

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.7.12>

УДК: 537.876

О СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ЛИНЕЙНО ЧАСТОТНО МОДУЛИРОВАННОГО СИГНАЛА В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ (В РАМКАХ МЕТОДА МОМЕНТОВ)

Н.С. Бухман

**Самарский государственный технический университет, г. Самара
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, д.244**

Статья поступила в редакцию 13 апреля 2025 г.

Аннотация. Показано, что в селективно-поглощающей среде скорость распространения линейно частотно модулированного сигнала отличается от его групповой скорости и зависит от его индекса модуляции, причем «модуляционная» добавка к групповому времени задержки меняет знак на противоположный при изменении знака индекса модуляции. В результате скорость распространения линейно частотно модулированного сигнала может быть досветовой при его сверхсветовой групповой скорости и сверхсветовой при его досветовой групповой скорости. При попадании центра спектральной линии в пределы спектра линейно частотно модулированного сигнала происходит разделение единого линейно частотно модулированного сигнала на два сигнала, один из которых распространяется со скоростью выше групповой (возможно – и выше вакуумной световой), а второй – ниже групповой. Разница в скорости распространения линейно частотно модулированных сигналов, отличающихся знаком индекса модуляции, может приводить к тому, что исходно амплитудно-модулированный сигнал при распространении в селективно-поглощающей среде может разделяться на несколько сигналов,

распространяющихся с разной скоростью, причем эти сигналы при определенных условиях могут также быть чисто амплитудно-модулированными. Эти эффекты, очевидно, могут иметь место не только при распространении сигнала в селективно-поглощающей среде, но и при его отражении от селективно-поглощающей поверхности и при его распространении через линейные фильтры в теории цепей.

Ключевые слова: линейно частотно модулированный сигнал, групповая скорость, сверхсветовая групповая скорость, досветовая групповая скорость, диспергирующая среда.

Автор для переписки: Бухман Николай Сергеевич, nik3142@yandex.ru

Введение

Хорошо известно [1-3], что распространение узкополосного сигнала в непоглощающей диспергирующей среде происходит с так называемой групповой скоростью. Этот результат сохраняется и в поглощающих средах, если только можно пренебречь дисперсией коэффициента поглощения среды, то есть его зависимостью от частоты волны.

К сожалению, соотношения Крамерса-Кронига [1-3] показывают, что любая среда с дисперсией показателя преломления имеет также и дисперсию коэффициента поглощения. Эта дисперсия коэффициента поглощения с ростом протяженности трассы приводит к искажению и «дрейфу» частотного спектра сигнала в сторону частот с меньшим поглощением, а следовательно – и к изменению скорости распространения сигнала. Существенно, что в общем случае упомянутый «дрейф» спектра сигнала приводит к изменению скорости распространения сигнала не только за счет изменения «актуальной» в данной точке трассы частоты несущей сигнала, но и за счет изменения «актуального» в данной точке трассы момента появления сигнала в начальной точке трассы, который (см. ниже) тоже изменяется с изменением спектра сигнала.

Для изучения вопроса о скорости распространения сигнала за пределами области применимости первого порядка классической теории

дисперсии [1] (то есть приближения групповой скорости) естественно воспользоваться методом моментов [4-6], который оперирует «средними» характеристиками сигнала, а именно его энергией:

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) dt; \quad (1)$$

«средним временем задержки» сигнала в точке Z трассы:

$$t_{av}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) t dt \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) dt, \quad (2)$$

среднеквадратической длительностью сигнала в точке Z трассы:

$$T_{av}(z) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) (t - t_{av})^2 dt \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) dt}, \quad (3)$$

и средней амплитудой сигнала в точке Z трассы:

$$A_{av}(z) = \sqrt{W(z)/(2T_{av}(z))}. \quad (4)$$

В (1)-(4) $I(z,t) = |A(z,t)|^2$ – временная зависимость интенсивности сигнала в данной точке трассы Z , $A(z,t)$ – комплексная амплитуда узкополосного сигнала в данной точке трассы Z .

Именно такое изучение и предпринято в данной работе на примере узкополосного сигнала, распространяющегося в диспергирующей среде с лоренцевой спектральной линией. Основным интерес для нас представляет вопрос об отличии скорости распространения линейно частотно модулированных (ЛЧМ) сигналов от их групповой скорости в средах с дисперсией поглощения.

1. Основные соотношения

Пусть узкополосный сигнал $E(z, t)$ с комплексной огибающей $A(z, t)$ распространяется в однородной изотропной среде вдоль оси z . Тогда:

$$\begin{aligned}
 E(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\omega}(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \\
 E_{\omega}(z, \omega) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} E(z, t) \exp(i\omega t) dt, \\
 E(z, t) &= A(z, t) \exp(-i\omega_1 t) + A^*(z, t) \exp(i\omega_1 t), \\
 A(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\Omega}(z, \Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega, \\
 A_{\Omega}(z, \Omega) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) \exp(i\Omega t) dt, \\
 E_{\omega}(z, \omega) &= A_{\Omega}(z, \omega - \omega_1) + \left(A_{\Omega}(z, -(\omega + \omega_1)) \right)^*, \\
 I(z, t) &= |A(z, t)|^2, \\
 I_{\Omega}(z, \Omega) &= |A_{\Omega}(z, \Omega)|^2 \neq (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} I(z, t) \exp(i\Omega t) dt.
 \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $E(z, t)$ и $E_{\omega}(z, \omega)$ – высокочастотный сигнал и его спектр в точке z , $A(z, t)$ и $A_{\Omega}(z, \Omega)$ – низкочастотная комплексная огибающая сигнала и ее спектр в точке z , $I(z, t)$ и $I_{\Omega}(z, \Omega)$ – интенсивность сигнала и интенсивность его спектра в точке z . Мы предполагаем, что сигнал является узкополосным, то есть ширина спектра сигнала мала в сравнении с частотой несущей ω_1 [1-3], но не обязательно мала в сравнении с шириной спектральной линии.

Обозначим спектр огибающей сигнала $A_{\Omega}(z, \Omega)$ в начальной точке $z = 0$ как $A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \equiv A_{\Omega}(0, \Omega)$. Тогда спектр огибающей сигнала в произвольной точке трассы z :

$$A_{\Omega}(z, \Omega) = A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(ik(\omega_1 + \Omega)z), \tag{6}$$

где $k(\omega) = (\omega/c)n(\omega) = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$ – комплексное волновое число для волны с частотой ω , $n(\omega)$ – комплексный показатель преломления среды.

