

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.7.14>

УДК: 537.876

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ И ЭФФЕКТИВНОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛИРОВОК В ЗАДАЧАХ РАССЕЯНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ВБЛИЗИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

А.А. Слободяненко¹, В.С. Кулик², В.Б. Ромодин¹, Л.В. Шебалкова¹

¹Новосибирский государственный технический университет
630000, Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

²Томский университет систем управления и радиоэлектроники
120009, Томск, пр. Ленина, 40

Статья поступила в редакцию 17 апреля 2025 г.

Аннотация. В работе рассматривается задача рассеяния электромагнитного поля на металлическом объекте, представленная в тангенциальной, нормальной и комбинированной интегральных формулировках. На основе общего теоретического анализа проведены численные исследования интегральных формулировок, демонстрирующие их точность и эффективность, а также особенности и ограничения при численном решении задачи рассеяния. Особое внимание в работе уделено анализу точности интегральных формулировок при определении рассеянного электромагнитного поля вблизи рассеивающего объекта, который осуществляется на примере задачи рассеяния электромагнитного поля на металлической сфере путем сопоставления численных и аналитических решений. В частности, показано, что тангенциальная формулировка интегрального уравнения электрического поля обеспечивает наилучшую точность определения рассеянного поля в ближней зоне, и таким образом является предпочтительной для использования

при проектировании металлических конструкций с требуемым уровнем переотражений. При этом комбинированная интегральная формулировка позволяет обеспечить оптимальное решение задачи рассеяния относительно критерия «точность-время», что является актуальным в случае объекта большого электрического размера.

Ключевые слова: интегральные уравнения, теория рассеяния, метод моментов, ближнее поле, точность, эффективность.

Автор для переписки: Слободяненко Александр Александрович,
sepwood@gmail.com

Введение

Рассеяние и поглощение электромагнитных волн на объектах сложной формы представляет собой важную научно-техническую задачу, которая остается актуальной на протяжении долгих десятилетий [1-5]. Первоначальный интерес к задаче рассеяния был вызван необходимостью определения диаграммы обратного рассеяния (ДОР) радиолокационных объектов [6], однако на сегодняшний день ее результаты оказываются востребованными в области электромагнитной совместимости [7], фотолинтографии [8], а также области антенных измерений в ближней зоне [9], где требуется обеспечить отсутствие переотражений от вспомогательных объектов (поглотители, технологическая оснастка и т. д.) [10-13]. Поскольку вспомогательные объекты как правило имеют достаточно сложную форму, решение задачи рассеяния может быть получено только с помощью строгих численных методов.

Обширные исследования последних десятилетий показали, что наиболее эффективным численным методом решения задачи рассеяния электромагнитного поля на телах произвольной формы является метод моментов (MoM) [14], основанный на дискретизации поверхностных интегральных уравнений (от англ. *surface integral equation*), в число которых входит интегральное уравнение электрического поля (от *electric field integral equation*, далее EFIE) и интегральное уравнение магнитного поля (от *magnetic field integral equation*, далее MFIE) [15].

На сегодняшний день на основе комбинаций поверхностных интегральных уравнений разработаны различные формулировки задачи рассеяния электромагнитного поля на металлических и диэлектрических объектах сложной геометрии [16]. Известно, что некоторые из этих формулировок дают стабильные решения задачи рассеяния в дальней зоне [17,18]. Однако, вопрос стабильности, эффективности и точности соответствующих формулировок при определении рассеянного электромагнитного поля в ближней зоне не исследовался, хотя и является ключевым при проектировании поглотителей и технологической оснастки с минимальным уровнем переотражений. Поскольку поглощающие свойства поглотителей, представляющих собой диэлектрические объекты, довольно часто моделируется аналогичной металлической конструкцией с соответствующей проводимостью [19], то первостепенный интерес представляет исследование эффективности наиболее распространенных формулировок поверхностных интегральных уравнений для металлических объектов.

1. Математическая формулировка интегральных уравнений граничной задачи рассеяния

В общем случае интегральные уравнения электрического $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ и магнитного $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ поля определяются в виде:

$$\theta(\mathbf{r})\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}) - \mathcal{L}\mathbf{J}(\mathbf{r}') + \mathcal{K}\mathbf{M}(\mathbf{r}'), \quad (1)$$

$$\theta(\mathbf{r})\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{inc}(\mathbf{r}) - \mathcal{K}\mathbf{J}(\mathbf{r}') - \frac{1}{\eta^2}\mathcal{L}\mathbf{M}(\mathbf{r}'), \quad (2)$$

где \mathbf{J} и \mathbf{M} являются электрическими и магнитными токами на границе рассеивающего объекта $\mathbf{r}' \in \partial S'$, возбужденными падающим электромагнитным полем $\mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}), \mathbf{H}_{inc}(\mathbf{r})$, η – волновое сопротивление свободного пространства, а \mathcal{K} и \mathcal{L} – линейные интегральные операторы, определяемые через скалярную функцию Грина $G(\mathbf{r} | \mathbf{r}')$, как :

$$\mathcal{K}\mathbf{X} = \int_{\partial S'} \mathbf{X}(\mathbf{r}') \times \nabla G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') ds', \quad (3)$$

$$\mathcal{L}\mathbf{X} = \oint_{\partial S'} \left\{ j\omega\mu G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') + \frac{j}{\omega\varepsilon} \nabla \nabla G(\mathbf{r} | \mathbf{r}') \right\} \mathbf{X}(\mathbf{r}') ds'. \quad (4)$$

Строгая постановка задачи рассеяния электромагнитного поля на металлическом объекте требует выполнения соответствующих граничных условий, одним из которых является непрерывность тангенциальной составляющей напряженности электрического поля. Однако, поскольку электромагнитное поле внутри металлических объектов не может существовать, то на поверхности металлического объекта должно выполняться условие вида:

$$\mathbf{E}_t(\mathbf{r}') \equiv 0, \quad (5)$$

которое совместно с интегральным уравнением (1) приводит к тангенциальной формулировке T-EFIE граничной задачи рассеяния:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathcal{L}\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{inc}(\mathbf{r}'), \quad (6)$$

где \mathbf{n} – нормаль к поверхности рассеивающего объекта.

