

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.7.1>

УДК: 621.391:621.396

ОПТИМАЛЬНЫЙ ПРИЁМНИК, ОБЕСПЕЧИВАЮЩИЙ МАКСИМАЛЬНОЕ ОТНОШЕНИЕ СИГНАЛ-ПОМЕХА В УСЛОВИЯХ ДЕЙСТВИЯ НЕБЕЛОГО НЕГАУССОВА ШУМА

А.Н. Дегтярёв, И.Л. Афонин, В.Г. Слезкин, Г.В. Слезкин

Севастопольский государственный университет
299053, Россия, г. Севастополь, ул. Университетская, 33

Статья поступила в редакцию 5 марта 2024 г.

Аннотация. Рассмотрена проблема оптимального приёма сигнала ограниченной длительности в канале связи с аддитивной помехой типа небелого негауссова шума. Известные решения базируются на применении дополнительного «обеляющего» фильтра перед согласованным с сигналом фильтром или перед коррелятором, в котором опорный сигнал совпадает по форме с информационным. Реализация таких приёмных устройств затруднена в случае, например, преднамеренных помех с медленно изменяющимися параметрами, когда требуется адаптировать параметры фильтров. Предложено упростить состав приёмника путём исключения обеляющего фильтра. Реализуемость двух вариантов оптимального приёма доказывается математически с привлечением теории функции Лагранжа в изопериметрической задаче отыскания вида функции, при котором достигается минимум дисперсии помехи и ненулевое значение сигнальной составляющей. В варианте с оптимальной фильтрацией получено выражение для комплексного коэффициента передачи оптимального (в указанном смысле) фильтра. Для варианта с коррелятором определён оптимальный вид опорного сигнала. Получены выражения для энергетического

отношения сигнал-помеха в обоих вариантах. Эти выражения совпали между собой, а также совпали с известным соотношением для приёмников с обесцвечивающими фильтрами, что доказывает возможность реализации предложенных, более простых видов реализации оптимального приёмника

Ключевые слова: канал связи, аддитивная помеха, небелый шум, оптимальный приём, обесцвечивающий фильтр, оптимальный фильтр, коррелятор, отношение сигнал-помеха.

Автор для переписки: Виталий Геннадьевич Слезкин, slezkinvg@mail.ru

Введение

Теория обнаружения и различения радиосигналов при действии в канале связи помехи типа гауссова белого шума хорошо известна. Существует несколько критериев, на основе которых строятся оптимальные приёмники сигналов: максимального отношения сигнал-шум, минимума среднеквадратического отклонения (СКО) выходного сигнала приёмника от полезного сигнала, максимального правдоподобия и другие. В частности, критерий максимального отношения сигнал-шум предполагает достижение этого условия в момент окончания сигнала. Критерий минимума СКО приводит к созданию фильтров Комогорова-Винера. Критерий максимального правдоподобия позволяет построить приёмники, обеспечивающие минимальную среднюю абсолютную ошибку отклонения выходного сигнала от входного полезного сигнала. В данной работе рассматривается метод построения оптимального приёмника, минимизирующего дисперсию помехи в момент окончания сигнала. Такой приёмник должен иметь структурную схему, подобную структурной схеме приёмника, оптимального по критерию максимального отношения сигнал-шум, в виде коррелятора или согласованного фильтра [1]. При наличии в канале помехи «небелого» и негауссовского типа, к которому относятся и преднамеренные помехи, известные реализации оптимального приёма базируются также на применении согласованной

фильтрации [2-4], что возможно благодаря применению «обеляющего» фильтра (рис. 1).

