DOI: https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.7.2

УДК: 621.317.7

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ ДИСКРЕТИЗАЦИИ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОСНОВНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГАРМОНИЧЕСКИХ СИГНАЛОВ

И.Н. Зайцева[1], В.Н. Угольков[2]

[1]Елецкий государственный университет им. И.А. Бунина
399770, Липецкая область, Елец, ул. Коммунаров, 28

[2]ООО «Инженерная компания»
660130, Красноярск

Статья поступила в редакцию 11 апреля 2024 г.

Аннотация. Представлены формулировка и доказательство теоремы о необходимости и достаточности трёх мгновенных отсчётов гармонических сигналов для определения их основных фундаментальных параметров. Описывается разработанный аналого-цифровой алгоритм определения основных параметров гармонических сигналов по минимуму мгновенных отсчётов за время, меньшее их периода, на основе доказанной теоремы. Приведены результаты математического моделирования разработанного алгоритма, его погрешности определения частоты гармонического сигнала по минимуму мгновенных отсчётов за время, меньшее их периода, в том числе для сигналов с гармониками.

Ключевые слова: основные параметры, теорема, доказательство, погрешности, гармонический сигнал, мгновенные отсчёты, дискретизация, равномерная, стохастическая, меньшее периода время обращения, математическое моделирование.

Автор для переписки: Зайцева Ирина Николаевна, irina-zai@yandex.ru

Введение

Сокращение времени определения основных параметров гармонических сигналов [1] – амплитуды, частоты, фазы (сдвига фаз) и спектра на основе различных базисных функций – до минимальных значений времени обращения к физическим сигналам (по крайней мере, значительно меньшее их периода существования в десятки и более раз), а также разработка фундаментальных аналого-цифровых алгоритмов, соответствующих этой цели, является весьма актуальной задачей.

Проблема сокращения времени обращения к сигналам для определения их параметров рассматривалась в виде постановки всегда, с момента возникновения теории обработки сигналов в электротехнике, измерительной технике, радиотехнике и многочисленных практических приложениях этой отрасли науки и техники. Появились новые результаты теоретических исследований и практического применения этих исследований в различных областях науки и техники. В некоторых работах авторов раскрыты теоретические аспекты и приведено обоснование решения по разработке аналого-цифровых алгоритмов [2, 3] и их программной реализации на разработанной специализированной миниЭВМ с оригинальной операционной системой реального времени [4].

Развитие этих алгоритмов, связано с тем, что при определении параметров сигналов, характеризующих инфранизкочастотные физические волновые процессы, а именно гармонические сигналы с периодами, измеряемыми часами, сутками, месяцами и более длительными периодами традиционными способами, обычно требует для анализа нескольких периодов таких колебаний. А это огромное время, необходимое для анализа волновых процессов в жидкостях (например, волны цунами в океане), синоптических явлений (тепловые волны, воздушные потоки), сейсмических явлений (землетрясения) [5], галактических процессов, которое не позволяет прогнозировать критическое их развитие во времени, хотя бы в краткосрочной перспективе гарантированного их прогнозируемого существования как волнового процесса.

Решение подобных вопросов дискретизации и определения основных параметров гармонических сигналов по минимуму мгновенных отсчётов за время, меньшее их периода, ставит задачу о минимально необходимом и достаточном количестве мгновенных отсчётов из анализируемых сигналов для решения этих вопросов.

1. Формулировка и доказательство теоремы о необходимости и достаточности трёх мгновенных отсчётов гармонических сигналов для определения их основных параметров

Сформулируем эту задачу в виде теоремы и докажем её.

Теорема. Для определения основных параметров гармонических сигналов (амплитуды, частоты, сдвига фаз) необходимо и достаточно трёх мгновенных отсчётов сигналов, взятых последовательно во времени через любые равные интервалы времени Δt<T/2 (т.е. половины Т-периода частоты исследуемого сигнала).

Доказательство. При равномерной дискретизации гармонического сигнала [3] $y(t) = A_m \sin(\omega t)$ через время Δt имеем множество мгновенных значений y_n:

$$\begin{cases} y_1 = A_m \sin(\omega t_1); \\ y_2 = A_m \sin\left[\omega(t_1 + \Delta t)\right]; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = A_m \sin\left[\omega(t_1 + (n-1)\Delta t)\right]; \end{cases} \tag{1}$$

Задача определения параметров гармонического сигнала амплитуды A_m и частоты ω, заключается в определении функциональных зависимостей $A_m = f_1(y_1, y_2, y_3, \dots y_n)$ и $\omega = f_2(y_1, y_2, y_3, \dots y_n)$.

