАК на сигнал  $S_{\nu l}(t) = \Pi(t) \cos(\omega_l t + \varphi_\nu)$   $n, \nu \in \{0, 1\}$ ;  $l, m \in \{1, 2\}$ .

Значения функций  $K_{nm, \nu l}(\tau)$  при  $\tau = -T, 0, T$  определяются по формулам

$$K_{01,12}(0) = A_S V_0(\omega_1 \sqrt{a}) + B_S V_0(\omega_2 \sqrt{a}), \quad K_{01,12}(\pm T) = -0,5 A_S V_0(\omega_1 \sqrt{a}) \pm$$

$$\pm 0,5 A_C \exp(-a\omega_1^2) - 0,5 B_S V_0(\omega_2 \sqrt{a}) - 0,5 B_C \exp(-a\omega_2^2),$$

$$K_{02,11}(0) = A'_S V_0(\omega_2 \sqrt{a}) + B'_S V_0(\omega_1 \sqrt{a}), \quad K_{02,11}(\pm T) = -0,5 A'_S V_0(\omega_2 \sqrt{a}) \pm$$

$$\pm 0,5 A'_C \exp(-a\omega_2^2) - 0,5 B'_S V_0(\omega_1 \sqrt{a}) \mp 0,5 B'_C \exp(-a\omega_1^2),$$

$$K_{02,12}(0) = \left[ 0,5 T \exp(-a\omega_2^2) - \sqrt{a/\pi} \right] \cos(\psi_1 - \psi_0) +$$

$$+ \left[ a\omega_2 \cos(\psi_1 - \psi_0) + 0,5\omega_2^{-1} \cos(\psi_1 + \psi_0) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}),$$

$$K_{02,12}(\pm T) = 0,5 \cos(\psi_1 - \psi_0) \sqrt{a/\pi} \mp 0,5 \sin(\psi_1 - \psi_0) a\omega_2 \exp(-a\omega_2^2) -$$

$$- 0,5 \left[ 0,5\omega_2^{-1} \cos(\psi_1 + \psi_0) + a\omega_2 \cos(\psi_1 - \psi_0) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}),$$

$$K_{01,11}(0) = \left[ 0,5 T \exp(-a\omega_1^2) - \sqrt{a/\pi} \right] \cos(\psi_1 - \psi_0) +$$

$$+ \left[ a\omega_1 \cos(\psi_1 - \psi_0) + 0,5\omega_1^{-1} \cos(\psi_1 + \psi_0) \right] V_0(\omega_1 \sqrt{a}),$$

$$K_{01,11}(\pm T) = 0,5 \cos(\psi_1 - \psi_0) \sqrt{a/\pi} \mp 0,5 \sin(\psi_1 - \psi_0) a\omega_1 \exp(-a\omega_1^2) -$$

$$- 0,5 \left[ 0,5\omega_1^{-1} \cos(\psi_1 + \psi_0) + a\omega_1 \cos(\psi_1 - \psi_0) \right] V_0(\omega_1 \sqrt{a}),$$

$$K_{02,02}(0) = 0,5 T \exp(-a\omega_2^2) - \sqrt{a/\pi} + \left[ a\omega_2 + 0,5\omega_2^{-1} \cos(2\psi_0) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}),$$

$$K_{02,02}(\pm T) = 0,5 \sqrt{a/\pi} - 0,5 \left[ a\omega_2 + 0,5\omega_2^{-1} \cos(2\psi_0) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}),$$

$$K_{01,02}(0) = 0,25 \left[ T\pi^{-1} + \omega_0^{-1} \cos(2\psi_0) \right] V_0(\omega_1 \sqrt{a}) -$$

$$- 0,25 \left[ T\pi^{-1} - \omega_0^{-1} \cos(2\psi_0) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}),$$

$$K_{01,02}(\pm T) = 0,125 \left[ T\pi^{-1} - \omega_0^{-1} \cos(2\psi_0) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}) -$$

$$-0,125 \left[ T \pi^{-1} + \omega_0^{-1} \cos(2\psi_0) \right] V_0(\omega_1 \sqrt{a}) \pm 0,125 \omega_0^{-1} \sin(2\psi_0) \times \\ \times \left[ \exp(-a\omega_1^2) - \exp(-a\omega_2^2) \right],$$

$$K_{01,01}(0) = 0,5T \exp(-a\omega_1^2) - \sqrt{a/\pi} + \left[ a\omega_1 + 0,5\omega_1^{-1} \cos(2\psi_0) \right] V_0(\omega_1 \sqrt{a}),$$

$$K_{01,01}(T) = K_{01,01}(-T) = 0,5\sqrt{a/\pi} - 0,5 \left[ a\omega_1 + 0,5\omega_1^{-1} \cos(2\psi_0) \right] V_0(\omega_1 \sqrt{a}),$$

$$K_{11,12}(0) = 0,25\omega_0^{-1} \cos(2\psi_1) V_0(\omega_1 \sqrt{a}) - 0,25 \left[ T \pi^{-1} - \omega_0^{-1} \cos(2\psi_1) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}),$$

$$K_{11,12}(\pm T) = -0,125\omega_0^{-1} \cos(2\psi_1) V_0(\omega_1 \sqrt{a}) \pm 0,125\omega_0^{-1} \sin(2\psi_1) \times \\ \times \left[ \exp(-a\omega_1^2) - \exp(-a\omega_2^2) \right] + 0,125 \left[ T \pi^{-1} - \omega_0^{-1} \cos(2\psi_1) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}),$$

$$K_{11,11}(0) = 0,5T \exp(-a\omega_1^2) - \sqrt{a/\pi} + \left[ a\omega_1 + 0,5\omega_1^{-1} \cos(2\psi_1) \right] V_0(\omega_1 \sqrt{a}),$$

$$K_{11,11}(T) = K_{11,11}(-T) = 0,5\sqrt{a/\pi} - 0,5 \left[ a\omega_1 + 0,5\omega_1^{-1} \cos(2\psi_1) \right] V_0(\omega_1 \sqrt{a}),$$

$$K_{12,12}(0) = 0,5T \exp(-a\omega_2^2) - \sqrt{a/\pi} + \left[ a\omega_2 + 0,5\omega_2^{-1} \cos(2\psi_1) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}),$$

$$K_{12,12}(T) = K_{12,12}(-T) = 0,5\sqrt{a/\pi} - 0,5 \left[ a\omega_2 + 0,5\omega_2^{-1} \cos(2\psi_1) \right] V_0(\omega_2 \sqrt{a}),$$