Стоит отметить, что название тангенциальная следует из равенства:

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times f = f - \mathbf{n} \langle \mathbf{n}, f \rangle, \quad (7)$$

а исчезновение оператора \mathcal{K} , связанного с магнитным током $\mathbf{M}(\mathbf{r}')$ является следствием граничного условия (5) и теоремы эквивалентности [20], однозначно связывающей значения полей и токов на поверхности рассеивающего объекта уравнениями:

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}') = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}'), \quad (8)$$

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{r}'). \quad (9)$$

Альтернативная постановка задачи рассеяния поля на металлическом объекте получается путем векторного умножения интегрального уравнения поля (2) на нормаль \mathbf{n} , в связи с чем формулировка задачи именуется N-MFIE, а с учетом (5), (8) и (9) в явном виде определяется как:

$$\frac{1}{2} \mathcal{I} \mathbf{J}(\mathbf{r}') + \mathbf{n} \times \mathcal{K} \mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{inc}(\mathbf{r}') \quad (10)$$

где \mathcal{I} – тождественный оператор.

2. Общий анализ интегральных формулировок граничной задачи рассеяния

Стоит отметить что из (6) и (10) можно получить альтернативные формулировки задачи рассеяния – T-MFIE и N-EFIE соответственно, которые не получили широкого распространения. Это связано с их плохой совместимостью с классической реализацией метода моментов (метод Галеркина с RWG-функциями), заключающейся в появлении скалярных произведений взаимно перпендикулярных векторных функций, приводящих в первом случае к обнулению тождественного оператора и как следствие диагонали матрицы, а во втором к отсутствию вклада векторного потенциала в собственное взаимодействие (рис. 1), что в конечном счете приводит к появлению малых сингулярных значений, свидетельствующих о нестабильности решения задачи (рис. 2). Таким образом только T-EFIE и N-MFIE формулировки, образующие диагонально доминантные матрицы обеспечивают стабильное решение задачи рассеяния поля на проводящем объекте, однако как следует из рис. 2 их эффективность будет отличаться.

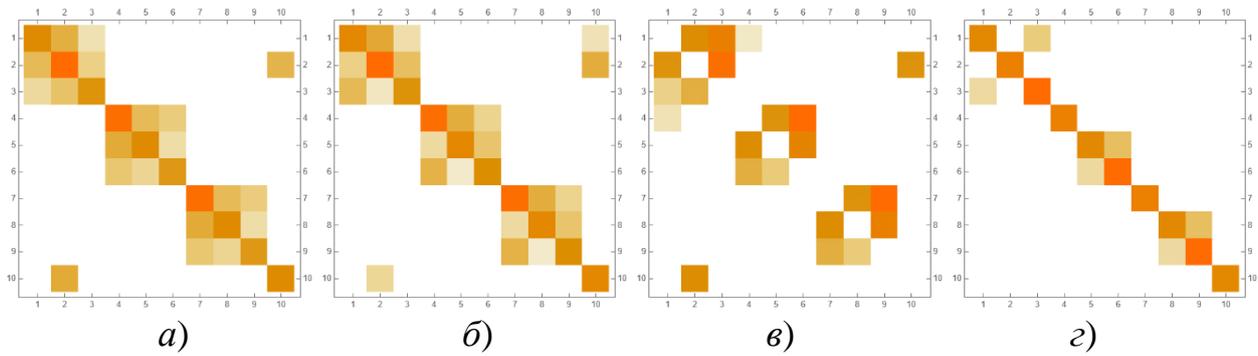


Рис. 1. Структурное представление матриц взаимодействия, полученных на основе формулировки:
 а) T-EFIE, б) N-EFIE, в) T-MFIE и з) N-MFIE.

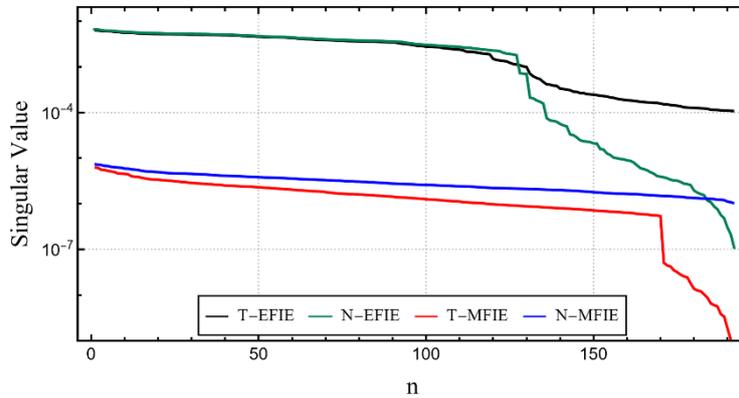


Рис. 2. Сингулярные значения матриц взаимодействия, полученных на основе поверхностных формулировок.

Поскольку интегральное уравнение (6) содержит неограниченный оператор, число обусловленности которого растет с увеличением количества базисных функций [21], сходимость итеративных решателей для T-EFIE формулировки будет значительно хуже, чем для N-MFIE формулировки, содержащей тождественный и компактный операторы с конечными собственными значения. Это легко продемонстрировать на численном примере решения задачи рассеяния на металлическом кубе со стороной 1λ (рис. 3, 4). Стоит отметить, что выпуклая комбинация T-EFIE и N-MFIE с параметром $\alpha \in [0,1]$, известная как CFIE и определяемая как:

$$CFIE = \alpha T-EFIE + (1 - \alpha)N-MFIE, \tag{11}$$

за счет вклада N-MFIE также обеспечивает высокую сходимость решателя.

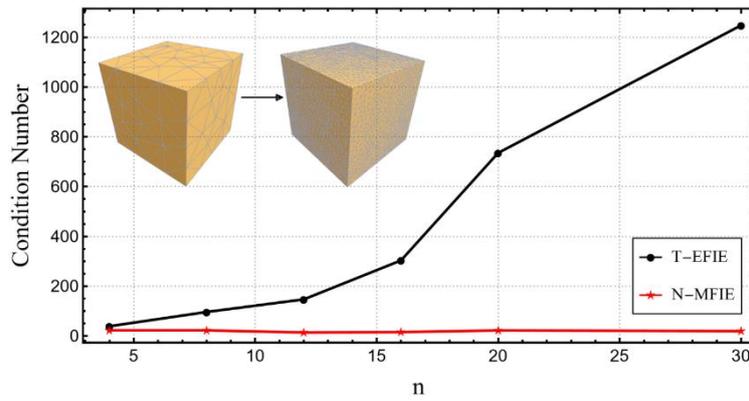


Рис. 3. Зависимость числа обусловленности от параметра разбиения поверхности λ/n .