При этом задачу минимизации количества отсчётов можно решить, исключая из функций f_1 и f_2 значения, зависимые от остальных значений этой функции, так как они не содержат новой информации о сигнале. Для исключения из функций f_1 и f_2 зависимых мгновенных значений рассмотрим свойства множества y_n.

Выражение $y(t) = A_m \sin(\omega t)$ является мнимой частью комплексного числа:

$$Z(t) = x(t) + iy(t) = A_m \cos(\omega t) + A_m \sin(\omega t)\,.$$

Поэтому множеству мгновенных значений (1) соответствует множество комплексных чисел Z_n:

$$\begin{aligned} &Z_1 = x_1 + iy_1; \\ &Z_2 = x_2 + iy_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &Z_n = x_n + iy_n;. \end{aligned} \tag{2}$$

Любые три комплексных числа удовлетворяют уравнению:

$$kZ_{n+1} + mZ_{n+2} = Z_{n+3.}\,. \tag{3}$$

В этом случае k и m однозначно определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} kx_{n+1} + mx_{n+2} = x_{n+3}; \\ ky_{n+1} + my_{n+2} = y_{n+3} \end{cases}. \tag{4}$$

В случае равномерной дискретизации для любых трёх соседних отсчётов с учётом системы уравнений (1), имеем:

$$m = \frac{x_{n+1}y_{n+3} - y_{n+1}x_{n+3}}{x_{n+1}y_{n+2} - y_{n+1}x_{n+2}} = 2\cos(\omega\Delta t); \tag{5}$$

$$k = \frac{x_{n+3} - mx_{n+2}}{x_{n+1}} = 1\,. \tag{6}$$

Из (4)-(6) имеем рекуррентную формулу:

$$y_{n+2} = 2\cos(\omega\Delta t)\,y_{n+1} - y_n\,. \tag{7}$$

С учётом изложенного можно сделать вывод, что все параметры гармонического сигнала определяются по любым трём отсчётам, и для определения основных параметров гармонического сигнала нет необходимости использовать более трёх отсчётов, так как остальные отсчёты выражаются через три рядом стоящих отсчёта.

Зависимость (7) позволяет перейти от функциональных зависимостей $A_m = f_1(y_1, y_2, y_3, ...y_n)$ и $\omega = f_2(y_1, y_2, y_3, ...y_n)$ к функциям $y(t) = A_m \sin(\omega t)$ и $y(t) = A_m \sin(\omega t)$.

Зависимость $y_n = f(y_1, y_2, y_3)$ в общем случае не исключает зависимости $f(y_1, y_2, y_3) = 0$.

Для исследования данного случая рассмотрим Якобиан системы уравнений гармонического сигнала *y(t)*:

$$\begin{cases} y_1 = A_m \sin(\omega t_1); \\ y_2 = A_m \sin\left[\omega(t_1 + \Delta t)\right]; \\ y_3 = A_m \sin\left[\omega(t_1 + 2\Delta t)\right];, \end{cases} \tag{8}$$

который равен:

$$D = A^2{}_m \omega \begin{vmatrix} \sin(\omega t_1) & \sin(\omega(t_1 + \Delta t)) & \sin(\omega(t_1 + 2\Delta t)) \\ t_1 \cos(\omega t_1) & (t_1 + \Delta t)\cos(\omega(t_1 + \Delta t)) & (t_1 + 2\Delta t)\cos(\omega(t_1 + 2\Delta t)) \\ \cos(\omega t_1) & \cos(\omega(t_1 + \Delta t)) & \cos(\omega(t_1 + 2\Delta t)) \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Легко показать, что при значениях $t_1 = 0$ и $\omega t_1 = \pi / 2$, $D \neq 0$

Поскольку Якобиан является аналитической функцией ($\sin(\omega t_1)$ и $\cos(\omega t_1)$ – функции аналитические), то он будет не равен нулю также в окрестностях указанных точек $t_1 = 0$ и $\omega t_1 = \pi / 2$ [6].

Исходя из этого, согласно теореме о независимости неявных функций [6], можно утверждать, что $f(y_1, y_2, y_3) \neq 0$, и все отсчёты y_1, y_2, y_3 являются взаимно независимыми, т.е. нельзя взять менее трёх мгновенных отсчётов для определения параметров гармонического сигнала за время, меньшее одного периода.

Решение системы (8) для определения A_m в случае равномерной дискретизации гармонического сигнала, имеет вид [11]:

$$A_m = 2y_2 \left(\frac{y^2{}_2 - y_1 y_3}{4y^2{}_2 - (y_1 + y_3)^2} \right)^{0.5}. \tag{10}$$

Из выражения (10) следует, что A_m определяется однозначно для всех частот ω.