где

$$A_S = B'_S = 0,25\nu^{-1} \cos(\psi_1 - \psi_0) + 0,25\omega_0^{-1} \cos(\psi_1 + \psi_0),$$

$$A_C = B'_C = 0,25\nu^{-1} \sin(\psi_1 - \psi_0) + 0,25\omega_0^{-1} \sin(\psi_1 + \psi_0),$$

$$B_S = A'_S = -0,25\nu^{-1} \cos(\psi_1 - \psi_0) + 0,25\omega_0^{-1} \cos(\psi_1 + \psi_0)$$

$$A'_C = B'_C = -0,25\nu^{-1} \sin(\psi_1 - \psi_0) + 0,25\omega_0^{-1} \sin(\psi_1 + \psi_0),$$

$$V_0(\omega_k \sqrt{a}) = V(\omega_k \sqrt{a}, 0); V(x, y) = \text{Im}W(z), \quad z = x + jy.$$

$W(z)$  – интеграл вероятности от комплексного аргумента [7].

Значения функций  $K_{01,12}(\tau)$ ,  $K_{02,11}(\tau)$  получены впервые, а остальные значения функций  $K_{nm, \nu l}(\tau)$  взяты из работ автора [8,9].

Величины  $E_{S_j}$ ,  $E_{C_v}$  представляют собой энергии сигналов  $S_j(t)$  и  $C_v(t)$  соответственно, определяемые по формулам,

$$E_{S_j} = \int_0^T S_j^2(t) dt = 0,25T - \text{энергия сигнала на входе морской среды,}$$

$$E_{C_v} = \int_{-\infty}^{\infty} C_v^2(t) dt - \text{энергия сигнала на выходе морской среды.}$$

Величина  $E_{C_v}$ , как показано в [10], зависит от начальной фазы  $\psi_v$  сигнала  $S_v(t)$  и при  $\omega_0 T = n\pi$  может быть определена по формуле

$$E_{C_v} = 0,25H^2(0) \left\{ 0,5T \left[ \exp(-2a\omega_1^2) + \exp(-2a\omega_2^2) \right] - 2\sqrt{2a/\pi} + N_1 + N_2 \right\}, \quad (25)$$

где

$$N_k = \left[ 2a\omega_k + 0,5 \left( \omega_k^{-1} - \omega_0^{-1} \right) \cos(2\psi_v) + (-1)^k 0,5v^{-1} \right] V_0(\omega_k \sqrt{2a}), \quad k = 1, 2.$$

Величины  $m$  и  $h_1$ , входящие в величины  $q_{jr}(i, j, k)$ , определяются по формулам

$$m = \sqrt{E_{C_0} / E_{C_1}}, \quad h_1 = |\sin 0,5(\psi_1 - \psi_0)|^{-1} (1 + m^2)^{-0,5} h_0,$$

$$h_0 = \sqrt{0,5(E_{C_0} + E_{C_1}) / N_0} - \text{отношение сигнал/шум на входе приемника.}$$

При отсутствии искажений, когда  $H(\omega) = H(0) \exp(-a\omega_0^2)$

$$p_2(\psi_0, \psi_1) = p_{2ИД}(\psi_0, \psi_1) = 0,5 \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left[ \left| \sin \frac{\psi_1 - \psi_0}{2} \right| \sqrt{\frac{E_1}{N_0}} \right] \right\}, \quad (26)$$

где  $E_1 = \mu^2 E_{S_1} = H^2(0) \exp(-2a\omega_0^2)$ .

Выражение (26) при  $\psi_1 - \psi_0 = 2\pi / M$  совпадает с верхней границей вероятности ошибки при приеме сигналов М-ФМ из [6].

#### 4. Результаты расчетов верхней границы вероятности ошибки

При заданном значении  $M$  следует рассчитать для всех возможных пар  $\psi_1, \psi_0$  вероятности ошибки  $p_2(\psi_0, \psi_1)$  и определить максимальную вероятность  $p_{2m} = \max p_2(\psi_0, \psi_1)$ . После чего легко определить верхнюю границу вероятности ошибки при приеме сигналов М-ФМ по формуле  $p_M = (M - 1)p_{2m}$ . Так как  $p_M \leq 1$ , то величина  $p_{2m}$  должна удовлетворять неравенству  $p_{2m} \leq 1/(M - 1)$ . Для выполнения последнего неравенства уже при небольших значениях  $M$  (порядка 10) необходимо отношение сигнал/шум  $h_0 > 1$ . Расчеты показывают:  $p_{2m} = p_2(\pi/2; \pi)$  при  $M = 4$ ;  $p_{2m} = p_2(\pi/2; \pi/4)$  при  $M = 8$ ;  $p_{2m} = p_2(\pi/2; 5\pi/8)$  при  $M = 16$ ;  $p_{2m} = p_2(\pi/2; 9\pi/16)$  при  $M = 32$ .

Расчеты проводились для аппроксимации 8 при  $f_B = 80$  кГц для  $R = 1,5$ ; 3 км. На рис. 1 в качестве примера приведены зависимости верхней границы вероятности ошибки  $p_M$  от отношения сигнал/шум  $h_0$  для дальности  $R = 3$  км, длительности посылки сигнала  $T = 0,1$  мс и разных значений несущей частоты  $f_0$ . На этом рисунке для сравнения изображена также и зависимость  $p_{M,ИД}(h_0) = (M - 1)p_{2ИД}(\varphi_0, \varphi_1)$  при отсутствии искажений в морской среде.

