

DOI: <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.7.2>

УДК: 537.876

О СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ УЗКОПОЛОСНОГО СИГНАЛА В ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ СРЕДЕ (В РАМКАХ МЕТОДА МОМЕНТОВ)

Н.С. Бухман

**Самарский государственный технический университет,
443100, Самара, ул. Молодогвардейская, д.244**

Статья поступила в редакцию 20 марта 2025 г.

Аннотация. Показано, что средняя по спектру сигнала групповая скорость (как досветовая, так и сверхсветовая) описывает перемещение «центра тяжести» не всех, но широкого класса узкополосных сигналов при любой протяженности трассы, в том числе и за пределами области применимости первого порядка классической теории дисперсии, где временная зависимость сигнала обычно существенно искажается. Дисперсия поглощения с ростом протяженности трассы неизбежно изменяет распределение спектра сигнала по частотам. При этом соответственно изменяется и его групповая скорость. Так, в частности, исходно сверхсветовая групповая скорость с ростом протяженности трассы может смениться на досветовую. Более того, для любых сигналов с неограниченным спектром (в том числе и для любых сигналов искусственного происхождения) при достаточной протяженности трассы это неизбежно. Обратный переход – от досветовой групповой скорости к сверхсветовой невозможен. Показано что любой сигнал с частотой несущей, находящейся вблизи центральной частоты спектральной линии поглощения, на начальном участке трассы перемещается именно со сверхсветовой групповой скоростью,

причем его поглощение при этом незначительно. Разумеется, с ростом протяженности трассы эта сверхсветовая групповая скорость обычно сменяется на досветовую.

Ключевые слова: волновой импульс, групповая скорость, сверхсветовая групповая скорость, досветовая групповая скорость, диспергирующая среда.

Автор для переписки: Бухман Николай Сергеевич, nik3142@yandex.ru

Введение

Хорошо известно [1-3], что распространение узкополосного сигнала в диспергирующей среде при достаточно малой протяженности трассы происходит с групповой скоростью без деформации сигнала, то есть без изменения временной зависимости его интенсивности. С ростом протяженности трассы обычно происходит существенная перестройка временной зависимости интенсивности сигнала и приближение групповой скорости (оно же – первый порядок классической теории дисперсии [1]) оказывается неприменимо. Более того, в этой ситуации становится даже не совсем ясно, что именно следует считать скоростью распространения сигнала.

Поэтому для изучения вопроса о скорости распространения сигнала за пределами области применимости приближения групповой скорости естественно воспользоваться методом моментов [4-6], который оперирует «средними» характеристиками сигнала. Именно такое изучение и предпринято в данной работе на примере узкополосного сигнала, распространяющегося в диспергирующей среде с лоренцевой спектральной линией. Основным интерес для нас представляет вопрос о возможности (или, напротив, невозможности) сверхсветовой скорости распространения электромагнитного импульса в диспергирующей среде [7-25], до сих пор продолжающий оставаться дискуссионным – см. [26].

1. Основные соотношения

Очевидным недостатком метода моментов является ограниченность предоставляемой этим методом информации о сигнале – он позволяет найти лишь энергию сигнала:

$$W(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) dt; \quad (1)$$

«среднее время задержки» («время задержки центра тяжести») сигнала в точке z трассы:

$$t_{av}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) t dt \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) dt, \quad (2)$$

среднеквадратическую длительность сигнала в точке z трассы

$$\begin{aligned} T_{av}(z) &= \sqrt{(t - t_{av})_{av}^2} = \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) (t - t_{av})^2 dt \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) dt} = \sqrt{(t^2)_{av} - (t_{av})^2} = \\ &= \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) t^2 dt \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) dt - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) t dt \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} I(z,t) dt \right)^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

и среднюю амплитуду сигнала в точке z трассы $A_{av}(z) = \sqrt{W(z)/(2T_{av}(z))}$.

В (1)-(3) $I(z,t) = |A(z,t)|^2$ – временная зависимость интенсивности сигнала в данной точке трассы z , $A(z,t)$ – комплексная амплитуда узкополосного сигнала в данной точке трассы z .