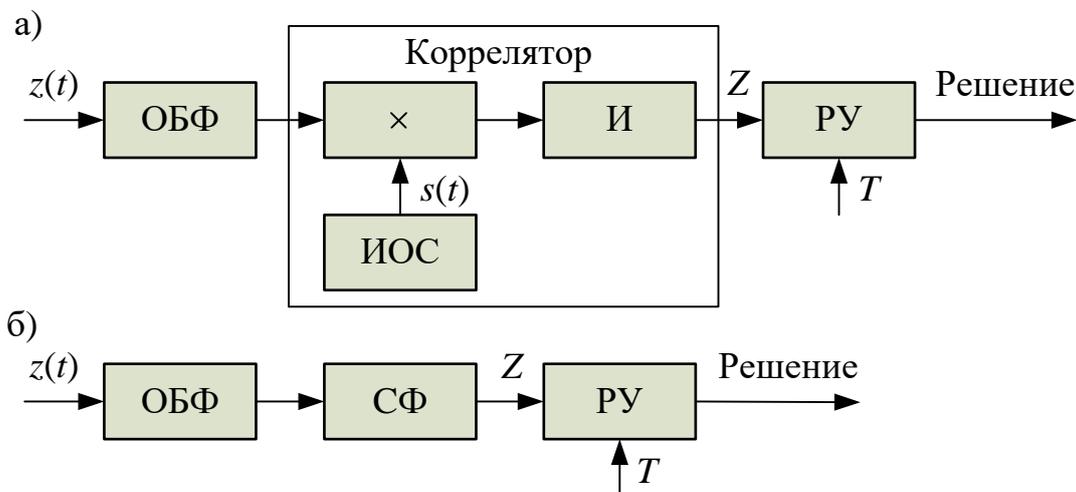


Рис. 1. Структурные схемы оптимального обнаружителя сигнала с использованием коррелятора (а) и согласованного фильтра (б).

В обоих вариантах (см. рис. 1) обеляющий фильтр (ОБФ) производит предварительную обработку смеси $z(t)$ сигнала с небелым шумом. С выхода ОБФ смесь поступает на коррелятор (см. рис. 1 а), состоящий из перемножителя « \times », источника опорного сигнала «ИОС», причём в опорный сигнал совпадает по форме с основным сигналом $s(t)$, и интегратора «И», либо на согласованный фильтр «СФ» (см. рис. 1 б). Отклик коррелятора или согласованного фильтра Z поступает на вход решающего устройства «РУ», в котором в отсчётный момент времени T происходит принятие соответствующего решения.

Ранее нами был рассмотрен один из вариантов методики совместного синтеза обеляющего и согласованного фильтров [5]. Было установлено, что практически реализовать решение данной задачи весьма сложно, в частности, фильтры требуют настолько значительного числа элементарных ячеек, что ожидаемая их эффективность ставится под вопрос. Кроме того, при изменении характеристик небелого шума необходимо производить адаптацию параметров обеляющего фильтра под новые условия. Речь идёт об изменении набора коэффициентов, определяющих импульсную

характеристику этого фильтра: именно большое количество подбираемых коэффициентов и обуславливает сложность рассматриваемой задачи.

Целью настоящей работы является поиск реализаций оптимального приёмника – обнаружителя сигнала, обеспечивающего без применения обесцвечивающего фильтра достижение максимального отношения сигнал-помеха в момент окончания сигнала, когда шум не является белым.

1. Оптимальный приёмник на основе фильтра

Ограничим наше рассмотрение задачей обнаружения сигнала $s(t)$ на интервале времени $[0, T]$. Запишем аддитивную смесь $z(t)$ сигнала $s(t)$ с небелым шумом $n(t)$, спектральная плотность которого $W_n(\omega)$ известна, в виде:

$$z(t) = s(t) + n(t). \quad (1)$$

Оценим условия, при которых один линейный фильтр с импульсной характеристикой $g(t)$ вместо двух – обесцвечивающего и согласованного (см. рис. 1), – обеспечит на своём выходе минимальную дисперсию шумовой составляющей отклика при ненулевом значении математического ожидания (МОЖ) сигнальной составляющей (рис. 2).