Легко показать, используя систему уравнений (8), что:

$$\omega = \frac{1}{\Delta t} \arccos\left(\frac{y_1 + y_3}{2y_2} \right). \tag{11}$$

В общем случае частота ω гармонического сигнала определяется по трём мгновенным отсчётам y_1, y_2, y_3 неоднозначно, так как функция arccos является многозначной, но в случае $\Delta t<T/2$ частота ω определяется однозначно, так как в этом случае $\varphi_3=\omega\Delta t$ является главным значением функции arccos.

Для определения сдвига фаз между двумя гармоническими сигналами необходимо дополнительно выбрать три синхронных отсчёта из второго гармонического сигнала $y(t)$.

Тогда сдвиг фаз между сигналами $y(t)$ и $y_1(t)$ (отнесённый ко времени t_1) определяется выражением:

$$\varphi = \arcsin(y_{11} / A_{m1}) - \arcsin(y_1 / A_m). \tag{12}$$

В выражении (12) амплитуды A_{m1} и A_m определяются однозначно по (10). Причём, сдвиг фаз φ определяется однозначно от $-\pi/2$ до $-\pi/2$, так как в случае $\Delta t<T/2$ в выражении (10) используются главные значения функции $\arcsin(y_1 / A_m)$. Таким образом, сформулированная теорема доказана.

2. Дальнейшее развитие методов и алгоритмов на основе доказанной теоремы. Исследование алгоритмов с помощью математического моделирования.

Дальнейшее развитие методов и алгоритмов, например, с целью увеличения помехозащищённости при определении параметров сигналов, разработанных на основе доказанной теоремы, лежит в области разработки и исследований аналого-цифровых алгоритмов определения основных параметров гармонических сигналов за время обращения, меньшее их периода, при представлении мгновенных выборок в исследуемых сигналах в виде интегральных значений [7]. В этом случае каждая из трёх дискретных выборок представлена рядом мгновенных значений сигналов внутри самой интегральной выборки, а сама выборка представлена одним интегральным значением, например, в простейшем случае математическим ожиданием [7,8]. При этом все доказанные в теореме приведённые выше выводы сохраняются. Причём, закон дискретизации внутри интегральных выборок может быть любым, в зависимости от исследуемого гармонического сигнала с помехами или шумами. Это равномерная или неравномерная (стохастическая) дискретизация во времени [7,9].

Особый интерес представляет использование стохастической дискретизации, которая позволяет строить помехозащищённые оптимальные аналого-цифровые алгоритмы определения основных параметров гармонических сигналов за время обращения к ним, меньшее их периода, с использованием в практической реализации высокоинтегрированных аналого-цифровых процессоров [8-11].

На основе доказанной теоремы в работах авторов [8,9] разработан и исследован алгоритм определения частоты гармонических сигналов вероятностно-статистическим методом. Основной особенностью данного алгоритма является короткое время обращения к исследуемому сигналу, значительно меньшее его периода, по трём интегральным выборкам с цифровой обработкой. Мгновенные значения в каждой выборке из исследуемого сигнала основываются на стохастической дискретизации во времени по равномерному закону распределения с временем обращения к сигналу Tm<T/2:

$$\omega' = \frac{1}{T_m} \arccos\left(\frac{m_{1\Sigma} + m_{3\Sigma}}{2m_{2\Sigma}}\right), \tag{13}$$

где выражения $m_{1\Sigma}$, $m_{2\Sigma}$, $m_{3\Sigma}$ определяются как математические ожидания $m_{1\Sigma}$ первой, второй $m_{2\Sigma}$, и третьей $m_{3\Sigma}$ интегральных выборок из сигнала со стохастической дискретизацией во времени. Алгоритм не зависит от амплитуды сигнала A_m и его начальной фазы α_0.

Математическое моделирование приведённого алгоритма определения частоты гармонического сигнала на основе стохастической дискретизации, показало работоспособность его с высокой точностью [9] (таблица 1).

Таблица 1. Результаты определения частоты.

Выборки (мат. ожидания)			Эталонная частота	Частота, определённая по алгоритму	Погрешность	Точность оцифрованных значений (знаков после запятой)
$m_1(t)$	$m_2(t)$	$m_3(t)$				
4,4720	9,5647	6,7770	125,6637	125,6201	0,04%	1
4,4735	9,5613	6,7800	125,6637	125,5475	0,09%	2
4,4730	9,5613	6,7797	125,6637	125,5531	0,09%	3
4,4730	9,5613	6,7798	125,6637	125,5529	0,09%	4

Была оценена погрешность определения основной частоты ω гармонического сигнала по мгновенным выборкам с применением стохастической дискретизации и показано, что применение интегральных выборок со стохастической дискретизацией во времени позволяет уменьшить погрешность определения частоты гармонического сигнала ω основной частоты при наличии в сигнале пяти гармоник [8] (таблица 2).