В этих условиях для «средних» характеристик (1)-(4) сигнала имеем [6, Приложение]:

$$W(z) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega, \quad (7)$$

$$t_{av}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) \frac{\partial \phi_{\Omega}(z, \Omega)}{\partial \Omega} d\Omega \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega, \quad (8)$$

$$T_{av}^2(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{\partial |A_{\Omega}(z, \Omega)|}{\partial \Omega} \right)^2 + I_{\Omega}(z, \Omega) \left(\frac{\partial \phi_{\Omega}(z, \Omega)}{\partial \Omega} \right)^2 \right) d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) \frac{\partial \phi_{\Omega}(z, \Omega)}{\partial \Omega} d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega} \right)^2. \quad (9)$$

В (7)-(9) $I_{\Omega}(z, \Omega) = I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-2k_i(\omega_1 + \Omega)z)$ – интенсивность спектра сигнала в точке трассы z ($I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = |A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)|^2$ – то же самое в стартовой точке $z = 0$), $\phi_{\Omega}(z, \Omega) = \arg(A_{\Omega}(z, \Omega)) = \phi_{\Omega}^{(0)}(\Omega) + k_r(\omega_1 + \Omega)z$ – аргумент комплексной огибающей сигнала в точке трассы z ($\phi_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = \arg(A_{\Omega}^{(0)}(\Omega))$ – то же самое в точке старта $z = 0$). $|A_{\Omega}(z, \Omega)| = |A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)| \exp(-k_i(\omega_1 + \Omega)z)$ – модуль комплексной огибающей сигнала в точке трассы z .

Для времени задержки сигнала из (8) следует соотношение:

$$t_{av}(z) = t_{av}^{(0)}(z) + \frac{z}{v_{grav}(z)}, \quad (10)$$

где:

$$t_{av}^{(0)}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) \frac{\partial \varphi_{\Omega}^{(0)}(\Omega)}{\partial \Omega} d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega} - \quad (11)$$

зависящий от z момент времени, в который средняя точка сигнала появилась бы в стартовой точке трассы $z = 0$, если бы интенсивность спектра сигнала в этой точке была бы не $I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = I_{\Omega}(0, \Omega)$, а $I_{\Omega}(z, \Omega)$,

$$v_{grav}^{-1}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) \frac{\partial k_r(\omega_1 + \Omega)}{\partial \Omega} d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega} - \quad (12)$$

«средневзвешенное» по спектру сигнала в точке трассы z значение его обратной групповой скорости $v_{gr}^{-1}(z) = \frac{\partial k_r(\omega_1 + \Omega)}{\partial \Omega}$. В дальнейшем мы будем именовать величину $v_{grav}(z)$ «средней групповой скоростью сигнала». В общем случае с ростом протяженности трассы спектр сигнала деформируется ($I_{\Omega}(z, \Omega) = I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-2k_i(\omega_1 + \Omega)z)$), поэтому средняя групповая скорость и параметр $t_{av}^{(0)}(z)$ зависят от протяженности трассы z .

«Средней» скоростью сигнала естественно считать величину:

$$v_{av}(z) = \frac{z - 0}{t_{av}(z) - t_{av}(0)} = \left(\frac{1}{v_{grav}(z)} + \frac{1}{v_{mod}(z)} \right)^{-1} \neq v_{grav}(z),$$

где $v_{mod}(z) = \frac{z}{t_{av}^{(0)}(z) - t_{av}^{(0)}(0)}$ – некоторая дополнительная (к средней групповой)

скорость, связанная с непостоянством фазы стартового спектра сигнала $\varphi_{\Omega}^{(0)}(\Omega)$ и дисперсией коэффициента поглощения среды. В случае отсутствия дисперсии

поглощения среды или в частном случае сигналов с постоянной фазой стартового спектра (в том числе – для любых сигналов с вещественным стартовым спектром) $1/v_{\text{mod}}(z) = 0$ и средняя скорость сигнала совпадает с его средней групповой скоростью. В общем случае (в частности, для любой реальной среды, имеющей дисперсию поглощения и любых ЛЧМ в точке старта сигналов) $1/v_{\text{mod}}(z) \neq 0$ и средняя скорость сигнала отличается от его средней групповой скорости.

С использованием (11) нетрудно показать, что смена знака фазы стартового спектра сигнала $\varphi_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = \arg(A_{\Omega}^{(0)}(\Omega))$ на противоположный приводит к соответствующей смене знака функции $1/v_{\text{mod}}(z)$, то есть в зависимости от индекса модуляции ЛЧМ сигнала его скорость может быть как больше, так и меньше его средней групповой скорости. Разумеется, с ростом протяженности трассы спектр сигнала деформируется и поэтому как $v_{\text{grav}}(z)$, так и $v_{\text{mod}}(z)$ изменяются с изменением протяженности трассы z . Для оценок можно использовать значения этих параметров в стартовой точке трассы $z = 0$:

$$v_{\text{grav}}^{-1}(0) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \frac{\partial k_r(\omega_1 + \Omega)}{\partial \Omega} d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) d\Omega}, \quad (13)$$

$$v_{\text{mod}}^{-1}(0) = 2 \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) [k_i(\omega_1) - k_i(\omega_1 + \Omega)] \frac{\partial \varphi^{(0)}(\Omega)}{\partial \Omega} d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) d\Omega}. \quad (14)$$

Формула (14) выведена в предположении, что $t_{\text{av}}^{(0)}(0) = 0$, то есть отсчет времени начинается с момента прохождения «средней точки» сигнала через точку старта $z = 0$. Из (14) видно, что влияние частотной модуляции сигнала в стартовой точке на скорость его распространения определяется знаком

произведения $\frac{\partial \varphi_{\Omega}^{(0)}(\Omega)}{\partial \Omega} \frac{\partial k_i(\omega_1 + \Omega)}{\partial \Omega}$. В случае $\frac{\partial \varphi_{\Omega}^{(0)}(\Omega)}{\partial \Omega} \frac{\partial k_i(\omega_1 + \Omega)}{\partial \Omega} = 0$ имеем

$v_{av}(z) = v_{grav}(z)$ и скорость средней точки сигнала совпадает с его средней групповой скоростью (досветовой, световой или сверхсветовой – уж как получится, см. [7-28]). В случае $\frac{\partial \varphi_{\Omega}^{(0)}(\Omega)}{\partial \Omega} \frac{\partial k_i(\omega_1 + \Omega)}{\partial \Omega} > 0$ имеем $v_{mod}^{-1}(0) < 0$

и $v_{av}(z) > v_{grav}(z)$ – скорость средней точки сигнала является «сверхгрупповой».

В случае $\frac{\partial \varphi_{\Omega}^{(0)}(\Omega)}{\partial \Omega} \frac{\partial k_i(\omega_1 + \Omega)}{\partial \Omega} < 0$ имеем $v_{mod}^{-1}(0) > 0$ и $v_{av}(z) < v_{grav}(z)$ – скорость

средней точки сигнала является «догрупповой». Любопытно, что скорость средней точки сигнала может быть меньше вакуумной скорости света тогда, когда групповая скорость выше вакуумной световой и больше вакуумной скорости света тогда, когда групповая скорость является досветовой, что неоднократно отмечалось и ранее [14,15,19,25].