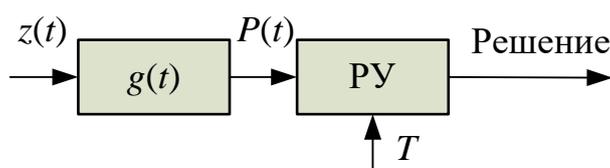


Рис. 2. Структурная схема приёмника на основе оптимального фильтра при небелом шуме.

Сигнал на выходе линейного фильтра (отклик фильтра) $P(t)$ выразим через его импульсную характеристику $g(t)$:

$$P(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) g(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(t - \tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (2)$$

Найдём МОЖ отклика с учётом того, что сигнал $s(t)$ не является случайной величиной, а постоянная составляющая шума $n(t)$ равна нулю:

$$M \{P(t)\} = M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} n(\tau) g(t-\tau) d\tau \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(t-\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} M \{n(\tau)\} g(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(t-\tau) d\tau. \quad (3)$$

Получим теперь выражение для дисперсии отклика фильтра D_P :

$$\begin{aligned} D_P &= M \{P(t)^2\} - M^2 \{P(t)\} = \\ &= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) g(t-\tau) d\tau \int_{-\infty}^{\infty} z(\tilde{t}) g(t-\tilde{t}) d\tilde{t} \right\} - M^2 \{P(t)\} = \\ &= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau) g(t-\tau) z(\tilde{t}) g(t-\tilde{t}) d\tau d\tilde{t} \right\} - M^2 \{P(t)\} = \\ &= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [s(\tau) + n(\tau)][s(\tilde{t}) + n(\tilde{t})] g(t-\tau) g(t-\tilde{t}) d\tau d\tilde{t} \right\} - M^2 \{P(t)\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(\tilde{t}) g(t-\tau) g(t-\tilde{t}) d\tau d\tilde{t} + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M \{n(\tau) n(\tilde{t})\} g(t-\tau) g(t-\tilde{t}) d\tau d\tilde{t} - \\ &\quad - \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(t-\tau) d\tau \right\}^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь также учтено, что постоянная составляющая процесса $n(t)$ равна нулю. Первый член алгебраической суммы в (4) математически сводится к третьему:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) s(\tilde{t}) g(t-\tau) g(t-\tilde{t}) d\tau d\tilde{t} = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(t-\tau) d\tau \right\}^2.$$

Во втором слагаемом содержится выражение для корреляционной функции шума:

$$B_n(\tau, \tilde{t}) = M \{n(\tau) n(\tilde{t})\},$$

поэтому первый и третий члены взаимно уничтожаются, а (4) сводится к выражению:

$$D_p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(\tau, \tilde{t}) g(t - \tau) g(t - \tilde{t}) d\tau d\tilde{t}. \quad (5)$$

Будем считать, что шум $n(t)$ является эргодическим случайным процессом, по крайней мере, на значительном интервале времени, тогда его корреляционная функция зависит только от интервала времени:

$$B_n(\tau, \tilde{t}) = B_n(\tau - \tilde{t})$$

и её можно выразить через спектральную плотность мощности $W_n(\omega)$:

$$B_n(\tau - \tilde{t}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \cos \omega(\tau - \tilde{t}) d\omega. \quad (6)$$

Выражение (5) теперь можем переписать в виде:

$$\begin{aligned} D_p(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \cos \omega(\tau - \tilde{t}) g(t - \tau) g(t - \tilde{t}) d\tau d\tilde{t} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega\tau \cdot \cos \omega\tilde{t} + \sin \omega\tau \cdot \sin \omega\tilde{t}] g(t - \tau) g(t - \tilde{t}) d\tau d\tilde{t} d\omega = \quad (7) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega\tau g(t - \tau) d\tau \right]^2 + \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega\tau g(t - \tau) d\tau \right]^2 \right\} d\omega. \end{aligned}$$