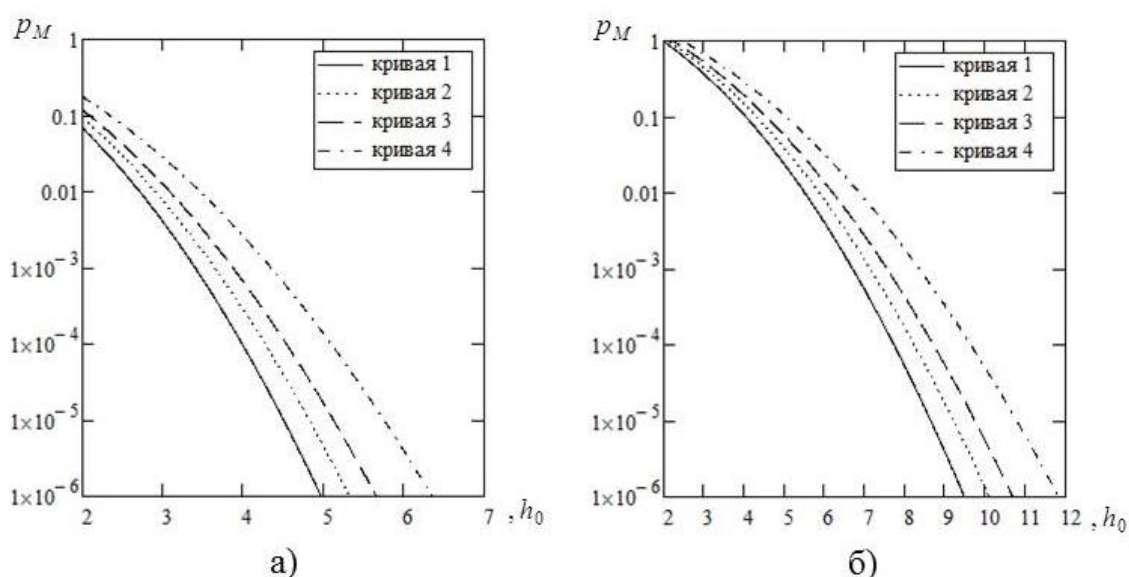


Рис. 1. Зависимость вероятности ошибки от отношения сигнал/шум.  
 а –  $M = 4$ ; б –  $M = 8$ . Кривая 1 – при отсутствии искажений;  
 кривая 2 –  $f_0 = 30$  кГц; кривая 3 –  $f_0 = 40$  кГц; кривая 4 –  $f_0 = 50$  кГц

Для сравнения на рис.2 приведены зависимости  $p_M(h_0)$ ,  $p_{M,ИД}(h_0)$  для сигналов с синусоидальной (S) и прямоугольной (П) огибающими.

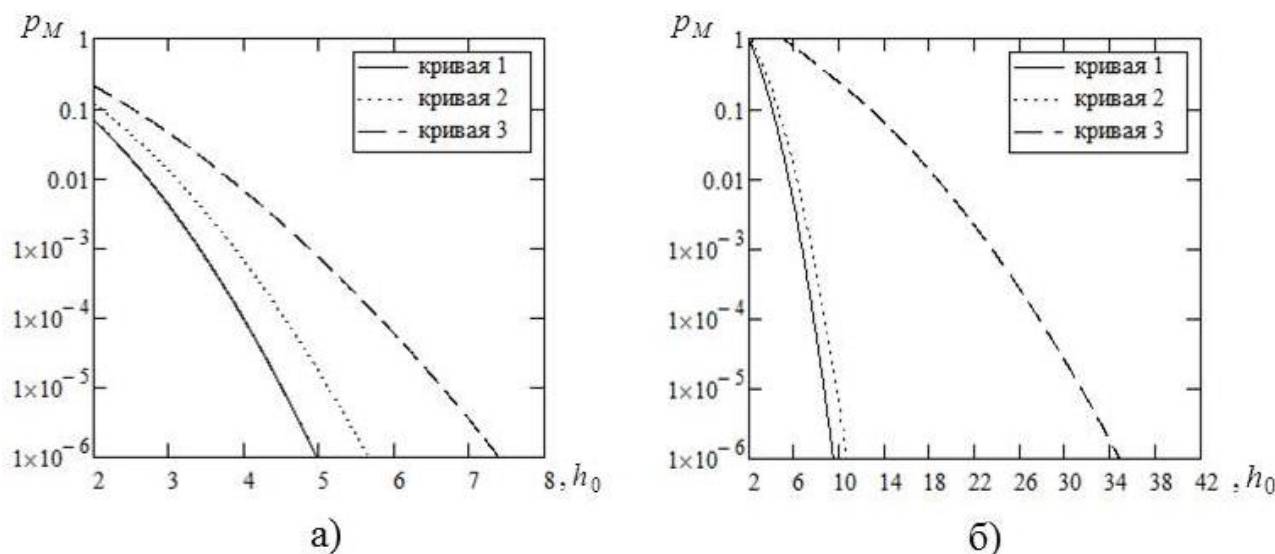


Рис. 2. Зависимости  $p_M(h_0)$  и  $p_{M,ИД}(h_0)$  для  $T = 0,1$  мс,  $f_0 = 40$  кГц,  $R=3$  км.  
 а –  $M = 4$ ; б –  $M = 8$ . Кривые: 1 –  $p_{M,ИД}(h_0)$ ;  
 2 –  $p_M(h_0)$  для S-огибающей; 3 –  $p_M(h_0)$  для П-огибающей

Как видно из рисунков 1, 2 величины  $M$  и  $f_0$  при заданных значениях  $R$  и  $T$  оказывают значительное влияние на помехоустойчивость.