Отметим, что для отличия скорости распространения импульса от его средней групповой скорости необходимо и достаточно выполнение одновременно двух условий – непостоянства фазы спектра сигнала в точке старта и дисперсии коэффициента поглощения среды. Первое из этих условий не выполняется (по определению) для любых сигналов с постоянной стартовой фазой и выполняется (тоже по определению) для всех прочих типов сигналов, второе выполняется для любой реальной среды. Существенно, что при распространении сигнала в среде с дисперсией коэффициента преломления постоянство фазы спектра сигнала в некоторой точке трассы автоматически означает ее непостоянство во всех прочих точках трассы. Поэтому в среде с дисперсией поглощения точное совпадение скорости распространения сигнала и его средней групповой скорости, в общем и целом, выглядит как довольно-таки редкая случайность.

2. ЛЧМ гауссов импульс

В качестве иллюстрации ниже приведены численные результаты для ЛЧМ гауссова импульса со стартовым спектром:

$$A_{\Omega}^{(0)} = (4\pi p)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{4p}\right), \quad (15)$$

где $p = T_g^{-2} - i\beta/2$ и стартовой временной зависимостью:

$$A^{(0)}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{T_g^2}\right) \exp\left(\frac{i\beta t^2}{2}\right), \quad (16)$$

распространяющегося в газовой среде с волновым числом:

$$\begin{aligned} k(\omega) &= \frac{\omega}{c} + \frac{i\alpha}{1 - i(\omega - \omega_0)\tau} = k_r(\omega) + ik_i(\omega) = \\ &= \left(\frac{\omega}{c} - \frac{\alpha(\omega - \omega_0)\tau}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2} \right) + i \frac{\alpha}{1 + (\omega - \omega_0)^2 \tau^2}. \end{aligned} \quad (17)$$

В (15)-(17) T_g – характерная стартовая длительность ЛЧМ гауссова сигнала с частотой несущей ω_1 и индексом модуляции β , ω_0 – центральная частота лоренцевой спектральной линии, α – коэффициент поглощения (по амплитуде) в центре этой спектральной линии, τ – время когерентности этой спектральной линии. Стартовая среднеквадратичная длительность сигнала (16) $T_{av}(0) = T_g / 2$, стартовое время задержки $t_{av}(0) = 0$.

На рис. 1 показана зависимость десятичного логарифма коэффициента пропускания слоя вещества по энергии $\lg K(\xi)$ (рис. «а»; $\lg K(\xi) = -1$ соответствует ослаблению сигнала на 10 дБ), дополнительного (по отношению к «вакуумному») времени задержки «средней точки» волнового импульса $(t_{av}(\xi) - z/c)/\tau$ (рис. «б») и «среднеквадратичной» продолжительности сигнала $T_{av}(\xi)/\tau$ (рис. «в») от оптической толщины слоя вещества $\xi = \alpha z$

для сигнала (15),(16) с исходной продолжительностью $T_g = 10\tau$ ($T_{av}(0) = 5\tau$), частотой несущей $\omega_1 = \omega_0 + 1/\tau$ и индексом частотной модуляции $\beta = 0$ (кривые 1), $\beta = 0.01/\tau^2$ (кривые 2) и $\beta = -0.01/\tau^2$ (кривые 3). Приведенные данные получены с помощью численного счета по формулам (7)-(9).

На рис. 2 показана временная зависимость интенсивности тех же самых гауссовых импульсов при некоторых оптических толщинах слоя вещества $\xi = \alpha z$. Приведенные данные получены с помощью численного счета по формулам (5), (6), (15), (17). Интенсивность сигнала нормирована на «среднюю интенсивность» (4) $I_{av}(z) = W(z)/(2T_{av}(z))$.