Достоинством метода моментов является отсутствие в самом методе моментов каких-либо дополнительных приближений и ограничений (например, по протяженности трассы). Это позволяет рассматривать результаты, полученные в рамках метода моментов, как хотя и «ограниченные по ассортименту», но зато точные.

Пусть узкополосный сигнал $E(z, t)$ с комплексной огибающей $A(z, t)$ распространяется в однородной изотропной среде вдоль оси z . Тогда:

$$\begin{aligned}
 E(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E_{\omega}(z, \omega) \exp(-i\omega t) d\omega, \\
 E_{\omega}(z, \omega) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} E(z, t) \exp(i\omega t) dt, \\
 E(z, t) &= A(z, t) \exp(-i\omega_1 t) + A^*(z, t) \exp(i\omega_1 t), \\
 A(z, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} A_{\Omega}(z, \Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega, \\
 A_{\Omega}(z, \Omega) &= (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} A(z, t) \exp(i\Omega t) dt, \\
 E_{\omega}(z, \omega) &= A_{\Omega}(z, \omega - \omega_1) + \left(A_{\Omega}(z, -(\omega + \omega_1)) \right)^*, \\
 I(z, t) &= |A(z, t)|^2, \\
 I_{\Omega}(z, \Omega) &= |A_{\Omega}(z, \Omega)|^2 \neq (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} I(z, t) \exp(i\Omega t) dt.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $E(z, t)$ и $E_{\omega}(z, \omega)$ – высокочастотный сигнал и его спектр в точке z , $A(z, t)$ и $A_{\Omega}(z, \Omega)$ – низкочастотная комплексная огибающая сигнала и ее спектр в точке z , $I(z, t)$ и $I_{\Omega}(z, \Omega)$ – интенсивность сигнала и интенсивность его спектра в точке z . Мы предполагаем, что сигнал является узкополосным, то есть ширина спектра сигнала мала в сравнении с частотой несущей ω_1 [1-3], но не обязательно мала в сравнении с шириной спектральной линии.

Обозначим спектр огибающей сигнала $A_{\Omega}(z, \Omega)$ в начальной точке $z = 0$ как $A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \equiv A_{\Omega}(0, \Omega)$. Тогда спектр огибающей сигнала в произвольной точке трассы z :

$$A_{\Omega}(z, \Omega) = A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(ik(\omega_1 + \Omega)z), \tag{5}$$

где $k(\omega) = (\omega/c)n(\omega) = k_r(\omega) + ik_i(\omega)$ – комплексное волновое число для волны с частотой ω , $n(\omega)$ – комплексный показатель преломления среды.

В этих условиях для «средних» характеристик (1)-(3) сигнала имеем [6, Приложение]:

$$W(z) = 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega, \quad (6)$$

$$t_{av}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) \frac{\partial \phi_{\Omega}(z, \Omega)}{\partial \Omega} d\Omega \bigg/ \int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega, \quad (7)$$

$$T_{av}^2(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\left(\frac{\partial |A_{\Omega}(z, \Omega)|}{\partial \Omega} \right)^2 + I_{\Omega}(z, \Omega) \left(\frac{\partial \phi_{\Omega}(z, \Omega)}{\partial \Omega} \right)^2 \right) d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) \frac{\partial \phi_{\Omega}(z, \Omega)}{\partial \Omega} d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega} \right)^2. \quad (8)$$

В (6)-(8) $I_{\Omega}(z, \Omega) = I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-2k_i(\omega_1 + \Omega)z)$ – интенсивность спектра сигнала в точке трассы z ($I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = |A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)|^2$ – то же самое в стартовой точке $z = 0$), $\phi_{\Omega}(z, \Omega) = \arg(A_{\Omega}(z, \Omega)) = \phi_{\Omega}^{(0)}(\Omega) + k_r(\omega_1 + \Omega)z$ – аргумент комплексной огибающей сигнала в точке трассы z ($\phi_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = \arg(A_{\Omega}^{(0)}(\Omega))$ – то же самое в точке старта $z = 0$). $|A_{\Omega}(z, \Omega)| = |A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)| \exp(-k_i(\omega_1 + \Omega)z)$. – модуль комплексной огибающей сигнала в точке трассы z .