Введём обозначения для входящих в (7) интегралов:

$$\begin{aligned} J_C(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega\tau g(t - \tau) d\tau; \\ J_S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega\tau g(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Тогда вместо (7) для искомой дисперсии получим:

$$D_P(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) [J_C(\omega)^2 + J_S(\omega)^2] d\omega. \quad (9)$$

Преобразуем выражение для интеграла $J_C(\omega)$ (8), заменив тригонометрические функции по формулам Эйлера:

$$J_C(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau g(t - \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{j\omega \tau} d\tau + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau) e^{-j\omega \tau} d\tau. \quad (10)$$

Проведя очевидную замену переменных:

$$t_1 = t - \tau; \quad \tau = t - t_1; \quad d\tau = -dt_1,$$

вместо (10) будем иметь:

$$\begin{aligned} J_C(\omega) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) e^{j\omega(t-t_1)} dt_1 + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) e^{-j\omega(t-t_1)} dt_1 = \\ &= \frac{1}{2} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) e^{-j\omega t_1} dt_1 + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} g(t_1) e^{j\omega t_1} dt_1. \end{aligned} \quad (11)$$

Интегралы в (11) представляют собой выражения для преобразования Фурье от импульсной характеристики, следовательно, результат преобразований (8, 11) можно выразить через комплексный коэффициент передачи (ККП) фильтра $K(j\omega)$:

$$J_C(\omega) = \frac{1}{2} e^{j\omega t} K(j\omega) + \frac{1}{2} e^{-j\omega t} K^*(j\omega). \quad (12)$$

Аналогичными действиями для интеграла $J_S(\omega)$ получим:

$$J_S(\omega) = \frac{1}{2j} e^{j\omega t} K(j\omega) - \frac{1}{2j} e^{-j\omega t} K^*(j\omega). \quad (13)$$

Подстановка интегралов (8) в полученной форме (12, 13) позволяет упростить выражение (9) для дисперсии шума. Действительно, в подынтегральном выражении применим (12, 13):

$$J_C(\omega)^2 + J_S(\omega)^2 = \frac{1}{4} \left[e^{j2\omega t} K^2(j\omega) + e^{-j2\omega t} K^{2*}(j\omega) + 2K^2(\omega) \right] - \\ - \frac{1}{4} \left[e^{j2\omega t} K^2(j\omega) + e^{-j2\omega t} K^{2*}(j\omega) - 2K^2(\omega) \right] = K^2(\omega).$$

Здесь $K^2(\omega)$ – квадрат модуля частотной характеристики фильтра.

Таким образом, вместо (9) будем иметь:

$$D_P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) K^2(\omega) d\omega. \quad (14)$$

Из выражения (3) для МОЖ отклика фильтра следует, что импульсная характеристика $g(t)$ синтезируемого фильтра должна быть такой, чтобы в отсчётный момент времени T отклик имел некоторое ненулевое значение A :

$$M\{P(T)\} = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(T - \tau) d\tau = A. \quad (15)$$

С учётом известной связи между интегралом свёртки в (3) и частотным представлением отклика линейного устройства, а также свойств преобразования Фурье, (15) можем записать в форме:

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) g(T - \tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega T} d\omega. \quad (16)$$

Таким образом, мы пришли к изопериметрической задаче [6] отыскания вида функции $K(j\omega)$, при котором достигается минимум функционала (14) и выполняется условие (16).