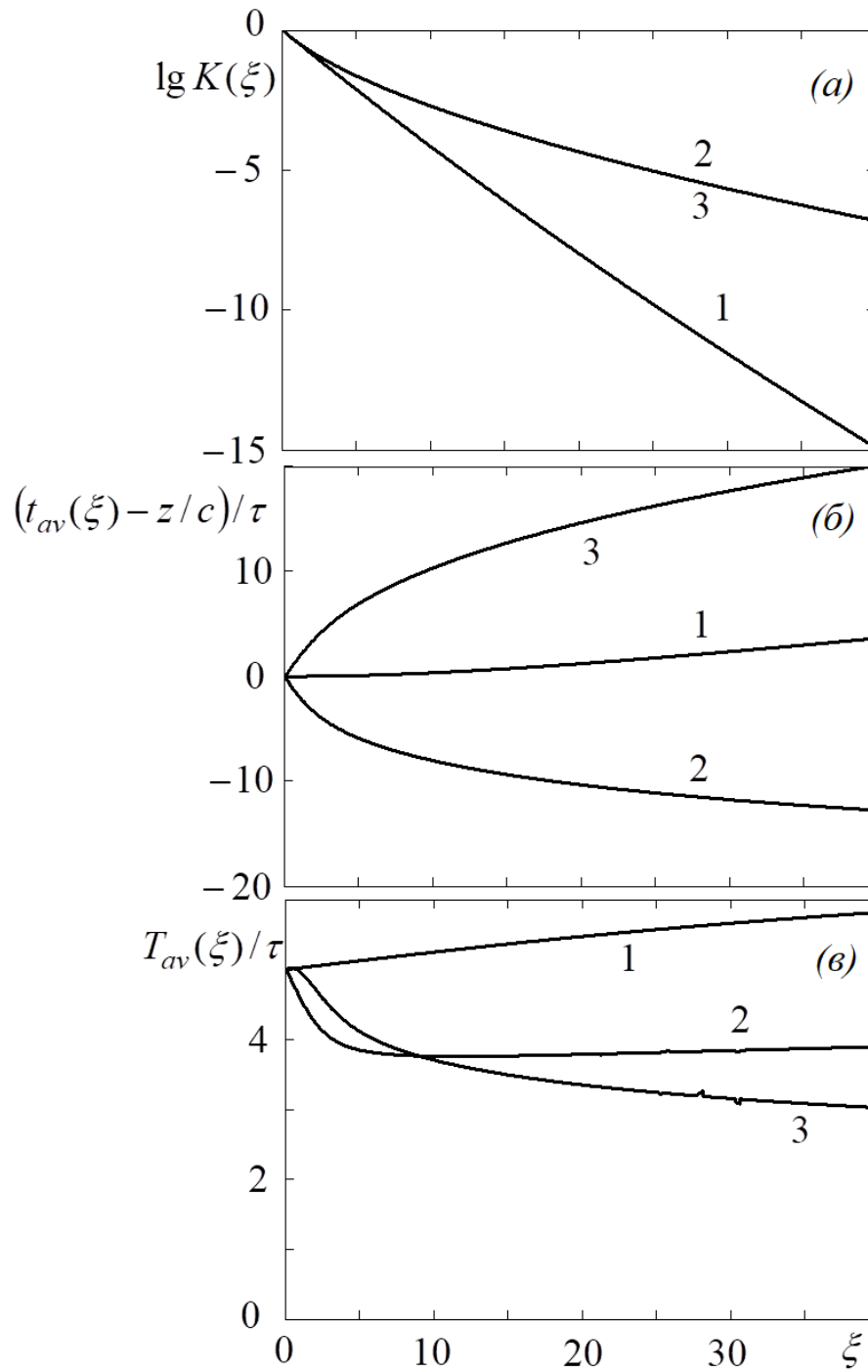


Рис. 1. Зависимость десятичного логарифма коэффициента пропускания слоя вещества по энергии $\lg K(\xi)$ (а), дополнительного (по отношению к «вакуумному») времени задержки «средней точки» волнового импульса $(t_{av}(\xi) - z/c)/\tau$ (б) и «среднеквадратичной» продолжительности сигнала $T_{av}(\xi)/\tau$ (в) от оптической толщины слоя вещества $\xi = \alpha z$ для сигнала (15),(16) с исходной продолжительностью $T_g = 10\tau$, несущей частотой $\Omega_1 = 1/\tau$ и индексом частотной модуляции $\beta = 0$ (кривые 1), $\beta = 0.01/\tau^2$ (кривые 2) и $\beta = -0.01/\tau^2$ (кривые 3).

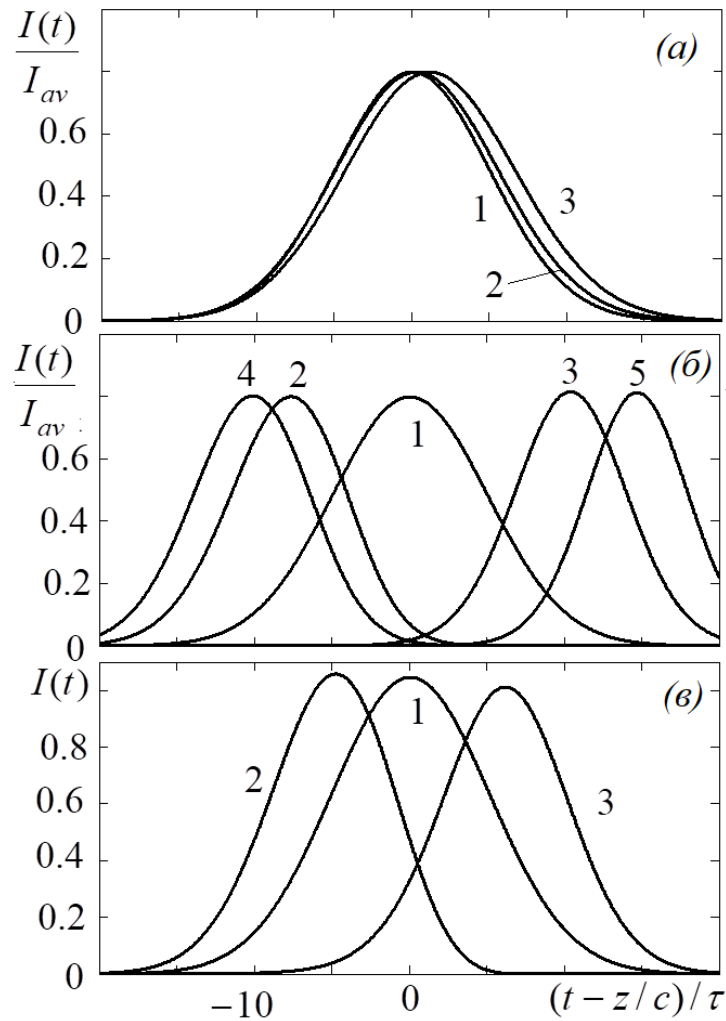


Рис. 2. Временная зависимость $I(t)/I_{av}(\xi)$ интенсивности ЛЧМ гауссова импульса (15),(16) с исходной продолжительностью $T_g = 10\tau$ и несущей частотой $\Omega_1 = 1/\tau$ при различной оптической толщине слоя вещества $\xi = \alpha z$ и различном значении индекса модуляции β . (а) – сигнал без частотной модуляции ($\beta = 0$) (показано $I(t)/I_{av}(\xi)$; кривая 1 – $\xi = 0$, $I_{av} = 1.253$; кривая 2 – $\xi = 10$, $I_{av} = 8.155 \times 10^{-3}$; кривая 3 – $\xi = 20$, $I_{av} = 1.151 \times 10^{-8}$). (б) – сигнал с частотной модуляцией ($\beta = \pm 0.01/\tau^2$) (показано $I(t)/I_{av}(\xi)$; кривая 1 – $\xi = 0$, $\beta = \pm 0.01/\tau^2$, $I_{av} = 1.253$; кривая 2 – $\xi = 10$, $\beta = 0.01/\tau^2$, $I_{av} = 3.220 \times 10^{-3}$; кривая 3 – $\xi = 10$, $\beta = -0.01/\tau^2$, $I_{av} = 3.269 \times 10^{-3}$; кривая 4 – $\xi = 20$, $\beta = 0.01/\tau^2$, $I_{av} = 7.349 \times 10^{-5}$; кривая 5 – $\xi = 20$, $\beta = -0.01/\tau^2$, $I_{av} = 8.309 \times 10^{-5}$). (в) – разница в поведении сигналов с разной частотной модуляцией при умеренной протяженности трассы ($\xi = 4$). Кривая 1 – сигнал без частотной модуляции ($\beta = 0$), показано $I(t) \times 55$; кривая 2 – сигнал с индексом модуляции $\beta = 0.01/\tau^2$, показано $I(t) \times 20$; кривая 3 – сигнал с индексом модуляции $\beta = -0.01/\tau^2$, показано $I(t) \times 20$.

Из рис. 1а видно, что наличие частотной модуляции существенно уменьшает поглощение сигнала. Так, например, при $\xi = 40$ сигнал без частотной модуляции ослабляется на 150 дБ, а с модуляцией – лишь на 70 дБ. Это естественно, потому что наличие частотной модуляции (при фиксированной продолжительности сигнала) расширяет его спектр, а это приводит к ускорению миграции спектра сигнала в область частот с меньшим поглощением и соответствующему снижению коэффициента поглощения. Существенная роль миграции спектра в сторону меньшего поглощения проявляется и в заметной искривленности кривых 2 и 3 на рис. 1а и 1б – при отсутствии миграции спектра это были бы прямые. Видно, что миграция спектра приводит к замедлению первоначально очень быстрого разделения сигналов с противоположным знаком ЛЧМ с ростом протяженности трассы. Разумеется, кривые 1 на рис. 1а и 1б тоже искривлены, но существенно меньше.