Таблица 2. Полученные результаты погрешностей определения частоты исследуемого сигнала с гармониками за время, меньшее одного периода со стохастической дискретизацией по времени.

Процент гармоник (5 гармоник) %	Относительная погрешность определения частоты по мгновенным отсчетам, %	Относительная погрешность определения частоты со стохастической дискретизацией, %	Выигрыш в погрешности определения частоты за время менее периода, %
0,1	≤5	≤5	0
3	15	10	+5
10	30	20	+10
20	42	29	+13
30	48	36	+8
50	55	44	+11
100	63	53	+10

На основе доказанной теоремы, возможно построение алгоритмов нахождения спектров Фурье сигналов с гармониками. Такой алгоритм был разработан и приведён в работе [2].

Отметим также, что время обращения Δt к сигналам, вообще говоря, может быть любым: больше и не кратным периоду гармонического сигнала. В этом случае при определении сдвига фаз возникает неоднозначность в определении сдвига фаз, вызванная кумулятивным эффектом, т.к. функции arccos или arcsin неоднозначны. В работе [12] исследовано и предложено решение этих проблем методом устранения кумулятивного эффекта при определении сдвига фаз.

Заключение

В статье сформулирована и доказана теорема о необходимости и достаточности трёх мгновенных отсчётов гармонических сигналов для определения их основных параметров.

Приведен пример разработанного алгоритма и исследование погрешностей на основе доказанной теоремы методом математического моделирования. Полученные результаты математического моделирования алгоритма подтверждают правильность и необходимость её доказательства. Отмечены результаты создания и исследования ряда других алгоритмов на основе доказанной теоремы.

Решение же фундаментальных сложнейших вопросов, сокращения времени дискретизации Δt гармонического сигнала, определяемого физической природой, его порождающей до микро- (например, квантовые явления) или макро- (например, тепловые волны) уровня, позволяющего достоверно с заданной вероятностью определять его амплитудное значение и разделение рядом стоящих дискретных отсчётов, требует дальнейших исследований.

Литература

1. Вакман Д.Е., Вайнштейн Л.А. Амплитуда, фаза, частота − основные понятия теории колебаний //Успехи физических наук. – 1977. – Т. 123. – №. 12. – С. 657-682.
2. Ugol'kov V.N. Some problems of the digital analysis of signal spectra //Measurement Techniques. – 2004. – Т. 47. – №. 6. – С. 601-606. https://doi.org/10.1023/B:METE.0000039767.43789.cc
3. Мешков В.П., Угольков В.Н. Определение параметров гармонических сигналов по минимуму мгновенных отсчетов //ПРЕПРИНТ ИФСО-262 Ф./ В.П. Мешков, В.Н Угольков.- Красноярск: Ин-т физики СО АН СССР. – 1984.
4. Гришин В.А., Угольников В.Н. Секционные микропроцессоры и их программирование. – Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
5. Хаин В.Е., Халилов Э.Н. Пространственно-временные закономерности сейсмической и вулканической активности. – 2008.
6. Апайчева Л.А. Теория функций комплексного переменного. Операционное исчисление. – 2019.
7. Ugol'kov V.N. Methods of measuring the phase shift and amplitude of harmonic signals using integral samples //Measurement Techniques. – 2003. – Т. 46. – №. 5. – С. 495-501. https://doi.org/10.1023/A:1025317616998
8. Zaitseva I.N. Error estimation of the algorithm for the phase shift definition of harmonic signals in the timeless than the signal period using stochastic sampling //Periódico Tchê Química. – 2020. – Т. 17. – №. 36. https://doi.org/10.52571/PTQ.v17.n36.2020.229_Periodico36_pgs_213_222.pdf

9. Зайцева И.Н., Угольков В.Н. Алгоритм определения частоты гармонического сигнала с использованием стохастической дискретизации //Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. – 2017. – №. 4. – С. 54-59. https://doi.org/10.24143/2072-9502-2017-4-54-59

10. Поршнев С.В., Кусайкин Д.В. Исследование алгоритмов восстановления дискретных сигналов, заданных на неравномерной временной сетке с неизвестными значениями координат узлов. – 2016.

11. Горбунов Ю.Н., Куликов Г.В., Шпак А.В. Радиолокация: стохастический подход. – 2016.

12. Шахов Э.К., Угольков В.Н. К вопросу определения сдвига фаз гармонических сигналов за время менее периода при наличии постоянной составляющей. – 1986.

Для цитирования:

Зайцева И.Н., Угольков В.Н. О некоторых вопросах дискретизации и определения основных параметров гармонических сигналов. // Журнал радиоэлектроники. – 2024. – №. 7. https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.7.2