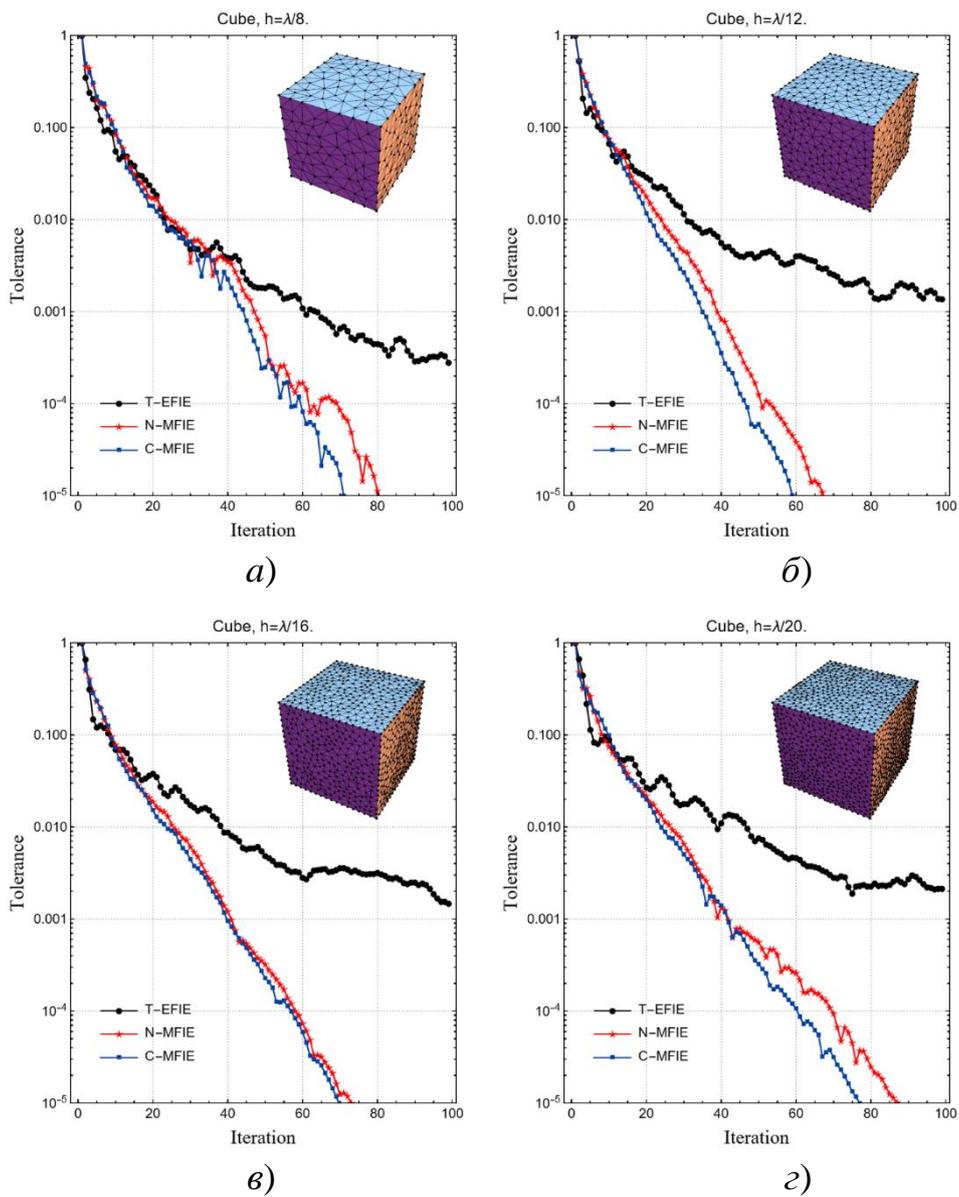


Рис. 4. Сходимость итерационного решателя при числе RWG-функций: а) 1044, б) 2289, в) 4101, г) 6243.

Рассмотрим общую сходимость численного решения задачи рассеяния, которая, как известно, должна обеспечиваться по мере уточнения разбиения поверхности [22]. Так на рассматриваемом примере металлического куба видно, что результаты определения рассеянного электромагнитного поля проявляют сходимость, однако скорость сходимости результатов N-MFIE значительно уступает T-EFIE. Что касается CFIE формулировки, то добавление T-EFIE с коэффициентом 0,2 позволило улучшить сходимость. Однако, при этом те же значения рассеянного электромагнитного поля, полученные формулировкой T-EFIE при разбиении $\lambda/12$, при CFIE достигаются лишь при разбиении $\lambda/32$.

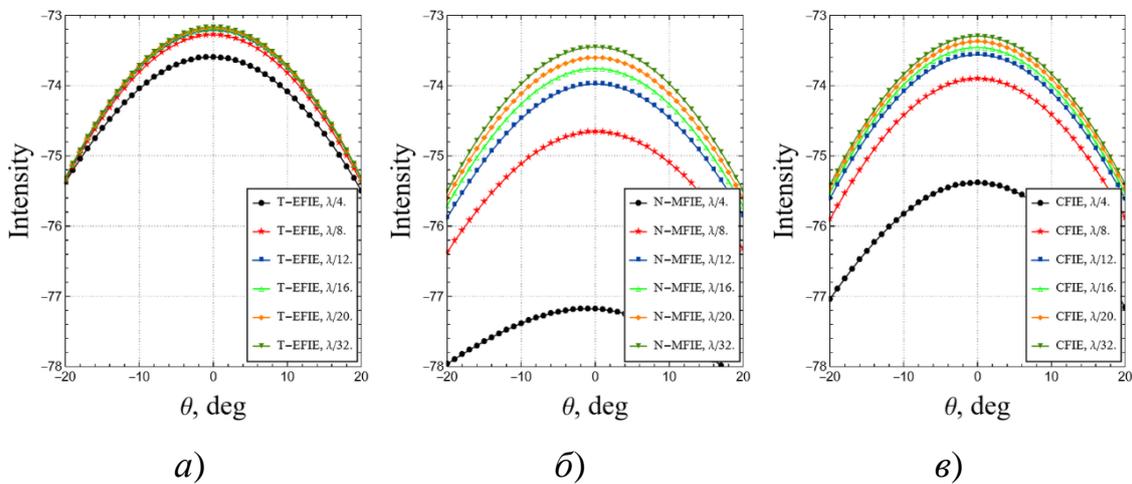


Рис. 5. Результаты определения рассеянного электромагнитного поля в дальней зоне против направления волны формулировкой: а) T-EFIE, б) N-MFIE и в) CFIE при различной дискретизации.