Если нам известен стартовый спектр сигнала (то есть ω_1 и $A_{\Omega}^{(0)}(\Omega)$), а также свойства среды (то есть $k(\omega)$), то соотношения (6)-(8) позволяют простым интегрированием неосциллирующих функций найти первые два кумулянта временной зависимости интенсивности сигнала (его среднее время задержки и среднеквадратичную длительность), а также его энергию и среднюю амплитуду в любой точке трассы.

Соотношения (6)-(8) справедливы при любой протяженности трассы и в любой (в том числе и в селективно поглощающей) среде, поскольку они являются прямым следствием соотношений (4),(5) без каких-либо дополнительных предположений. В частности, в них учитывается деформация интенсивности спектра сигнала за счет дисперсии коэффициента поглощения, то есть возможность изменения реальной частоты несущей сигнала по мере роста протяженности трассы (разумеется, сдвиг частоты несущей должен быть мал в сравнении с самой этой частотой, что позволяет рассматривать реальное изменение частоты несущей сигнала как деформацию его комплексной огибающей с сохранением исходной частоты несущей).

Для времени задержки сигнала из (7) следует соотношение:

$$t_{av}(z) = t_{av}^{(0)}(z) + \frac{z}{v_{grav}(z)}, \quad (9)$$

где:

$$t_{av}^{(0)}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) \frac{\partial \phi_{\Omega}^{(0)}(\Omega)}{\partial \Omega} d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega}, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} v_{grav}^{-1}(z) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) \frac{\partial k_r(\omega_1 + \Omega)}{\partial \Omega} d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) v_{gr}^{-1}(\omega_1 + \Omega) d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}(z, \Omega) d\Omega}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$v_{gr}^{-1}(\omega) = \frac{\partial k_r(\omega)}{\partial \omega}. \quad (12)$$

Нетрудно заметить, что $t_{av}^{(0)}(0)$ в (10) – момент прохождения «средней точки» сигнала через точку старта $z = 0$, а $v_{gr}(\omega)$ в (11),(12) – это обычная вещественная групповая скорость электромагнитной волны на данной частоте ω . Поэтому параметр $v_{grav}(z)$ в (11) можно рассматривать как «средневзвешенное» по спектру сигнала в точке трассы z значение его групповой скорости (точнее, величина $v_{grav}^{-1}(z)$ является «средневзвешенной» от обратной величины групповой скорости $v_{gr}^{-1}(z)$ по спектру сигнала). В дальнейшем мы будем именовать эту величину «средней групповой скоростью сигнала». В общем случае с ростом протяженности трассы спектр сигнала деформируется ($I_{\Omega}(z, \Omega) = I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \exp(-2k_i(\omega_1 + \Omega)z)$), поэтому средняя групповая скорость и параметр $t_{av}^{(0)}(z)$ зависят от протяженности трассы z . В результате в общем случае зависимость времени задержки сигнала $t_{av}(z)$ от протяженности трассы z не является линейной функцией протяженности трассы и средняя групповая скорость $v_{grav}(z)$ не может рассматриваться как средняя скорость распространения сигнала – «средней»¹ скоростью сигнала естественно считать величину:

$$v_{av}(z) = \frac{z - 0}{t_{av}(z) - t_{av}(0)} = \left(\frac{1}{v_{grav}(z)} + \frac{t_{av}^{(0)}(z) - t_{av}^{(0)}(0)}{z} \right)^{-1} \neq v_{grav}(z) \quad (13)$$

которая в общем случае отличается от групповой скорости сигнала, хотя бы и «средней».

Тем не менее, во многих случаях отождествление средней скорости сигнала и его средней групповой скорости возможно.

¹ Слово «среднее» здесь используется одновременно в двух смыслах. Во-первых, речь идет о методе моментов, то есть об усредненных параметрах сигнала. Во-вторых, речь идет о средней скорости распространения сигнала (отношение пройденного пути к затраченному времени), а не о его мгновенной скорости (производная от пройденного пути по затраченному времени).