Для оценки относительного ухудшения помехоустойчивости приема за счет частотных искажений сигналов в морской среде в [1] введена логарифмическая мера, которая в данном случае будет иметь вид

$$\delta_{MФМ} = 20 \lg(p_M / p_{M,ИД}). \quad (22)$$

Как следует из предыдущего анализа, величина  $\delta_{MФМ}$  будет зависеть от отношения сигнал/шум  $h_0$ , несущей частоты  $f_0$ , длительности посылки сигнала  $T$ , числа фаз  $M$  и дальности связи  $R$ . На рис. 3 представлены зависимости  $\delta_{MФМ}(T)$  для  $M = 4$  и  $R = 1,5; 3$  км при  $p_{M,ИД}(h_0) = 10^{-3}$  ( $h_0 = 3,402$ ).

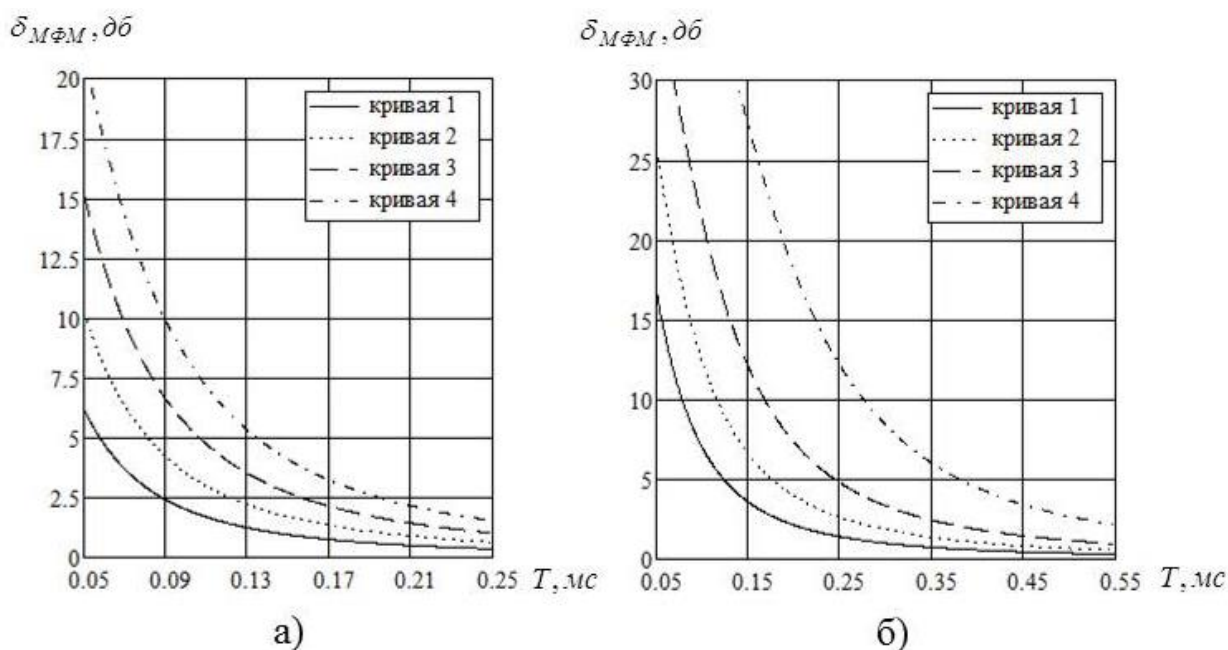


Рис. 3. Зависимость  $\delta_{M\Phi M}(T)$  для  $M = 4$ ;  $p_{M,ИД} = 10^{-3}$ :  
 а –  $R = 1,5$  км; б) –  $R = 3$  км. Кривые: 1 –  $f_0 = 30$  кГц;  
 2 –  $f_0 = 40$  кГц; 3 –  $f_0 = 50$  кГц; 4 –  $f_0 = 60$  кГц

На рис. 4 представлены зависимости  $\delta_{M\Phi M}(T)$  для  $M = 4$  и  $R = 1,5; 3$  км при  $p_{M,ИД}(h_0) = 10^{-5}$  ( $h_0 = 4,504$ ). На этом рисунке и рис. 5, 6 кривые соответствуют частотам  $f_0$  как и на рис. 3.

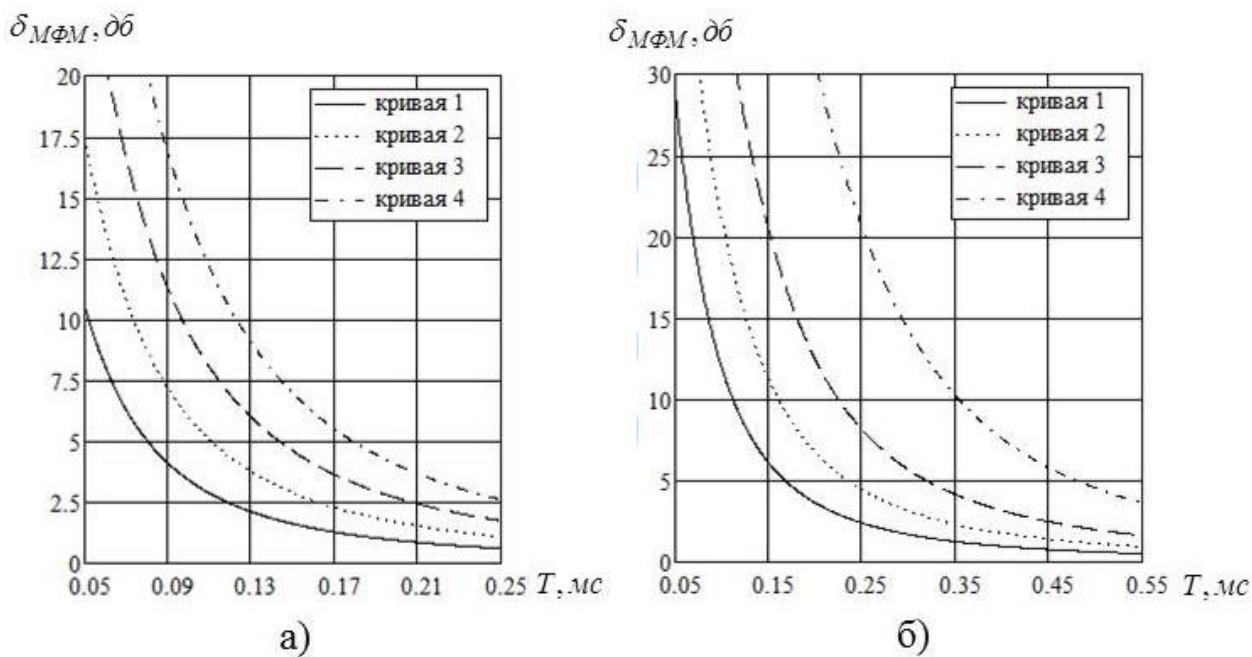


Рис. 4. Зависимость  $\delta_{M\Phi M}(T)$  для  $M = 4$ ;  $p_{M,ИД} = 10^{-5}$ :  
 а –  $R = 1,5$  км, б) –  $R = 3$  км