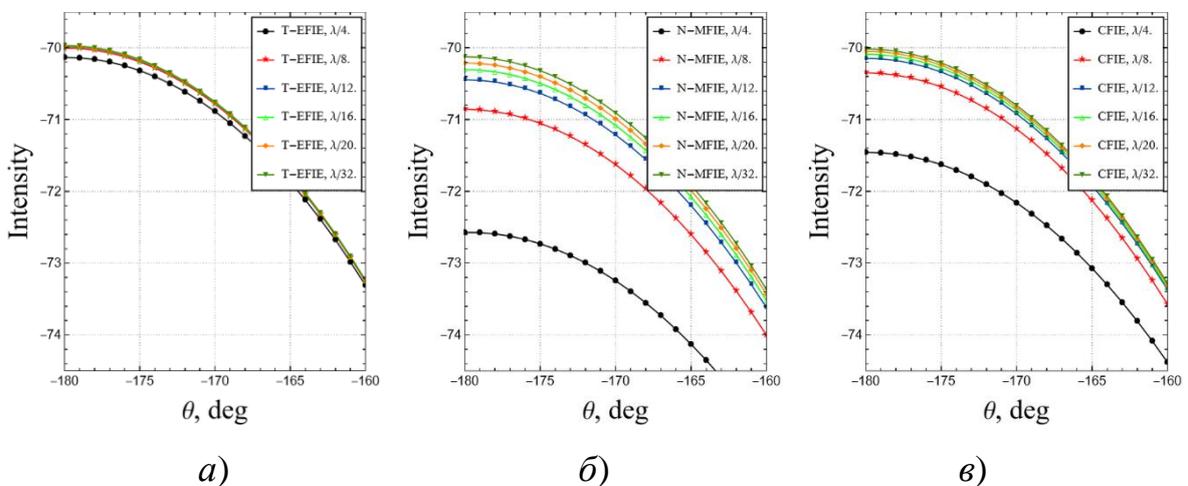


Рис. 6. Результаты определения рассеянного электромагнитного поля в дальней зоне по направлению волны формулировкой: а) T-EFIE, б) N-MFIE и в) CFIE при различной дискретизации.

Таким образом полученные результаты подтверждают тот факт, что CFIE частично наследует свойства T-EFIE и N-MFIE формулировок. Это также подтверждается нестабильностью CFIE при решениях задачи рассеяния на низких частотах ($f < 1$ ГГц) [23], которая фактически свойственна T-EFIE формулировке [24], в то время как N-MFIE формулировка демонстрирует стабильные решения [25]. Стоит отметить, что T-EFIE формулировка может обеспечивать точные и эффективные решения и на низких частотах, однако для этого требуется преобразование классических базисных RWG-функций к базисным функциям специального вида [26].

Общей проблемой для T-EFIE и N-MFIE формулировок является наличие частот, совпадающих с собственными значениями внутренней задачи Максвелла, при которых интегральные уравнения решаются неоднозначно [27]. Однако неоднозначность решения для T-EFIE и N-MFIE носит различный характер, который можно выявить путем сравнения результатов решения задачи рассеяния электромагнитного поля от проводящих сфер с результатами CFIE формулировки, как известно, неподверженной проблеме внутреннего резонанса. Так результаты определения рассеянного электромагнитного поля от металлических сфер различного радиуса R в направлении противоположном направлению падающей электромагнитной волны демонстрируют наличие резонансов только для N-MFIE (рис. 7). Это связано с тем фактом, что нуль-пространство оператора $N(\mathcal{L})$ не вносит вклад во внешнее рассеянное поле [26], тем самым обеспечивая достоверное определение рассеянного поля даже при резонансах [28]. Следовательно, при T-EFIE формулировке резонансы могут быть обнаружены только по значениям тока, что подтверждается результатами расчётов (рис. 8).

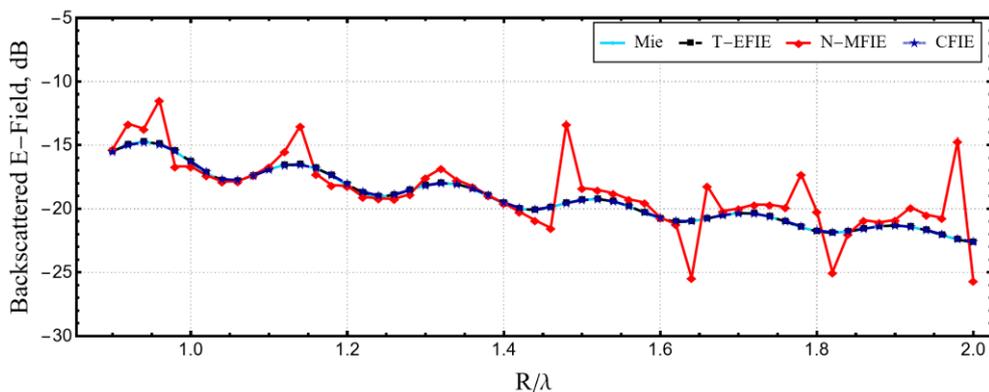


Рис. 7. Зависимость обратного рассеянного электромагнитного поля от размеров сферы.

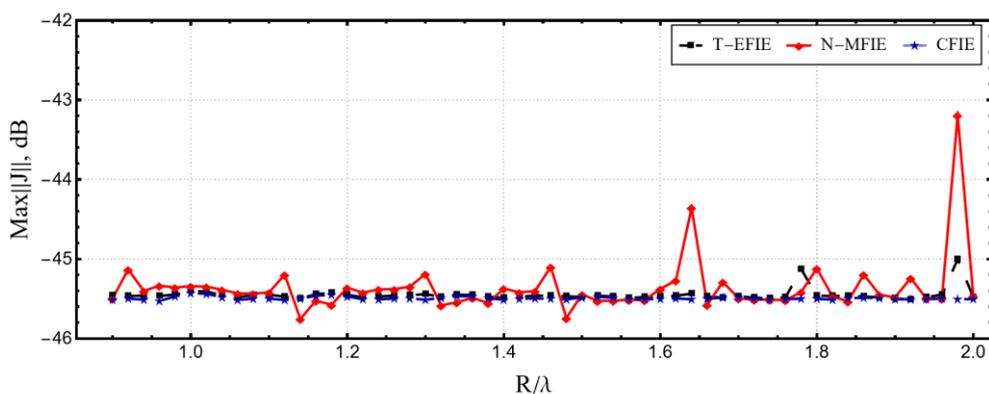


Рис. 8. Зависимость максимального значения тока на сфере от ее размеров.