Если, например, спектр сигнала можно считать бесконечно узким ($I_{\Omega}(z, \Omega) = f(z)\delta(\Omega)$), то $t_{av}^{(0)}(z) - t_{av}^{(0)}(0) = 0$, $v_{av}(z) = v_{gr}(\omega_1) = const$ и сигнал распространяется с постоянной скоростью, совпадающей с групповой скоростью на частоте несущей.

Если спектр сигнала не является бесконечно узким, но можно пренебречь дисперсией поглощения (то есть зависимостью коэффициента поглощения от частоты), то есть если $I_{\Omega}(z, \Omega) = I_{\Omega}^{(0)}(\Omega)\exp(-2k_i(\omega_1 + \Omega)z) = I_{\Omega}^{(0)}(\Omega)\exp(-2k_i(\omega_1)z)$, то:

$$v_{grav}^{-1}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) v_{gr}^{-1}(\omega_1 + \Omega) d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) d\Omega} = v_{grav}^{-1}(0) = const, \quad (14)$$

$$t_{av}^{(0)}(z) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \frac{\partial \varphi_{\Omega}^{(0)}(\Omega)}{\partial \Omega} d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) d\Omega} = t_{av}^{(0)}(0) = const, \quad (15)$$

и $v_{av}(z) = v_{grav}(0) = const$, то есть средняя точка сигнала перемещается с постоянной скоростью, равной «средневзвешенной» по стартовому спектру сигнала групповой скорости.

Оба рассмотренных выше приближения, строго говоря, являются «всего лишь аппроксимациями» и с ростом протяженности трассы условия их применимости рано или поздно нарушаются. Тем не менее существует обширный класс сигналов, для которых $v_{av}(z) = v_{grav}(z)$ точно, то есть определенная формулой (11) зависящая от протяженности трассы средняя групповая скорость действительно является средней скоростью сигнала (13).

Речь идет о сигналах с постоянным аргументом стартового спектра сигнала ($\varphi_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = \varphi_{\Omega}^{(0)} = const$), для которых в соответствии с (10), (11) $t_{av}^{(0)}(z) = 0$

и $v_{av}(z) = v_{grav}(z)$. Нетрудно проверить, что в общем случае комплексная огибающая таких сигналов в точке старта имеет вид $A^{(0)}(t) = A_0(t) \exp(i\varphi_0)$, где не обязательно $\varphi_0 = \varphi_\Omega^{(0)}$ (функция $A_0(t)$ может быть комплексной и иметь свою фазу), а функция $A_0(t)$ обладает свойством $(A_0(t))^* = A_0(-t)$. Ясно, что стартовая интенсивность любого сигнала с постоянным аргументом стартового спектра – всегда четная функция времени ($I^{(0)}(t) = I^{(0)}(-t)$) (но не обязательно наоборот) и что любой вещественный (в смысле комплексной амплитуды) в стартовой точке четный или нечетный сигнал относится к этому семейству. Для таких сигналов зависящая (в общем случае) от протяженности трассы средняя групповая скорость сигнала $v_{grav}(z)$ действительно имеет смысл скорости перемещения «средней точки» сигнала в пространстве, то есть $v_{grav}(z) = z/t_{av}(z)$.

В данной работе мы ограничимся именно такими сигналами. Сразу отметим, что (например) сигналы с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ) не относятся к классу сигналов с постоянным аргументом стартового спектра и именно поэтому их скорость (как давно известно [25]) может заметно отличаться от их же групповой скорости (12). Мы предполагаем, что средняя групповая скорость (11) является «заурядной» скоростью распространения сигнала в диспергирующей среде, а отклонение средней скорости некоторых типов сигналов (например, сигналов с ЛЧМ) от их средней групповой скорости является неким дополнительным дифракционным эффектом, который может иметь место (например, для ЛЧМ сигналов) или не иметь места (например, для сигналов с постоянным аргументом стартового спектра).

В заключение пункта еще раз подчеркнем, что с ростом протяженности трассы распределение интенсивности спектра по частотам меняется – следовательно, меняется и средняя групповая скорость распространения сигнала. Это может оказаться существенно в случае близости частоты несущей сигнала к частоте узкой спектральной линии, когда даже небольшое изменение распределения

интенсивности сигнала по спектру способно заметно изменить скорость распространения сигнала.