Частота несущей $\omega_1 = \omega_0 + 1/\tau$ в данном случае расположена на границе сверхсветовой и досветовой групповой скорости, поэтому отклонение скорости распространения ЛЧМ сигналов от групповой (в данном случае – «просто световой») скорости приводит к тому, что один из ЛЧМ сигналов на рис. 1 (кривая 2) оказывается «сверхсветовым», а другой (кривая 3) – «досветовым». Сигнал без частотной модуляции (кривая 1) с ростом протяженности трассы начинает немного отставать от вакуумной скорости света, потому что миграция спектра в область меньших коэффициентов поглощения приводит к снижению средней групповой скорости.

Разумеется, сверхсветовая скорость распространения ЛЧМ сигнала 2 никоим образом не отменяет ни принцип причинности, ни «световое» ограничение на скорость распространения резких скачков сигнала (то есть информации). Поэтому для сигнала 2 (в случае внезапного прекращения его передачи) обязан иметь место типичный для сверхсветовых скоростей любой этиологии эффект «регенерации» непереданного хвоста сигнала. Прямым расчетом этот вывод проверен в [25].

Сделанные выводы подтверждаются и прямыми расчетами временной зависимости сигналов с ЛЧМ и без нее, приведенными на рис. 2. Следует отметить, что достаточно быстрое (при умеренной протяженности трассы) разделение сигналов с разной модуляцией и умеренное (при умеренной протяженности трассы) ослабление сигналов с ЛЧМ приводит к тому, что вполне заметный эффект сверхсветового распространения сигналов с ЛЧМ имеет место при умеренном ослаблении сигнала – так, например, на рис. 2в заметно разделенные ЛЧМ сигналы (как «сверхсветовой», так и «досветовой») ослаблены (по интенсивности) всего в 20 раз (по отношению к точке старта) и остаются вполне наблюдаемыми экспериментально.

3. Удвоение ЛЧМ импульса

На рис. 3 и 4 показаны результаты аналогичных (данным рис. 1 и 2) расчетов для случая, когда частота несущей сигнала совпадает с центральной частотой спектральной линии ($\omega_1 = \omega_0$). Сигнал 1 по-прежнему не имеет частотной модуляции ($\beta = 0$), а сигналы 2 и 3 – имеют ($\beta = 0.01/\tau^2$ и $\beta = -0.01/\tau^2$ соответственно).

Сразу обращает на себя внимание совпадение кривых для сигналов 2 и 3, отличающихся знаком индекса модуляции на рис. 3а, 3б, 3в, 4б и быстрый рост среднеквадратической продолжительности ЛЧМ сигналов 2 и 3 с ростом протяженности трассы на рис. 3в. Дополнительное к световому время задержки сигналов 2 и 3 после короткого «сверхсветового» (падающего) участка, типичного для любых сигналов, у которых максимум спектра совпадает с центром спектральной линии поглощения [26], начинает медленно расти.

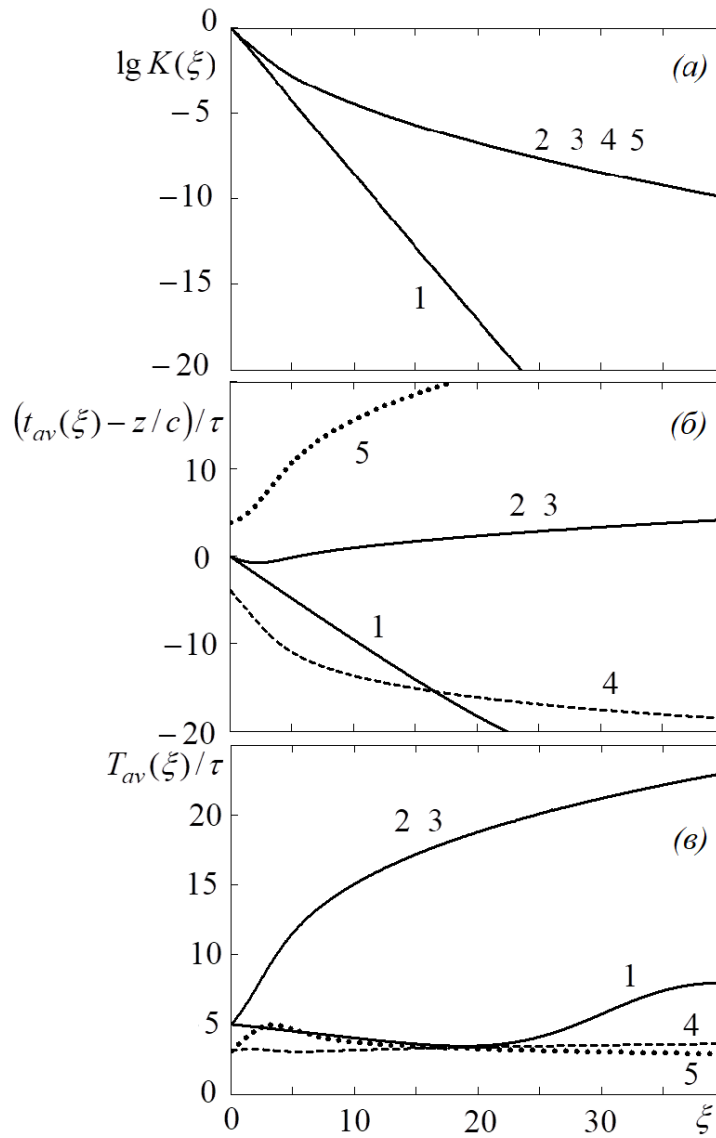


Рис. 3. Зависимость десятичного логарифма коэффициента пропускания слоя вещества по энергии $\lg K(\xi)$ (а), дополнительного (по отношению к «вакуумному») времени задержки «средней точки» волнового импульса $(t_{av}(\xi) - z/c)/\tau$ (б) и «среднеквадратичной» продолжительности сигнала $T_{av}(\xi)/\tau$ (в) от оптической толщины слоя вещества $\xi = \alpha z$ для сигнала (15),(16) с исходной продолжительностью $T_g = 10\tau$, несущей частотой $\Omega_1 = 0$ ($\omega_1 = \omega_0$) и индексом частотной модуляции $\beta = 0$ (кривые 1), $\beta = 0.01/\tau^2$ (кривые 2) и $\beta = -0.01/\tau^2$ (кривые 3). Штриховой линией 4 показаны результаты для «положительно-частотной» части этого сигнала (то есть сигнала со стартовым спектром (18)) при $\beta = 0.01/\tau^2$ и «отрицательно-частотной части» этого же сигнала (то есть сигнала со стартовым спектром (19)) при $\beta = -0.01/\tau^2$. Пунктирной линией 5 показаны результаты для «положительно-частотной» части сигнала (15),(16) при $\beta = -0.01/\tau^2$ и «отрицательно-частотной части» этого же сигнала при $\beta = 0.01/\tau^2$. На всех рисунках кривые 2 и 3 совпадают. На рис. «а» совпадают кривые 2-5.