Полученные результаты показывают, что значительные отклонения в токе наблюдаются только для сфер с радиусом больше $1,6\lambda$. Поэтому для более явной демонстрации неоднозначности решения рассматриваются результирующие распределения токов на сферах с радиусами $1,98\lambda$ и 2λ (рис. 9), которые в случае наличия внутреннего резонанса демонстрируют колоссальные отличия в характере распределения. В то же время при отсутствии внутреннего резонанса качественный характер распределения токов для всех трех формулировок совпадает (рис. 10).

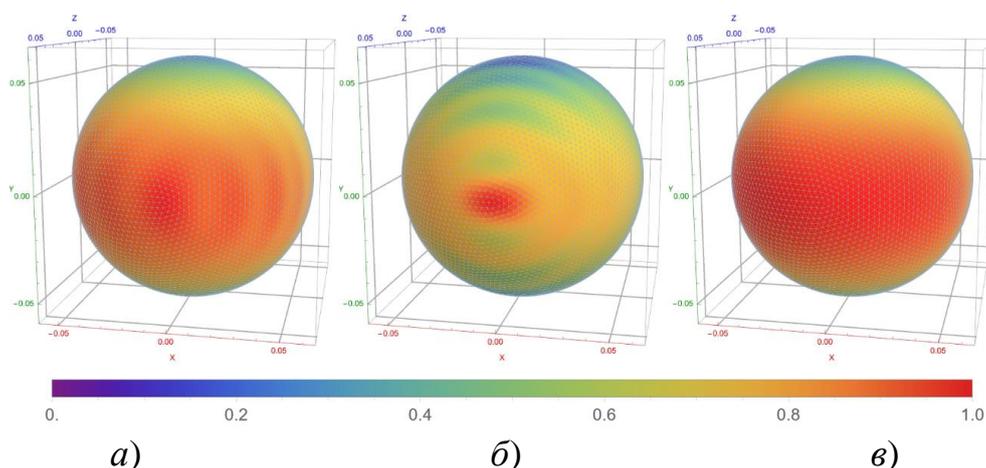


Рис. 9. Визуализация распределения токов по поверхности рассеивающей сферы $R = 1,98 \lambda$ (наличие резонанса) с формулировкой: а) T-EFIE б) N-MFIE и в) CFIE.

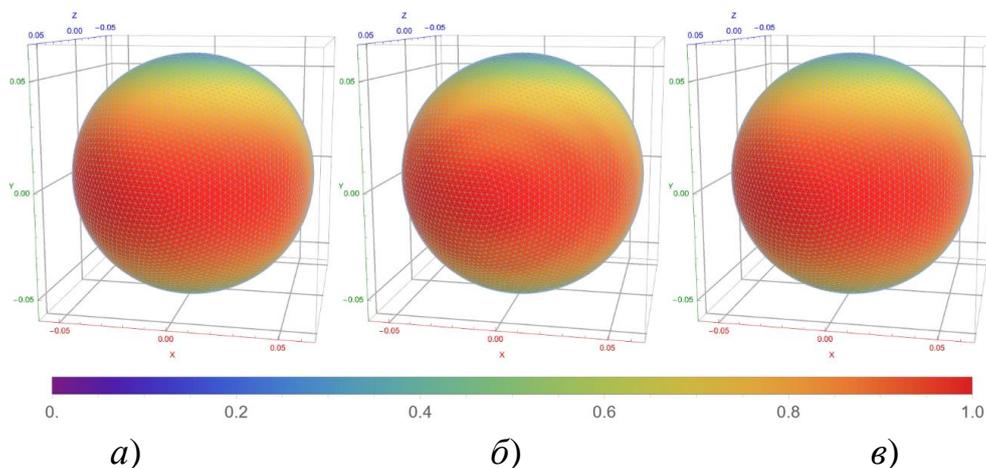


Рис. 10. Визуализация распределения токов по поверхности рассеивающей сферы $R = 2,00 \lambda$ (отсутствие резонанса) с формулировкой: а) T-EFIE, б) N-MFIE и в) CFIE.

Таким образом, не смотря на наличие внутреннего резонанса T-EFIE, формулировка может свободно использоваться в рамках задачи определения рассеянного электромагнитного поля на металлических объектах.

3. Анализ точности интегральных формулировок при определении ближнего рассеянного поля

Как видно из результатов предыдущего подраздела, формулировки T-EFIE, N-MFIE и CFIE отличаются не только по сходимости, но и по точности определения рассеянного электромагнитного поля в дальней зоне. Естественно, при этом будет отличаться точность определения ближнего поля. Для того чтобы

более подробно изучить этот вопрос рассмотрим задачу рассеяния электромагнитного поля на сфере, для которой, как известно, существуют точные аналитические решения [29], в том числе справедливые для ближней зоны:

$$\mathbf{E}_i = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n a_{nm} \left(B_n(kr) \left[im \frac{P_n^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \vec{g} - \frac{dP_n^m(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \vec{\varphi} \right] e^{im\varphi} \right) + b_{nm} \left(\frac{1}{kr} \frac{d(rB_n(kr))}{dr} \left[im \frac{P_n^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \vec{\varphi} - \frac{dP_n^m(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \vec{g} \right] e^{im\varphi} + \frac{B_n(kr)}{kr} n(n+1) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \vec{r} \right), \quad (12)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{k\mu\mu_0}{i\omega} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=-n}^n b_{nm} \left(B_n(kr) \left[im \frac{P_n^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \vec{g} - \frac{dP_n^m(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \vec{\varphi} \right] e^{im\varphi} \right) + a_{nm} \left(\frac{1}{kr} \frac{d(rB_n(kr))}{dr} \left[im \frac{P_n^m(\cos \vartheta)}{\sin \vartheta} \vec{\varphi} - \frac{dP_n^m(\cos \vartheta)}{d\vartheta} \vec{g} \right] e^{im\varphi} + \frac{B_n(kr)}{kr} n(n+1) P_n^m(\cos \vartheta) e^{im\varphi} \vec{r} \right), \quad (13)$$

где r, ϑ, φ – сферические координаты точки наблюдения \mathbf{r}_i , $B_n(kr)$ – сферические функции Бесселя 4 рода n -го порядка, $P_n^m(\cos \vartheta)$ – ассоциированный полином Лежандра.