В рассматриваемом диапазоне частот значения  $\delta_{M\Phi M}(T)$  для  $M = 8$  превышают значения  $\delta_{M\Phi M}(T)$  при  $M = 4$  не более чем на 11%. Эта разница уменьшается с ростом  $R$  и  $p_{M,ИД}(h_0)$ , но слабо зависит от частоты  $f_0$ .

Соответственно,  $\delta_{M\Phi M}(T)$  для  $M = 16$  меньше значений  $\delta_{M\Phi M}(T)$  при  $M = 32$  не более чем на 10%. Поэтому графики этих зависимостей здесь не приводятся.

На рис. 5 представлены зависимости  $\delta_{M\Phi M}(T)$  для  $M = 32$  и  $R = 1,5; 3$  км при  $p_{M,ИД}(h_0) = 10^{-3}$  ( $h_0 = 28,825$ ).

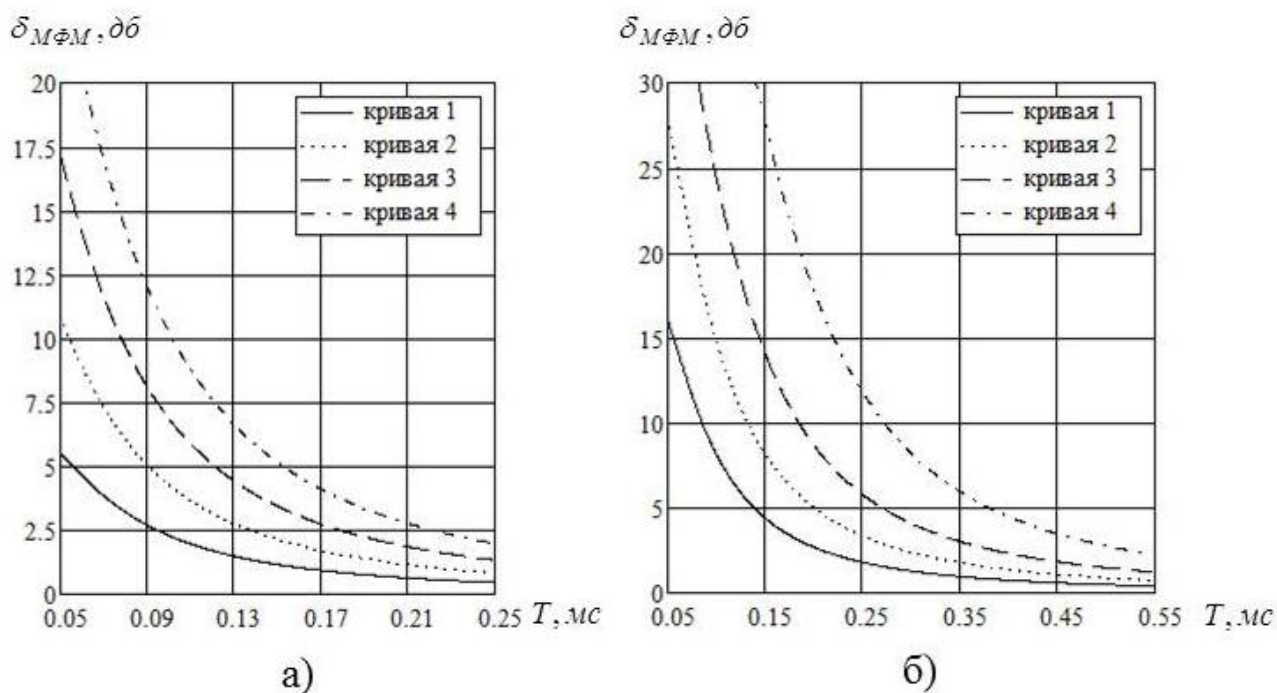


Рис. 5. Зависимость  $\delta_{M\Phi M}(T)$  для  $M = 32$ ;  $p_{M,ИД} = 10^{-3}$ :  
 а –  $R = 1,5$  км, б) –  $R = 3$  км

На рис. 6 представлены зависимости  $\delta_{M\Phi M}(T)$  для  $M = 32$  и  $R = 1,5; 3$  км при  $p_{M,ИД}(h_0) = 10^{-5}$  ( $h_0 = 35,906$ ).