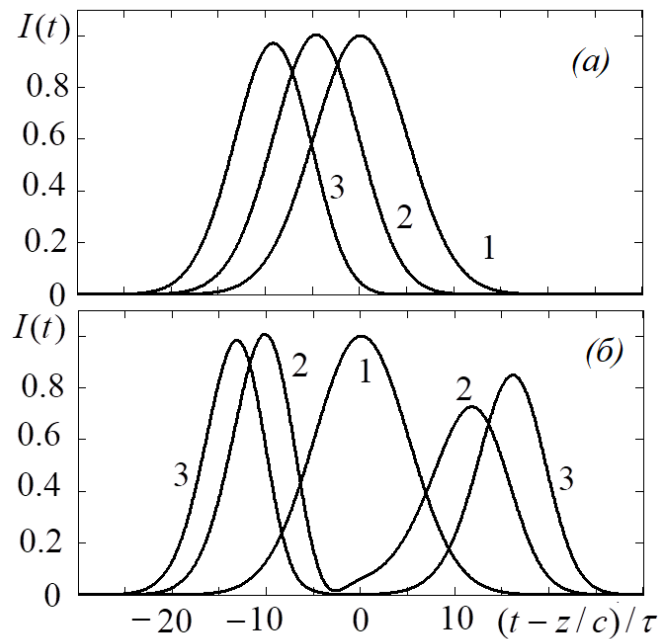


Рис. 4. «Раздвоение» ЛЧМ импульса, частота несущей которого совпадает с центральной частотой спектральной линии поглощения. Временная зависимость $I(t)$ интенсивности ЛЧМ гауссова импульса (15),(16) с исходной продолжительностью $T_g = 10\tau$ и несущей частотой $\Omega_1 = 0$ ($\omega_1 = \omega_0$) при различной оптической толщине слоя вещества $\xi = \alpha z$ и различном значении индекса модуляции β . (а)– сигнал без частотной модуляции ($\beta = 0$) (кривая 1 – $\xi = 0$, показано $I(t)$; кривая 2 – $\xi = 10$, показано $I(t) \times 18000$; кривая 3 – $\xi = 20$, показано $I(t) \times 3 \times 10^8$). (б) – сигнал с частотной модуляцией ($\beta = \pm 0.01/\tau^2$) (кривая 1 – $\xi = 0, \beta = \pm 0.01/\tau^2$, показано $I(t)$; кривая 2 – $\xi = 5, \beta = \pm 0.01/\tau^2$, показано $I(t) \times 850$; кривая 3 – $\xi = 10, \beta = \pm 0.01/\tau^2$, показано $I(t) \times 36000$).

Причина всех этих странностей состоит в том, что отнесение ЛЧМ сигнала к сигналам с «догрупповой» или «сверхгрупповой» скоростью определяется произведением знаков индекса модуляции и производной коэффициента поглощения по частоте. Сигналы с рис. 1 и 2 имели частоту несущей $\omega_1 = \omega_0 + 1/\tau$ и почти целиком располагались на падающем участке коэффициента поглощения. Поэтому эти сигналы «целиком» оказывались «догрупповыми» или «сверхгрупповыми» (в зависимости от знака индекса модуляции) и распространялись целиком с разной скоростью. Спектры же сигналов рис. 3 и 4 с частотой несущей $\omega_1 = \omega_0$ симметричны относительно центра спектральной линии и при любом знаке индекса модуляции имеют

как «догрупповую», так и «сверхгрупповую» половину спектра. В результате каждый из таких сигналов разделяется на два сигнала, один из которых распространяется со скоростью ниже групповой, а другой – со скоростью выше групповой (см. рис. 4). Если считать эти два отдаляющихся друг от друга сигнала единым сигналом, то его продолжительность, естественно, быстро растет. Сигнал же 1 (без частотной модуляции) распространяется со сверхсветовой групповой скоростью и очень быстро ослабевает.

Для иллюстрации этой ситуации на рис. 3 показаны результаты расчетов средних параметров «положительно-частотной» и «отрицательно-частотной» частей сигнала (15),(16) по отдельности. Речь идет о сигналах со спектром:

$$A_{\Omega}^{(0)} = \begin{cases} (4\pi p)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{4p}\right), \Omega \geq 0 \\ 0, \Omega < 0 \end{cases} \quad (18)$$

(«положительно-частотная» часть сигнала (15),(16)) и:

$$A_{\Omega}^{(0)} = \begin{cases} 0, \Omega \geq 0 \\ (4\pi p)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{4p}\right), \Omega < 0 \end{cases} \quad (19)$$

(«отрицательно-частотная» часть сигнала (15),(16)).

Любая из этих частей исходного сигнала является (в зависимости от знака индекса модуляции) «догрупповой» или «сверхгрупповой» и распространяется с соответствующей скоростью без «раздвоения» и быстрого «расплывания». Поскольку полный сигнал (15),(16) содержит как «положительно-частотную», так и «отрицательно-частотную» части, полный сигнал делится на два все более обособляющихся друг от друга сигнала, один из которых распространяется быстрее другого. В нашем примере практически полное разделение единого импульса на два происходит (см. рис. 4) при $\xi = 5$ и ослаблении сигнала в 850 раз.

«Раздваиваться» могут не только ЛЧМ импульсы. Рассмотрим, например, импульс со стартовой временной зависимостью:

$$A^{(0)}(t) = \exp\left(-\frac{t^2}{T_g^2}\right) \cos\left(\frac{\beta t^2}{2}\right), \quad (20)$$

и стартовым спектром:

$$A_{\Omega}^{(0)} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[(4\pi p)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\Omega^2}{4p}\right) \right], \quad (21)$$

где $p = T_g^{-2} - i\beta/2$.

Формально сигнал (20),(21) имеет чисто амплитудную модуляцию (АМ) и относится к классу сигналов с постоянной стартовой фазой [26] и потому «в целом» распространяется со средней групповой скоростью, но «на самом деле» является суммой двух ЛЧМ сигналов с противоположными знаками индексов модуляции, скорость распространения которых различна. Поэтому при распространении этого осциллирующего АМ сигнала в среде с дисперсией поглощения он при достаточной протяженности трассы разделяется на два неосциллирующих ЛЧМ сигнала (рис. 5). Ситуация, изображенная на рис. 5, типична для тех случаев, когда спектр сигнала почти целиком локализован в пределах интервала монотонности коэффициента поглощения среды и удвоения самих «парциальных» ЛЧМ сигналов не происходит.