Пусть на сферу диаметром 3λ с в направлении $-\mathbf{z}$ падает \mathbf{x} -поляризованная плоская электромагнитная волна. Для решения задачи рассеяния сфера разбивается на элементы с рекомендованным линейным размером, не превышающим значения $\lambda/12$. Итоговая размерность матриц составила 12960×12960 , для их обращения использовалось стандартное LU-разложение. На основе полученных распределений токов по поверхности сферы на расстоянии 1λ в сечении $\varphi = 0^\circ$ и $\varphi = 90^\circ$ рассчитывались сферические компоненты напряженности электрического $E_\theta, E_\varphi, E_\rho$ и магнитного H_θ, H_φ ,

H_ρ поля (рис. 11). Сравнение полученных результатов с точными значениями поля, рассчитанными по (12) показывает, что формулировка T-EFIE обеспечивает точное определение тангенциальных компонент напряженности электрического поля, в то время как формулировка N-MFIE дает ощутимую ошибку определения, наблюдаемую вдоль направления распространения электромагнитной волны.

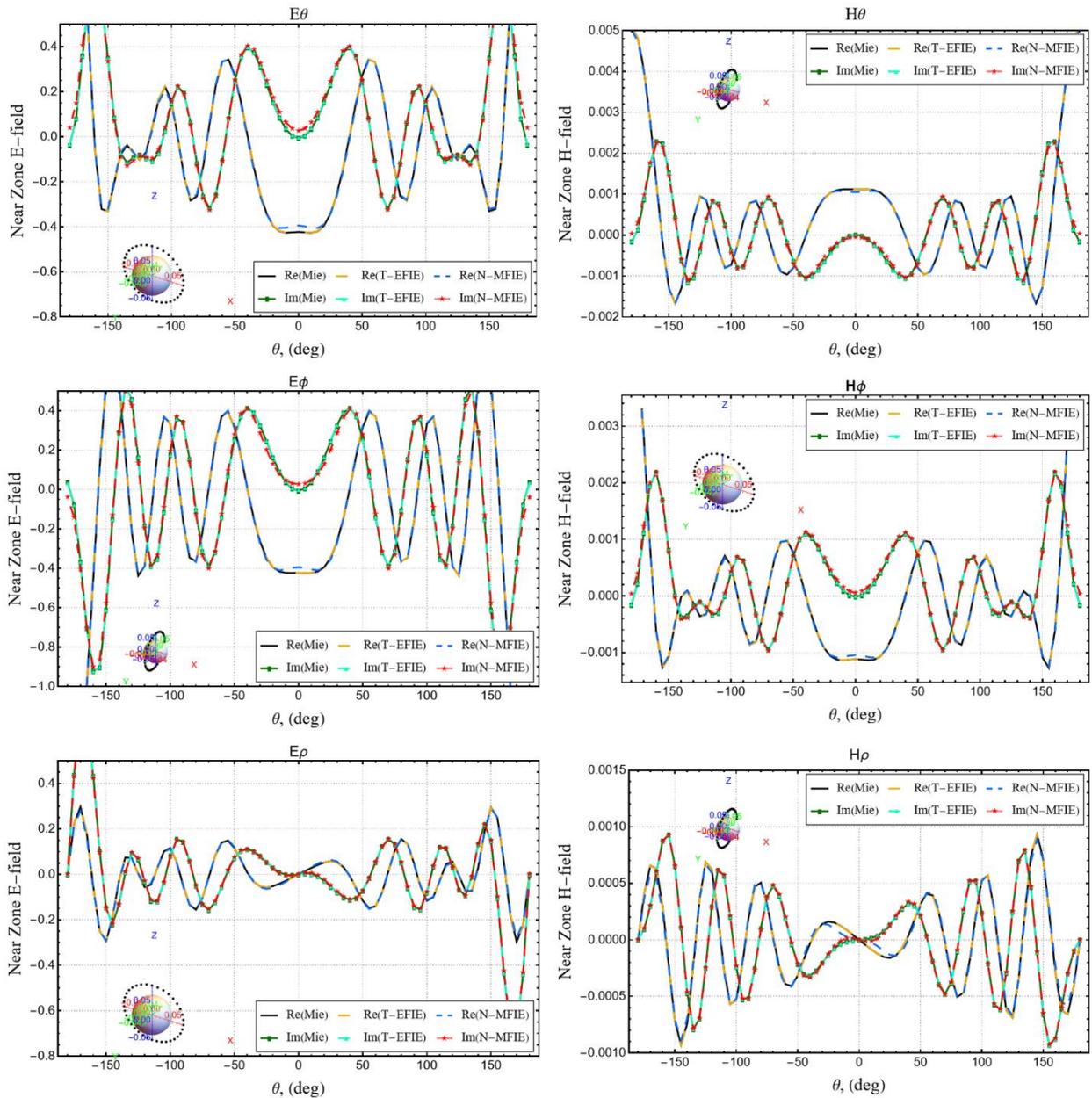


Рис. 11. Результаты определения сферических компонент рассеянного электромагнитного поля от сферы ($R = 1,5\lambda$) в ближней зоне.

Более подробный анализ ошибок (рис. 12, 13) показывает, что при N-MFIE формулировке тангенциальные компоненты как электрического (E_θ, E_ϕ), так и магнитного (H_θ, H_ϕ) полей имеют сопоставимый уровень ошибок, не превышающий 4-5%. При этом ошибка определения нормальной составляющей магнитного поля (H_ρ) более чем в 2 раза превышает ошибку нормальной компоненты электрического поля (E_ρ). Что касается формулировки T-EFIE, то уровень ошибок определения всех компонент электромагнитного поля значительно ниже, чем при формулировке N-MFIE.