2. Изменение средней групповой скорости распространения сигнала с ростом протяженности трассы

Итак, с ростом протяженности трассы дисперсия коэффициента поглощения приводит к деформации спектра сигнала, причем эта деформация приводит к «дрейфу» спектра сигнала в сторону частот с меньшим ослаблением (или большим усилением) сигнала. В результате происходит изменение его средней групповой скорости. Это проявляется по-разному сигналов с ограниченным и неограниченным спектром.

Если, например, стартовый спектр сигнала ограничен полосой частот $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$, то с ростом протяженности трассы спектр будет деформироваться, но все равно останется в пределах этой полосы частот. При этом изменение средней групповой скорости сигнала (11) в любом случае будет ограничено множеством значений $\{v_{gr}(\omega) : \omega_{\min} \leq \omega \leq \omega_{\max}\}$, и если в полосе частот $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ групповая скорость, например, является сверхсветовой, то и средняя групповая скорость сигнала при любой протяженности трассы будет сверхсветовой. Если в полосе частот $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ групповая скорость, является досветовой, то и средняя групповая скорость сигнала при любой протяженности трассы будет досветовой. Если же в полосе частот $(\omega_{\min}, \omega_{\max})$ имеются как досветовые, так и сверхсветовые групповые скорости, то с ростом протяженности трассы даже «исходно» сверхсветовой сигнал неизбежно станет «досветовым», потому что «миграция» спектра сигнала будет направлена в сторону меньших коэффициентов ослабления и существует общая теорема [7] о том, что групповая скорость на некоторых частотах может быть сверхсветовой только тогда, когда поглощение на этих частотах больше, чем на других частотах, на которых групповая скорость является досветовой.

Если же стартовый спектр сигнала неограничен, то есть в нем в том или ином количестве присутствуют любые частоты, то его «миграция» в сторону меньших значений коэффициента поглощения ничем не ограничена. Поэтому любой «исходно» сверхсветовой сигнал с неограниченным спектром, даже если его стартовый спектр в основном сосредоточен в «сверхсветовой» области частот, с ростом протяженности трассы неизбежно должен стать «досветовым». Впрочем, на этом метаморфозы не заканчиваются – хорошо известно, что с ростом частоты коэффициент поглощения любой среды стремится к нулю, а показатель преломления – к единице [3]. Поэтому из области «досветовых» групповых скоростей миграция спектра продолжится в сторону высоких частот и «просто световых» групповых скоростей. Поэтому «карьера» любого исходно сверхсветового сигнала с несущей вблизи центра спектральной линии поглощения и неограниченным спектром выглядит как «сверхсветовая групповая скорость»-«досветовая групповая скорость»-«световая групповая скорость», а «карьера» любого «досветового» сигнала с несущей на периферии спектральной линии поглощения и неограниченным спектром как «досветовая групповая скорость»-«световая групповая скорость».

В качестве иллюстрации рассмотрим распространение сигнала с «параболическим» исходным спектром:

$$A_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = \begin{cases} T_p(1 - T_p^2 \Omega^2), & |\Omega| \leq T_p^{-1} \\ 0, & |\Omega| > T_p^{-1} \end{cases}, \quad (16)$$

и стартовой комплексной огибающей:

$$A^{(0)}(t) = 4 \left(\frac{T_p}{t} \right)^2 \left[\frac{T_p}{t} \sin \left(\frac{t}{T_p} \right) - \cos \left(\frac{t}{T_p} \right) \right], \quad (17)$$

в среде с лоренцевой спектральной линией поглощения и волновым числом:

$$k(\omega) = \frac{\omega}{c} + \frac{i\alpha}{1 - i(\omega - \omega_0)\tau}. \quad (18)$$

В (16)-(18) T_p – характерная стартовая длительность сигнала с частотой несущей ω_1 , ω_0 – центральная частота спектральной линии, α – коэффициент поглощения (по амплитуде) в центре спектральной линии, τ – время когерентности спектральной линии.