Если же спектр такого АМ сигнала примерно поровну распределен между интервалами возрастания и убывания коэффициента поглощения с ростом частоты (например, когда частота несущей совпадает с центром спектральной линии), то каждая из «парциальных» ЛЧМ компонент исходного сигнала сама распадается на «догрупповую» и «сверхгрупповую» части, причем «догрупповые» части каждой из ЛЧМ компонент распространяются совместно и интерферируют. То же самое происходит и со сверхгрупповыми частями каждой из ЛЧМ компонент. В результате происходит «раздвоение»

осциллирующего АМ сигнала на два автономных осциллирующих АМ сигнала, один из которых распространяется со скоростью выше средней групповой, а второй – ниже средней групповой. Возникающая при этом ситуация показана на рис. 6. Забавно, что при этой метаморфозе исходно АМ сигнал без фазовой модуляции продолжает и далее оставаться таковым и «частотно-модуляционная» подоплека происходящего остается «за кадром».

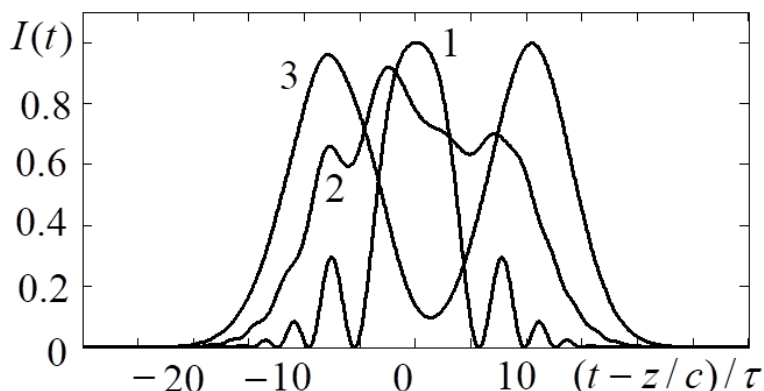


Рис. 5. «Раздвоение» амплитудно-модулированного импульса, частота несущей которого расположена на крыле спектральной линии поглощения. Временная зависимость $I(t)$ интенсивности амплитудно-модулированного гауссова импульса (20),(21) с исходной продолжительностью $T_g = 10\tau$, частотой несущей $\Omega_1 = 1/\tau$ ($\omega_1 = \omega_0 + 1/\tau$) и значении параметра $\beta = \pm 0.01/\tau^2$ (знак несущественен) при различной оптической толщине слоя вещества $\xi = \alpha z$.

Кривая 1 – $\xi = 0$, показано $I(t)$; кривая 2 – $\xi = 5$, показано $I(t) \times 100$; кривая 3 – $\xi = 10$, показано $I(t) \times 1500$). Поскольку раздвоение происходит на два разделенных во времени ЛЧМ импульса, при разделении сигналов осцилляции интенсивности исчезают.

Приведенные на рис. 5 и 6 примеры демонстрируют еще один из возможных способов «реализации» сверхскорости для АМ сигналов, когда исходный сигнал «в целом» распространяется, как ему и положено, с досветовой групповой скоростью, но при этом делится на два относительно независимых сигнала, один из которых распространяется с досветовой скоростью, а другой – со сверхсветовой.

Еще один вывод, который можно сделать из рис. 5 и 6, состоит в том, что разная скорость распространения ЧМ сигналов с разным индексом модуляции может приводить к распаду некогда единого сигнала (в том числе

и вообще без частотной модуляции) на несколько ЧМ компонент, распространяющихся с разной скоростью.

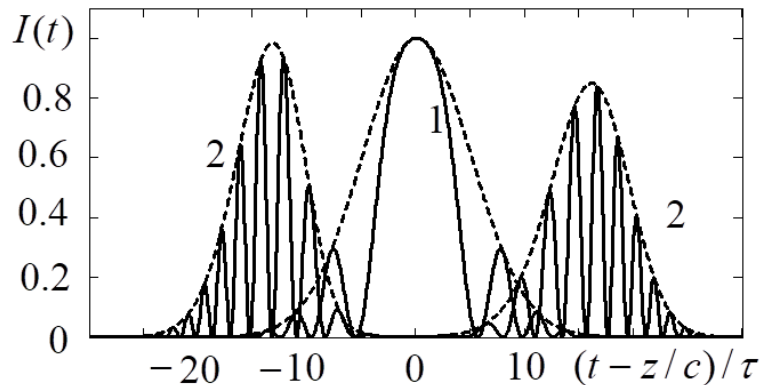


Рис. 6. «Раздвоение» амплитудно-модулированного импульса, частота несущей которого совпадает с центром спектральной линии поглощения. Временная зависимость $I(t)$ интенсивности амплитудно-модулированного гауссова импульса (20),(21) с исходной продолжительностью $T_g = 10\tau$, частотой несущей $\Omega_1 = 0$ ($\omega_1 = \omega_0$) и значении параметра $\beta = \pm 0.01/\tau^2$ при различной оптической толщине слоя вещества $\xi = \alpha z$. Кривая 1 – $\xi = 0$, показано $I(t)$; кривая 2 – $\xi = 10$, показано $I(t) \times 36000$. Поскольку раздвоение происходит на четыре попарно интерферирующих ЛЧМ импульса, осцилляции интенсивности сохраняются, а частотная модуляция не возникает. Штриховыми линиями показаны интенсивности соответствующих одиночных ЛЧМ импульсов (см. рис. 4б, кривые 1 и 3).

Заключение

1) В среде с дисперсией поглощения (а других сред, кроме вакуума, в природе и не бывает) скорость распространения ЛЧМ сигнала отличается от его групповой скорости и зависит от его индекса модуляции, причем «модуляционная» добавка к групповому времени задержки меняет знак на противоположный при изменении знака индекса модуляции (или, что то же самое, при замене комплексной огибающей сигнала на комплексно-сопряженную).

2) В результате скорость распространения ЛЧМ сигнала может быть досветовой при сверхсветовой групповой скорости и сверхсветовой при досветовой групповой скорости (что отмечалось и ранее – см. [14,15,19,25]).

3) В случае сверхсветовой скорости ЛЧМ сигнала (какими бы причинами она не была вызвана – то ли сверхсветовой групповой скоростью, то ли частотно-

модуляционной добавкой к досветовой групповой скорости, то ли комбинацией этих факторов) имеет место эффект регенерации переданного хвоста сигнала, являющийся прямым и непосредственным следствием принципа причинности (или, что то же самое, принципа предельности вакуумной скорости света *для передачи информации*).

Следует отметить, что передача информации (не энергии) со скоростью выше вакуумной световой действительно невозможна, поскольку противоречит принципу причинности, что показано (и наверняка не в первый раз), например, в [28]. Передача же энергии (не информации) со скоростью выше вакуумной световой вполне возможна и не нарушает никаких законов физики. Конкретный пример такой передачи приведен, например, на рис. 2 в [27]. В сущности, для доказательства этого факта не обязательно обращаться к электродинамике – примером устройства, успешно передающего энергию с бесконечной скоростью, является любая ременная передача на любой лесопилке – разумеется, при условии постоянной скорости вращения ведущего вала, то есть пока никто не пытается передавать по шкиву не только энергию, но еще и информацию.