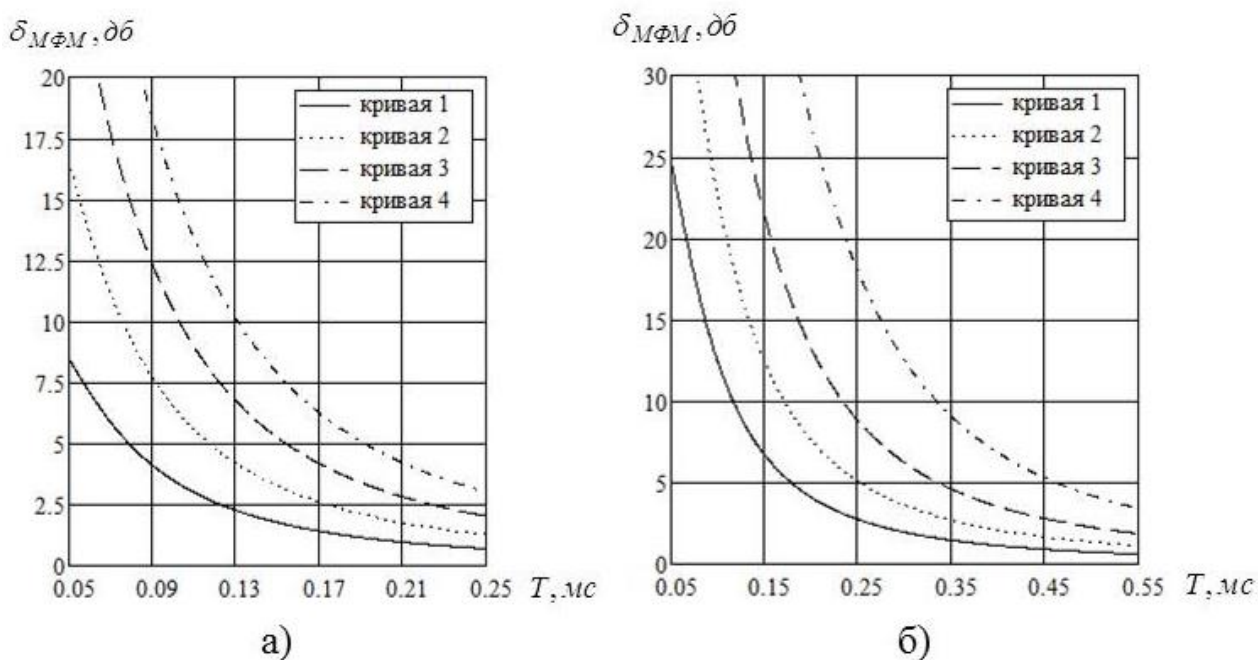


Рис. 6. Зависимость  $\delta_{M\Phi M}(T)$  для  $M = 32$ ;  $p_{M,ИД} = 10^{-5}$ :  
 а –  $R = 1,5$  км, б) –  $R = 3$  км

Анализ зависимостей  $\delta_{M\Phi M}(T)$ , приведенных на рис. 3-6, позволяет сделать следующие выводы. Величина  $\delta_{M\Phi M}$  уменьшается с увеличением  $T$  и уменьшением  $M$  и увеличивается с ростом частоты  $f_0$ , дальности  $R$  и с уменьшением требуемой вероятности  $p_{M,ИД}$ .

Рассмотрим теперь определение длительности посылки и несущей частоты сигнала, при которых сигналы М–ФМ можно считать относительно инвариантными к частотным искажениям в морской среде.

### 5. Определение значений параметров сигналов с М – позиционной ФМ, относительно инвариантных к частотным искажениям в морской среде

Как следует из предыдущего, величина  $\delta_{M\Phi M}$  при заданных значениях дальности  $R$  и отношения сигнал/шум  $h_0$  ( $p_{M,ИД}$ ) является функцией параметров сигнала – несущей частоты  $f_0$ , длительности посылки сигнала  $T$  и числа фаз  $M$ . Если задаться допустимым значением относительного ухудшения помехоустойчивости  $\delta_{ДОП}$ , то можно получить уравнение  $\delta_{M\Phi M}(f_0, T, M) = \delta_{ДОП}$ . Это уравнение определяет неявные функции одного

параметра от другого. Так как результаты расчета для  $M = 16$  и  $M = 32$  близки, то были рассчитаны зависимости  $T(f_0)$  только для  $M = 2; 4; 8; 32$ . Эти зависимости определяют максимальную несущую частоту и минимальную длительность сигнала, для которых относительное ухудшение помехоустойчивости равно  $\delta_{\text{ДОП}} = 10$  дБ.

Графики зависимостей  $T(f_0)$  для  $R = 1,5$  км,  $p_{M,ИД} = 10^{-3}; 10^{-5}$  и  $M = 2; 4; 32$  приведены на рис. 7, а для  $R = 3$  км – на рис. 8. На рис. 7а приведены зависимости для  $M = 2; 4; 32$ , а на остальных рисунках только для  $M = 2; 32$ . Это объясняется тем, что кривые для  $M = 4, 8, 16$  мало отличаются от приведенных кривых и расположены между кривыми для  $M = 2, 32$ . Минимальное значение длительности  $T = 0,05$  мс выбрано таким, чтобы на минимальной частоте  $f_0 = 20$  кГц на длительности  $T$  укладывался бы только один период несущего колебания ( $T f_0 = 1$ ).