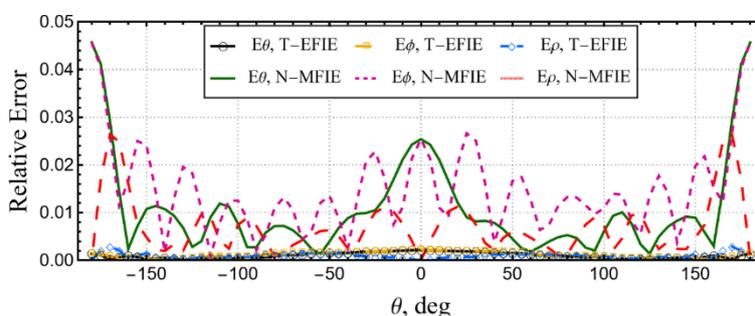


Рис. 12. Относительная ошибка определения рассеянного электрического поля в ближней зоне.

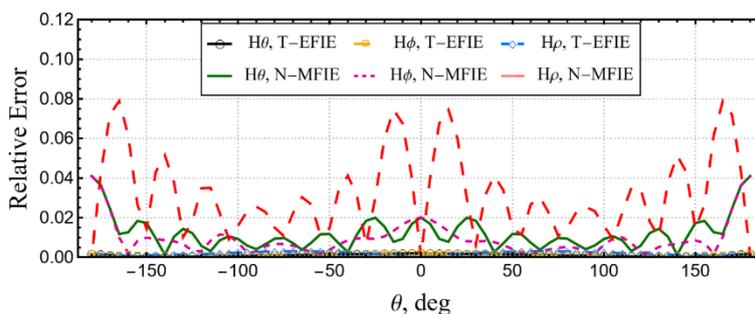


Рис. 13. Относительная ошибка определения рассеянного магнитного поля в ближней зоне.

Стоит отметить, что ошибки, наблюдаемые на расстоянии 1λ от сферы также характерны и для других расстояний во всей ближней зоне (рис. 14, 15). Более высокий уровень ошибок, наблюдаемых в непосредственной близости от сферы связан с наличием сингулярности в ядрах интегральных операторов \mathcal{L} и \mathcal{K} , которые при расчёте электромагнитного поля с помощью уравнений (1) и (2) не подвергались специальной обработке. Следовательно, тангенциальная

формулировка Т-EFIE граничной задачи рассеяния электромагнитного поля на металлическом объекте является предпочтительной для точного определения электромагнитного поля в ближней зоне.

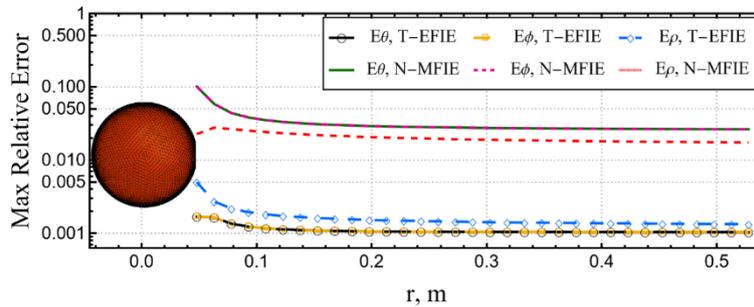


Рис. 14. Максимальные значения относительной ошибки определения рассеянного электрического поля на множестве точек на расстоянии r .

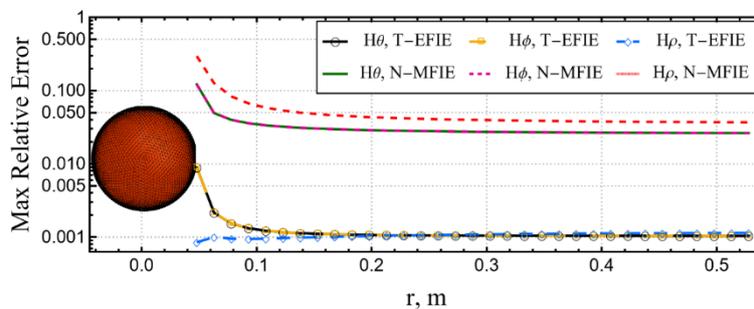


Рис. 15. Максимальные значения относительной ошибки определения рассеянного электрического поля на множестве точек на расстоянии r .

Однако учитывая результаты, продемонстрированные в предыдущем подразделе, с помощью формулировки CFIE можно получить приемлемую точность, при этом сохранив возможность применения итеративных решателей (рис. 16), тем самым обеспечивая возможность решения задачи рассеяния электромагнитного поля на объектах большого электрического размера.

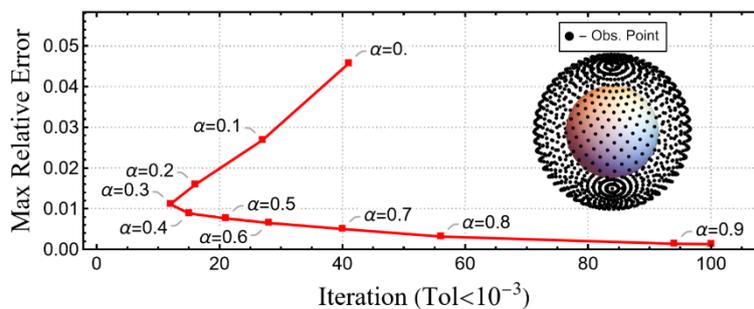


Рис. 16. Зависимость максимальной ошибки определения рассеянного электромагнитного поля в ближней зоне и количества итераций необходимых для решения соответствующей задачи рассеяния от параметра α в формулировке CFIE.

Проведенный анализ максимальной относительной ошибки определения электромагнитного поля вблизи объекта, полученный итеративным решателем при достижении относительной ошибки между итерациями (Tol) значения 10^{-3} , показывает что оптимальность решения по критерию “точность-время” достигается при значении параметра $\alpha = 0.3$. Однако, стоит учитывать, что значение параметра может варьироваться в зависимости от геометрии рассеивающего объекта. Поэтому более целесообразным является выделение диапазона оптимальных значений параметра α , который в случае рассматриваемого примера можно ограничить значениями 0,3 и 0,5. При этом определение оптимального диапазона значений параметра α для общего случая требует проведения дополнительных исследований.