Составим функцию Лагранжа L на основе подынтегральных выражений в (14, 16), введя в рассмотрение неизвестный множитель Лагранжа λ [6]:

$$\begin{aligned} L &= W_n(\omega) K^2(\omega) - \lambda S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega T} = \\ &= W_n(\omega) K(j\omega) K^*(j\omega) - \lambda S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega T}. \end{aligned} \quad (17)$$

Для поиска минимума функции Лагранжа продифференцируем её по $K(j\omega)$ и результат приравняем нулю:

$$\frac{dL}{dK(j\omega)} = W_n(\omega) K^*(j\omega) - \lambda S(j\omega) e^{j\omega T} = 0. \quad (18)$$

Отсюда следует, что комплексно-сопряжённый ККП фильтра должен удовлетворять условию:

$$K^*(j\omega) = \frac{\lambda S(j\omega) e^{j\omega T}}{W_n(\omega)}, \quad (19)$$

а сам ККП фильтра можно записать в виде:

$$K(j\omega) = \frac{\lambda^* S(j\omega) e^{-j\omega T}}{W_n(\omega)}. \quad (20)$$

Для определения множителя Лагранжа подставим (20) в условие (16):

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \frac{\lambda^* S(j\omega) e^{-j\omega T}}{W_n(\omega)} e^{j\omega T} d\omega, \quad (21)$$

откуда получаем:

$$\lambda = \frac{2\pi A}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega}. \quad (22)$$

Таким образом, ККП оптимального фильтра выражается соотношением:

$$K(j\omega) = \frac{2\pi A}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega} \cdot \frac{S^*(j\omega) e^{-j\omega T}}{W_n(\omega)}. \quad (23)$$

Энергетическое отношение сигнал-помеха h_{sn} в момент времени T равно отношению МОЖ отклика фильтра – введённой выше константы A (15) – к корню квадратному из дисперсии шума (14):

$$h_{sn} = \frac{M\{P(T)\}}{\sqrt{D_P}} = \frac{A}{\sqrt{D_P}}. \quad (24)$$

Преобразуем знаменатель в (24) с учётом (23)

$$\begin{aligned} \sqrt{D_P} &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) K^2(\omega) d\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \frac{4\pi^2 A^2}{\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega \right]^2} \cdot \frac{S^2(\omega)}{W_n^2(\omega)} d\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{2\pi A^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставив (25) в (24), получим:

$$h_{sn} = \frac{A}{A\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega}. \quad (26)$$

В работе [1] для оптимального обнаружителя сигнала, содержащего обесцараженный фильтр и «классический» согласованный фильтр (см. рис. 1 б), получена оценка отношения сигнал-помеха, совпадающая с соотношением (26). Это означает, что в предлагаемой схеме приёмника действительно можно

обойтись только одним оптимальным фильтром с ККП полученного вида (23) без снижения помехоустойчивости.

2. Оптимальный приёмник на основе коррелятора

Рассмотрим теперь возможность реализации приёмника на основе коррелятора, в составе которого также отсутствует обесцвечивающий фильтр (рис. 3).

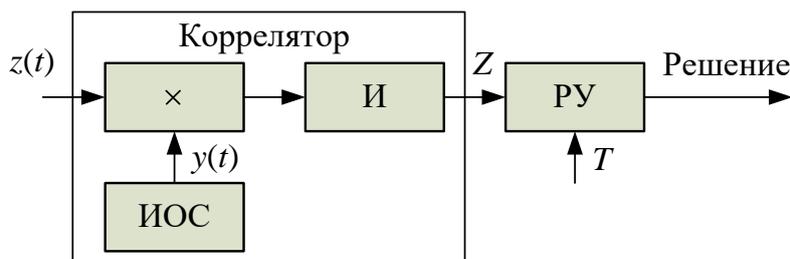


Рис. 3. Структурная схема приёмника на основе коррелятора при небелом шуме.

При небелом шуме коррелятор отличается от классического (см. рис. 1а) только формой опорного сигнала $y(t)$. Покажем, что оптимальный вид опорного сигнала, при котором достигается минимум дисперсии отклика коррелятора Z , можно установить. Должно также выполняться дополнительное условие: сигнальная составляющая отклика не должна обращаться в нуль.