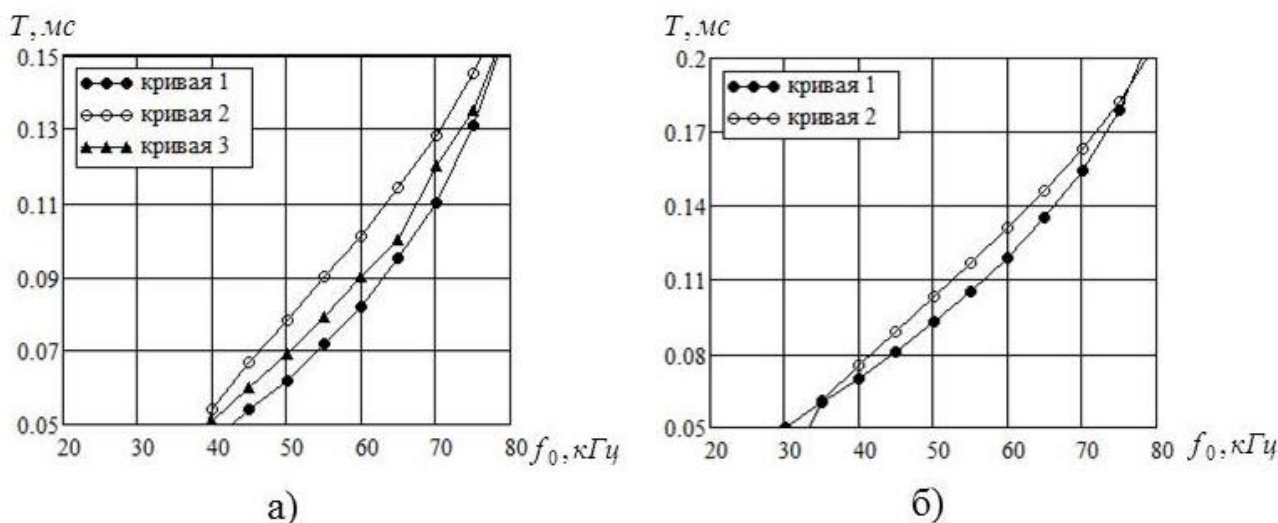


Рис. 7. Зависимости  $T(f_0)$  для  $R = 1,5$  км: а –  $p_{M,ИД} = 10^{-3}$ ; б –  $p_{M,ИД} = 10^{-5}$ .  
Кривые: 1 –  $M = 2$ , 2 –  $M = 32$ , 3 –  $M = 4$ .

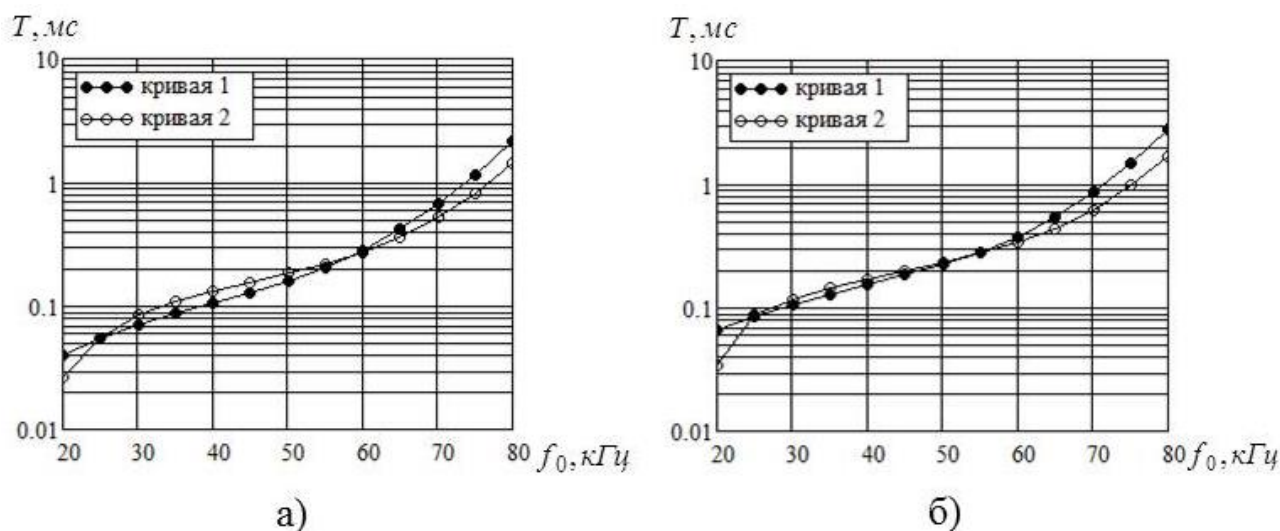


Рис. 8. Зависимости  $T(f_0)$  для  $R = 3$  км: а –  $p_{M,ИД} = 10^{-3}$ ; б –  $p_{M,ИД} = 10^{-5}$ .  
Кривые: 1 –  $M = 2$ , 2 –  $M = 32$

Каждая кривая  $T(f_0)$  на рис. 7, 8 разбивает плоскость  $f_0, T$  на 2 области: верхнюю и нижнюю. Точки, расположенные в верхней области, соответствуют допустимым значениям  $f_0, T$ , при которых относительное ухудшение помехоустойчивости не превосходит  $\delta_{ДОП} = 10$  дБ.

Сигналы с такими параметрами можно назвать сигналами, относительно инвариантными к частотным искажениям в морской среде. Точки, расположенные в нижней области, соответствуют недопустимым значениям  $f_0, T$ . Кривые на рис. 7а, б начинаются с частот  $f_0 = 40$  кГц и 30 кГц соответственно. Это означает, что для частот  $20 \leq f_0 \leq 40$  кГц в первом случае и для частот  $20 \leq f_0 \leq 30$  кГц во втором случае, для длительностей  $T \geq 0,05$  мс величина  $\delta_{МФМ} < 10$  дБ.

Интересно сравнить зависимости  $T(f_0)$  для сигналов с синусоидальной огибающей с соответствующими зависимостями для сигналов с прямоугольной огибающей из работы [11]. На рис. 9 приведены графики зависимостей  $T(f_0)$  из работы [11].

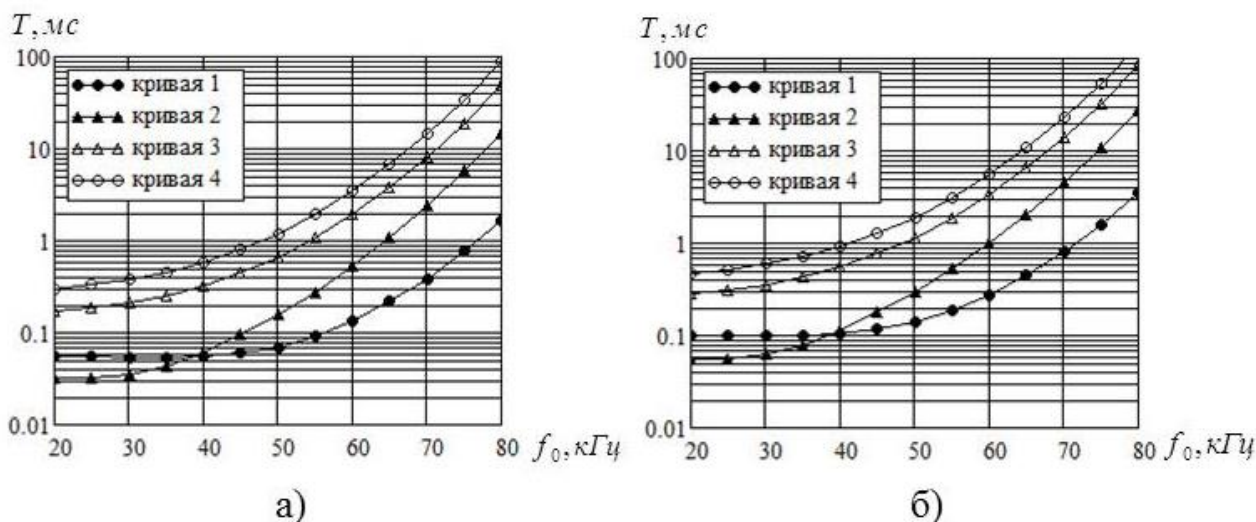


Рис. 9. Зависимости  $T(f_0)$  для  $R = 1,5$  км из работы [11].