Заключение

Таким образом тангенциальная формулировка T-EFIE граничной задачи рассеяния электромагнитного поля на металлическом объекте является предпочтительной для точного определения электромагнитного поля в ближней зоне. Однако ее использование для крупногабаритных объектов требует разработки специальных методов и алгоритмов масштабирования, хорошо комбинируемых с прямыми решателями. В качестве приемлемой альтернативы может использоваться CFIE формулировка, обеспечивающая возможность применения итеративных решателей и достоверного определения распределения токов.

Литература

1. Gordon W. Far-field approximations to the Kirchoff-Helmholtz representations of scattered fields //IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1975. – Т. 23. – №. 4. – С. 590-592. <https://doi.org/10.1109/TAP.1975.1141105>
2. Bohren C. F., Huffman D. R. Absorption and scattering by a sphere //Absorption and scattering of light by small particles. – 1983. – Т. 7. – С. 82-129.

3. Ishimaru A. Electromagnetic wave propagation, radiation, and scattering: from fundamentals to applications. – John Wiley & Sons, 2017.
4. Bowman J. J., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E. Electromagnetic and acoustic scattering by simple shapes (Revised edition) //New York. – 1987.
5. Dong C. et al. EM scattering from complex targets above a slightly rough surface //PIERS online. – 2007. – Т. 3. – №. 5. – С. 685-688. <https://doi.org/10.2529/PIERS061212012947>
6. Charris V. D., Torres J. M. G. Analysis of radar cross section assessment methods and parameters affecting it for surface ships //Ship science & technology. – 2012. – Т. 6. – №. 11. – С. 91-106. <https://doi.org/10.25043/19098642.72>
7. Зайков А.О. Анализ резонансных частот экранирующих корпусов на основе моностатической эффективной площади рассеяния // Междунар. науч.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых учёных «Научная сессия ТУСУР–2024»: сб. избр. статей научной сессии ТУСУР, Томск. – 2024. – Ч. 2. – С. 74–77.
8. Михеев П. А. Численное решение задачи дифракции электромагнитного поля на системе отверстий //Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. – 2014. – №. 1. – С. 15-22.
9. Ferrara F. et al. Near-field antenna measurement techniques //Handbook of antenna technologies. – Springer, 2016. – С. 2107-2163.
10. Gershnel E. et al. Antenna Near Field to Far Field Transformation in the Presence of Ground. – 2021.
11. Paulus A. et al. Comparison of source localization and scatterer modeling in near-field antenna measurements //2019 13th European Conference on Antennas and Propagation (EuCAP). – IEEE, 2019. – С. 1-5.
12. Евстафьев Е. Е., Шапкина Н. Е., Балабуха Н. П. Исследование влияния опоры, на которой расположен объект, на рассеянное объектом электромагнитное поле //Акустооптические и радиолокационные методы измерений и обработки информации. – 2020. – С. 20-22.

13. Балабуха Н. П. и др. Исследование влияния наличия опоры на рассеянное поле на объекте в безэховой камере методом математического моделирования //Труды Российского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени АС Попова. – 2022. – С. 160-163.
14. Harrington R. F. Field computation by moment methods. – Wiley-IEEE Press, 1993.
15. Gibson W. C. The method of moments in electromagnetics. – Chapman and Hall/CRC, 2021. <https://doi.org/10.1201/9780429355509>
16. Ylä-Oijala P., Taskinen M., Järvenpää S. Surface integral equation formulations for solving electromagnetic scattering problems with iterative methods //Radio science. – 2005. – Т. 40. – №. 06. – С. 1-19. <https://doi.org/10.1029/2004RS003169>
17. Rao S., Wilton D., Glisson A. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape //IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1982. – Т. 30. – №. 3. – С. 409-418. <https://doi.org/10.1109/TAP.1982.1142818>
18. Hodges R. E., Rahmat-Samii Y. The evaluation of MFIE integrals with the use of vector triangle basis functions //Microwave and Optical Technology Letters. – 1997. – Т. 14. – №. 1. – С. 9-14.
19. Xu Q. et al. A hybrid FEM-GO approach to simulate the NSA in an anechoic chamber //Applied Computational Electromagnetics Society Journal (ACES). – 2017. – С. 1035-1041.
20. Rengarajan S. R., Rahmat-Samii Y. The field equivalence principle: Illustration of the establishment of the non-intuitive null fields //IEEE Antennas and Propagation Magazine. – 2000. – Т. 42. – №. 4. – С. 122-128. <https://doi.org/10.1109/74.868058>
21. Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.
22. Monk P. Finite element methods for Maxwell's equations. – Oxford university press, 2003.

23. Contopanagos H. et al. Well-conditioned boundary integral equations for three-dimensional electromagnetic scattering //IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2002. – Т. 50. – №. 12. – С. 1824-1830. <https://doi.org/10.1109/TAP.2002.803956>
24. Burton M., Kashyap S. A study of a recent, moment-method algorithm that is accurate to very low frequencies //Applied Computational Electromagnetics Society Journal. – 1995. – Т. 10. – С. 58-68.
25. Zhang Y. et al. Magnetic field integral equation at very low frequencies //IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 2003. – Т. 51. – №. 8. – С. 1864-1871. <https://doi.org/10.1109/TAP.2003.814753>
26. Vecchi G. Loop-star decomposition of basis functions in the discretization of the EFIE //IEEE Transactions on Antennas and Propagation. – 1999. – Т. 47. – №. 2. – С. 339-346. <https://doi.org/10.1109/8.761074>
27. Langenberg K. J. A thorough look at the nonuniqueness of the electromagnetic scattering integral equation solutions as compared to the scalar acoustic ones //Radio Science. – 2003. – Т. 38. – №. 2. – С. 22-1-22-8. <https://doi.org/10.1029/2001RS002558>
28. Snorre H. Christiansen. “Discrete Fredholm Properties and Convergence Estimates for the Electric Field Integral Equation.” Mathematics of Computation 73, no. 245 (2004): 143–67. <http://www.jstor.org/stable/4099862>.
29. Mie G. Beiträge zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallösungen //Annalen der physik. – 1908. – Т. 330. – №. 3. – С. 377-445. <https://doi.org/10.1002/andp.19083300302>

Для цитирования:

Слободяненко А.А., Кулик В.С., Ромодин В.Б., Шебалкова Л.В. Численное исследование точности и эффективности интегральных формулировок в задачах рассеяния электромагнитного поля вблизи металлических объектов. // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – № 7. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.7.14>