4) При попадании центра спектральной линии в пределы спектра ЛЧМ сигнала происходит разделение единого ЛЧМ сигнала на два ЛЧМ сигнала, один из которых распространяется со скоростью выше групповой (возможно – и выше вакуумной световой), а второй – ниже групповой.

5) Разница в скорости распространения ЛЧМ сигналов, отличающихся знаком индекса модуляции, может приводить к тому, что исходно амплитудно-модулированный сигнал (без фазовой модуляции) при распространении в селективно-поглощающей среде может разделяться на несколько сигналов, распространяющихся с разной скоростью, причем эти сигналы при определенных условиях могут также быть чисто амплитудно-модулированы (без фазовой модуляции).

6) Совместное использование ЛЧМ-сверхскорости и сверхсветовой групповой скорости позволяет достичь больших значений опережения сигнала

(при том же уровне его поглощения) или меньших уровней поглощения сигнала (при том же уровне опережения).

7) Отмеченные эффекты, очевидно, могут иметь место не только при распространении сигнала в селективно-поглощающей среде или волноводе, но и при отражении сигнала от селективно-поглощающей поверхности и при распространении ЛЧМ сигнала через линейные фильтры в теории цепей.

Литература

1. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. – 1979.
2. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов //Успехи физических наук. – 1976. – Т. 118. – №. 2. – С. 339-367.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0118.197602h.0339>
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – Гостехиздат, 1957.
4. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов) //Изв. вузов. Радиофизика. – 1971. – Т. 14. – №. 9. – С. 1453-1463.
5. Блюх П. В. Сжатие импульса излучения в диспергирующей среде со случайными неоднородностями //Изв. вузов. Радиофизика. – 1964. – Т. 7. – №. 3. – С. 460-470.
6. Бухман Н.С. Об изменении длительности узкополосного сигнала в диспергирующей среде с ростом протяжённости трассы (в рамках метода моментов) // Известия вузов. Радиофизика. – 2024. – Т. 67. – № 2. – С. 187-202.
https://doi.org/10.52452/00213462_2024_67_02_187
7. Macke B., Ségard B., Wielonsky F. Optimal superluminal systems //Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. – 2005. – Т. 72. – №. 3. – С. 035601. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.035601>
8. Wang L. J., Kuzmich A., Dogariu A. Gain-assisted superluminal light propagation //Nature. – 2000. – Т. 406. – №. 6793. – С. 277-279.
<https://doi.org/10.1038/35018520>

9. Talukder M. A. I., Amagishi Y., Tomita M. Superluminal to subluminal transition in the pulse propagation in a resonantly absorbing medium //Physical Review Letters. – 2001. – Т. 86. – №. 16. – С. 3546. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3546>
10. Dogariu A., Kuzmich A., Wang L. J. Transparent anomalous dispersion and superluminal light-pulse propagation at a negative group velocity //Physical Review A. – 2001. – Т. 63. – №. 5. – С. 053806. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.63.053806>
11. Акульшин А. М., Чиммино А., Опат Д. И. Отрицательная групповая скорость светового импульса в парах цезия //Квантовая электроника. – 2002. – Т. 32. – №. 7. – С. 567-569. <https://doi.org/10.1070/QE2002v032n07ABEH002249>
12. Macke B., Ségard B. Propagation of light-pulses at a negative group-velocity //The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics. – 2003. – Т. 23. – С. 125-141. <https://doi.org/10.1140/epjd/e2003-00022-0>
13. Akulshin A. M. et al. Pulses of "fast light," the signal velocity, and giant Kerr nonlinearity //LASER PHYSICS-LAWRENCE-. – 2005. – Т. 15. – №. 9. – С. 1252.
14. Золотовский И. О., Семенцов Д. И. Скорость максимума огибающей частотно-модулированного гауссова импульса в усиливающей нелинейной среде //Оптика и спектроскопия. – 2005. – Т. 99. – №. 1. – С. 89-92.
15. Золотовский И. О., Семенцов Д. И. Скорость огибающей импульса в туннельно-связанных оптических волноводах с сильно различающимися параметрами //Оптика и спектроскопия. – 2006. – Т. 101. – №. 1. – С. 120-123. <https://doi.org/10.1134/S0030400X06070204>
16. Macke B., Ségard B. From fast to slow light in a resonantly driven absorbing medium //Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics. – 2010. – Т. 82. – №. 2. – С. 023816. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.023816>
17. Akulshin A. M., McLean R. J. Fast light in atomic media //Journal of Optics. – 2010. – Т. 12. – №. 10. – С. 104001. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/12/10/104001>

18. Малыкин Г. Б., Романец Е. А. Сверхсветовые движения (обзор) //Оптика и спектроскопия. – 2012. – Т. 112. – №. 6. – С. 993-993.
<https://doi.org/10.1134/S0030400X12040145>
19. Золотовский И. О., Минвалиев Р. Н., Семенцов Д. И. Динамика частотно-модулированных волновых пакетов в световодах с комплексными материальными параметрами //Успехи физических наук. – 2013. – Т. 183. – №. 12. – С. 1353-1365. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0183.201312e.1353>
20. Macke B., Ségard B. Simultaneous slow and fast light involving the Faraday effect //Physical Review A. – 2016. – Т. 94. – №. 4. – С. 043801.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.043801>
21. Ravelo B. Investigation on microwave negative group delay circuit //Electromagnetics. – 2011. – Т. 31. – №. 8. – С. 537-549.
<https://doi.org/10.1080/02726343.2011.621106>
22. Macke B., Ségard B. // Opt. Commun. 2008. V. 281. № 1. P. 12-17.
<https://doi.org/10.1016/j.optcom.2007.09.007>
23. Tanaka H. et al. Propagation of optical pulses in a resonantly absorbing medium: Observation of negative velocity in Rb vapor //Physical Review A. – 2003. – Т. 68. – №. 5. – С. 053801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.053801>
24. Macke B., Ségard B. On-resonance material fast light //Physical Review A. – 2018. – Т. 97. – №. 6. – С. 063830. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.011803>
25. Бухман Н. С. О скорости распространения частотно-модулированного волнового пакета в диспергирующей поглощающей среде //Оптика и спектроскопия. – 2004. – Т. 97. – №. 1. – С. 123-130.
<https://doi.org/10.1134/1.1781291>
26. Бухман Н.С. О скорости распространения узкополосного сигнала в диспергирующей среде (в рамках метода моментов). // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – № 7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.7.2>
27. Бухман Н.С. О связи между ослаблением и временем запаздывания узкополосного сигнала в диспергирующей среде. // Журнал радиоэлектроники. 2024. – № 5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.5.12>

28. Бухман Н. С. О принципе причинности и сверхсветовых скоростях распространения сигналов //Радиотехника и электроника. – 2021. – Т. 66. – №. 3. – С. 209-225.

Для цитирования:

Бухман Н.С. О скорости распространения линейно частотно модулированного сигнала в диспергирующей среде (в рамках метода моментов). // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – № 7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.7.12>