Найдём МОЖ отклика коррелятора с учётом нулевого значения МОЖ помеховой составляющей и дополнительного условия рассматриваемой задачи:

$$\begin{aligned}
 M\{Z\} &= M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} z(t)y(t)dt\right\} = M\left\{\int_{-\infty}^{\infty} [s(t)+n(t)]y(t)dt\right\} = \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t)y(t)dt + \int_{-\infty}^{\infty} M\{n(t)\}y(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)y(t)dt = A \neq 0.
 \end{aligned}
 \tag{27}$$

Здесь интегрирование в бесконечных пределах введено для общности, что допустимо при ограниченной длительности сигнала.

Запишем теперь выражение для дисперсии отклика и преобразуем его:

$$\begin{aligned}
 D_Z &= M \{Z^2\} - [M \{Z\}]^2 = \\
 &= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} z(t)y(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)y(\tau)d\tau \right\} - A^2 = \\
 &= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [s(t) + n(t)][s(\tau) + n(\tau)]y(t)y(\tau)dt d\tau \right\} - A^2 = \\
 &= M \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [s(t)s(\tau) + s(t)n(\tau) + s(\tau)n(t) + n(t)n(\tau)]y(t)y(\tau)dt d\tau \right\} - A^2.
 \end{aligned} \tag{28}$$

С учётом выражения (27), при равенстве нулю МОЖ шума, вместо (28) будем иметь:

$$D_Z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} M \{n(t)n(\tau)\}y(t)y(\tau)dt d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B_n(t, \tau)y(t)y(\tau)dt d\tau, \tag{29}$$

где $B_n(t, \tau)$ – корреляционная функция шума.

В предположении, что шум $n(t)$ является эргодическим случайным процессом, выразим его корреляционную функцию через спектральную плотность мощности шума $W_n(\omega)$:

$$B_n(t, \tau) = B_n(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \cos \omega(t - \tau) d\omega. \tag{30}$$

Тогда дисперсию отклика (29) можем преобразовать к виду:

$$\begin{aligned}
 D_Z &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \cos \omega(t - \tau) y(t) y(\tau) dt d\tau d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [\cos \omega t \cos \omega \tau + \sin \omega t \sin \omega \tau] y(t) y(\tau) dt d\tau d\omega = \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \left\{ \left[\int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t y(t) dt \right]^2 + \left[\int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t y(t) dt \right]^2 \right\} d\omega.
 \end{aligned} \tag{31}$$

Для входящих в (31) интегралов введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned} J_C(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t y(t) dt; \\ J_S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t y(t) dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Тогда (31) можно записать в виде:

$$D_Z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \{J_C(\omega)^2 + J_S(\omega)^2\} d\omega. \quad (33)$$

Заменяя тригонометрические функции по формулам Эйлера, выразим интегралы (32) через спектральную плотность $Y(j\omega)$ опорного сигнала $y(t)$:

$$\begin{aligned} J_C(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega t y(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{j\omega t} dt + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} Y(j\omega) + \frac{1}{2} Y^*(j\omega); \\ J_S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \sin \omega t y(t) dt = \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{j\omega t} dt - \frac{1}{2j} \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2j} Y(j\omega) - \frac{1}{2j} Y^*(j\omega). \end{aligned} \quad (34)$$

Подставив (34) в (33), получим:

$$\begin{aligned} D_Z &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \left\{ \left[\frac{1}{2} Y(j\omega) + \frac{1}{2} Y^*(j\omega) \right]^2 + \left[\frac{1}{2j} Y(j\omega) - \frac{1}{2j} Y^*(j\omega) \right]^2 \right\} d\omega = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) Y^2(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (35)$$

Для поиска минимума дисперсии (35) по спектральной плотности $Y(j\omega)$ опорного сигнала при ограничении (27) составим функцию Лангранжа L , введя неизвестный множитель λ [6]:

$$L = W_n(\omega)Y^2(\omega) - \lambda S(j\omega)Y(j\omega) = W_n(\omega)Y(j\omega)Y(j\omega) - \lambda S(j\omega)Y(j\omega). \quad (36)$$