$$а - p_{M, ИД} = 10^{-3}, б - p_{M, ИД} = 10^{-5}.$$

Кривые: 1 –  $M = 2$ ; 2 –  $M = 4$ ; 3 –  $M = 8$ ; 4 –  $M = 32$

Как следует из сравнения рис. 7 а и рис. 9 а в случае инвариантных сигналов с прямоугольной огибающей при заданной частоте  $f_0$  необходима большая длительность, чем для сигналов с синусоидальной огибающей. Например, при  $R = 1,5$  км;  $f_0 = 50$  кГц,  $M=4$ ;  $p_{M, ИД} = 10^{-3}$  для сигналов с S – огибающей необходима  $T = 0,07$  мс, для сигналов с П-огибающей –  $T = 0,16$  мс. Если увеличить величину  $M$  до 32, то у сигналов с S – огибающей  $T = 0,08$  мс, у сигналов с П – огибающей –  $T = 1,2$  мс.

## Заключение

Основной задачей данной работы была разработка методики выбора параметров сигналов М-ФМ с синусоидальной огибающей, относительно инвариантных к частотным искажениям в морской среде. Для этой цели в работе определена вероятность ошибки когерентного приемника двоичных сигналов с фазовой манипуляцией с синусоидальной огибающей и произвольными значениями фаз. В качестве приемников рассматривались когерентные приемники, оптимальные по критерию максимального правдоподобия при действии белого гауссовского шума и отсутствии искажений в морской среде. На этой основе найдена верхняя граница вероятности ошибки при когерентном

приеме сигналов М-ФМ с синусоидальной огибающей. Введена логарифмическая мера относительного увеличения вероятности ошибки по сравнению со случаем отсутствия искажений. Определена функциональная зависимость этой меры от длительности посылки сигнала, несущей частоты и числа фаз сигнала, а также от дальности связи и отношения сигнал/шум. На плоскости  $f_0, T$  для каждого вида сигнала построена граница области, выше которой сигналы являются относительно инвариантными к частотным искажениям в морской среде. Проведено сравнение со случаем приема сигналов М-ФМ с прямоугольной огибающей. Показано, что инвариантные сигналы с синусоидальной огибающей имеют меньшую длительность, чем сигналы с прямоугольной огибающей. Кроме того, длительность сигналов с синусоидальной огибающей значительно меньше зависит от числа фаз сигнала. Полученные результаты могут быть полезными при разработке цифровых гидроакустических систем связи.

### Литература

1. Денисов В.Е. Помехоустойчивость когерентного приема двоичных сигналов с синусоидальной огибающей в гидроакустическом канале связи. *Журнал радиоэлектроники* [электронный журнал]. 2023. №3. С.1-22. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.3.3>
2. Матвиенко В.Н., Тарасюк Ю.Ф. *Дальность действия гидроакустических средств*. Ленинград, Судостроение. 1983. 205 с.  
Денисов В.Е. Аппроксимация амплитудно-частотной характеристики гидроакустического канала связи по совокупности показателей качества. *56-я Научно-техническая конференция МИРЭА*. Москва, МИРЭА. 2007. Ч.2. С.71-76.
3. Финк Л.М. *Теория передачи дискретных сообщений*. Москва, Советское радио. 1970. 728 с.
4. Возенкрафт Дж., Джекобс И. *Теоретические основы техники связи*. Москва, Мир. 1969. 640 с.

5. Коржик В.И., Финк Л.М., Щелкунов К.Н. *Расчет помехоустойчивости систем передачи дискретных сообщений*. Москва, Радио и связь. 1981. 232 с.
6. Фаддеева В.Н., Терентьев Н.М. *Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента*. Москва, Гостехиздат, 1954. С. 268
7. Денисов В.Е. Корреляция между входным и выходным сигналами гидроакустического канала связи при входном сигнале в виде высокочастотного импульса с прямоугольной огибающей. *2-я Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы и перспективы развития радиотехнических и инфокоммуникационных систем» – РАДИОИНФОКОМ-2015»*. Москва, МИРЭА. 2015. Ч.1. С.98-103.
8. Денисов В.Е. Корреляция между двоичными сигналами ЧМ на входе и выходе гидроакустического канала связи. *3-я Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы и перспективы развития радиотехнических и инфокоммуникационных систем» – РАДИОИНФОКОМ-2017»*. Москва, МИРЭА. 2015. Ч.1. С.7-12.
9. Денисов В.Е. Анализ искажений высокочастотного импульса с синусоидальной огибающей в морской среде на основе энергетического критерия. *59-я Научно-техническая конференция МИРЭА*. Москва, МИРЭА. 2010. Ч.2. С.83-88.
10. Денисов В.Е. Помехоустойчивость когерентного приема сигналов с многопозиционной фазовой манипуляцией и прямоугольной огибающей в гидроакустическом канале связи. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2022. №12. С. 1-19. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2022.12.11>

**Для цитирования:**

Денисов В.Е. Помехоустойчивость когерентного приема сигналов с многопозиционной фазовой манипуляцией и синусоидальной огибающей в гидроакустическом канале связи. *Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]*. 2023. №7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.7.6>