Условие минимума этой функции запишем как равенство нулю производной по комплексно-сопряжённой спектральной плотности $Y(j\omega)$:

$$\frac{dL}{dY(j\omega)} = W_n(\omega)Y(j\omega) - \lambda S(j\omega) = 0, \quad (37)$$

откуда находим:

$$Y(j\omega) = \lambda \frac{S(j\omega)}{W_n(\omega)}. \quad (38)$$

Ограничение (27) можно переписать через спектральную плотность сигнала:

$$M\{Z\} = A = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)y(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega)Y(j\omega)d\omega, \quad (39)$$

тогда для определения множителя Лангранжа λ будем иметь уравнение:

$$A = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) \lambda \frac{S(j\omega)}{W_n(\omega)} d\omega.$$

Отсюда находим:

$$\lambda = \frac{2\pi A}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega}. \quad (40)$$

Подставив в (35) спектральную плотность опорного сигнала $Y(j\omega)$, с учётом (40) будем иметь:

$$\begin{aligned}
 D_z &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) Y^2(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_n(\omega) \lambda^2 \frac{S^2(\omega)}{W_n^2(\omega)} d\omega = \\
 &= \frac{\lambda^2}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega = \frac{2\pi A^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega}.
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Теперь можем записать выражение для отношения сигнал-помеха на выходе коррелятора:

$$h_{sn} = \frac{A}{\sqrt{D_z}} = \frac{A}{\sqrt{\frac{2\pi A^2}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega}}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega}.
 \tag{42}$$

Полученная оценка совпадает с нашим результатом (26), полученным для согласованного фильтра. Следовательно, коррелятор, опорный сигнал $y(t)$ в котором имеет спектральную плотность $Y(j\omega)$ вида:

$$Y(j\omega) = \frac{2\pi A}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega} \cdot \frac{S(j\omega)}{W_n(\omega)}
 \tag{43}$$

обеспечивает такую же помехоустойчивость приёма, как и оптимальный фильтр с комплексным коэффициентом передачи полученного нами вида (23).

3. Оценка отношения сигнал-шум на выходе оптимального приёмника для случая полосно ограниченной помехи

Несмотря на то, что в канале передачи сигналов всегда присутствует белый шум, теоретический интерес представляет случай, когда спектральная плотность мощности помехи на входе приёмника сосредоточена в некоторой частотной полосе, меньшей полосы, занимаемой сигналом. Тогда в знаменателях выражений (23, 43) формально появляются нулевые значения функции $W_n(\omega)$, входящей в знаменатели этих соотношений дважды, что приводит

к неопределённости типа «бесконечность, делённая на бесконечность». Для раскрытия данной неопределённости воспользуемся следующим приёмом.

Введём функцию $W(\omega)$, отличную от нуля во всём диапазоне частот и совпадающую с $W_n(\omega)$ в некоторой полосе $\pm\Delta\omega/2$ вокруг центральной частоты спектра шума ω_0 :

$$W_n(\omega) = W(\omega) \left[h\left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}\right) - h\left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}\right) \right], \quad (44)$$

где $h(x)$ – функция Хевисайда.

Можем считать, что аргументы функций Хевисайда в (44) получены предельным переходом от конечных значений некоего условного аргумента x

$$W_n(\omega) = W(\omega) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left[h\left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} + \infty - x\right) - h\left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} - \infty + x\right) \right]. \quad (45)$$

Преобразуем знаменатель выражения (43) с учётом (45):

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W_n(\omega)} d\omega \cdot W_n(\omega) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W(\omega) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left[h\left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} + \infty - x\right) - h\left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} - \infty + x\right) \right]} d\omega \times \\ & \quad \times W(\omega) \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left[h\left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} + \infty - x\right) - h\left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} - \infty + x\right) \right] = \\ & = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega) \left[h\left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} + \infty - x\right) - h\left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} - \infty + x\right) \right]}{W(\omega) \left[h\left(\omega - \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} + \infty - x\right) - h\left(\omega - \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} - \infty + x\right) \right]} d\omega \cdot W(\omega) = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S^2(\omega)}{W(\omega)} d\omega \cdot W(\omega). \end{aligned} \quad (46)$$

Так как мы перешли к функции, заведомо отличной от нуля, неопределённость можно считать снятой.

Заключение

На основе классической теории оптимального приёма сигнала в канале с аддитивной помехой типа гауссова белого шума был рассмотрен канал с шумом, не являющимся белым. В отличие от известных решений, базирующихся на применении, кроме согласованного фильтра или коррелятора, дополнительного, «обеляющего» фильтра, предложено применить один фильтр или один коррелятор. Условием оптимальности такого фильтра или коррелятора выбрано достижение минимума дисперсии отклика этих устройств при ограничении на сигнальную составляющую отклика. Поставленная задача решена методом множителя Лагранжа. В результате её решения получены соотношения для параметров оптимального фильтра и опорного сигнала коррелятора, а также для оценки отношения сигнал-помеха на выходе этих устройств в момент принятия решения. Так как эти оценки совпадают с известными результатами для приёмников с обеляющими фильтрами, можно утверждать, что предложенные более простые технические решения способны обеспечить существенный эффект в устройствах обнаружения и различения сигналов ограниченной длительности.

В частности, можно ожидать, что при изменении статистических характеристик небелого шума адаптация параметров опорного сигнала коррелятора будет осуществляться более простыми техническими средствами, чем адаптация параметров обеляющего и согласованного фильтров.

Направлением дальнейших исследований может быть поиск вариантов технической реализации предложенных устройств.

Литература

1. Радиоэлектронные системы: основы построения и теория. Справочник / Я. Д. Ширман, С. Т. Багдасарян, А.С. Маляренко [и др.]; под ред. Я. Д. Ширмана. – Москва: Радиотехника, 2007. – 510 с.
2. Топчий, П. Н. Применение обесцвечивающего фильтра для обнаружения и различения полезного сигнала при небелом шуме / П. Н. Топчий, С. Г. Почивалов, А. С. Демченко // 78-я науч.-техн. конф., посвящ. Дню Радио, 24-28 апр. 2023 г.: матер. конф. – Санкт-Петербург: НТО РЭС им. А. С. Попова, 2023. – С. 119–121.
3. Милащенко, Е. А. Метод адаптивного нелинейного подавления негауссовских помех в когерентном полосовом тракте приемника / Е. А. Милащенко, А. А. Язовский // Труды учебных заведений связи. – 2019. – Т. 5. – № 4. – С. 49-57. – URL: <https://doi.org/10.31854/1813-324X-2019-5-4-49-57>.
4. Милащенко, Е. А. Реализация способа адаптивного нелинейного подавления негауссовских помех в когерентном полосовом приемном тракте и оценка его эффективности / Е. А. Милащенко, А. А. Язовский // Вестник Московского энергетического института. – 2019. – № 5. – С. 142-149. – URL: <https://doi.org/10.24160/1993-6982-2019-5-142-149>.
5. Дегтярев, А. Н. Синтез согласованных фильтров / А. Н. Дегтярев., И. Л. Афонин, А. Л. Поляков, А. С. Кожемякин // Журнал радиоэлектроники [электронный журнал]. – 2021. – № 4. – URL: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2021.4.9>.
6. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн. – Москва: Наука, 1984. – 831 с.

Для цитирования:

Дегтярёв, А.Н., Афонин И.Л., Слезкин В.Г., Слезкин Г.В. Оптимальный приёмник, обеспечивающий максимальное отношение сигнал-помеха в условиях действия небелого негауссова шума. // Журнал радиоэлектроники. 2024. – № 7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.7.1>