График стартовой интенсивности этого сигнала приведен на рис. 1а, график стартовой интенсивности его спектра (при различных значениях параметра T_p и совпадении частоты несущей с центральной частотой спектральной линии, $\omega_1 = \omega_0$) – на рис 1б. Сигнал (16),(17) является сигналом с вещественным стартовым спектром и потому относится к классу сигналов с постоянной стартовой фазой, максимальное значение стартового сигнала достигается при $t = 0$ и равно $4/3$. «Среднеквадратичная» (3) стартовая длительность сигнала (17) равна $T_{av}(0) = \sqrt{\frac{5}{2}}T_p$.

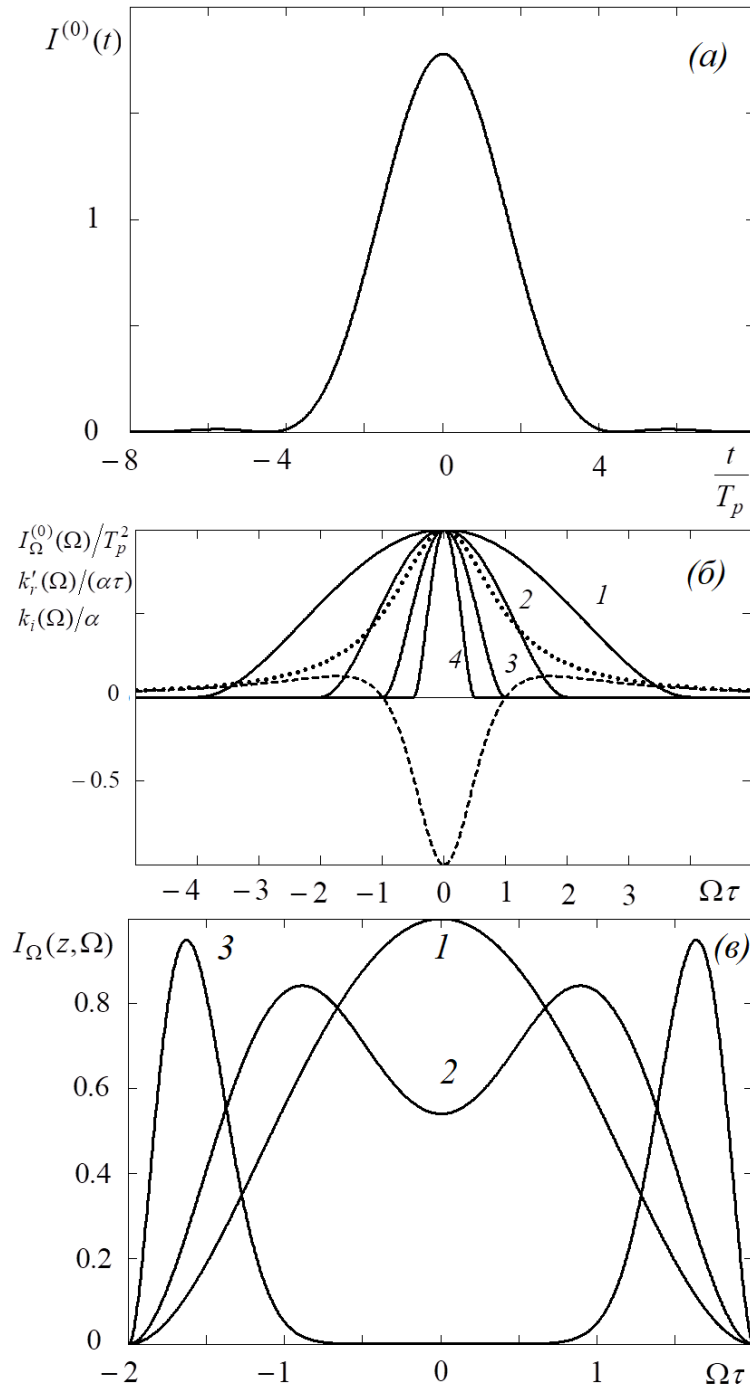


Рис. 1. (а) – временная зависимость $I^{(0)}(t)$ сигнала (17) в стартовой точке $z = 0$;

(б) – интенсивность спектра сигнала (18) в стартовой точке $z = 0$ при:
 $T_p = \tau/4$ (кривая 1), $T_p = \tau/2$ (кривая 2), $T_p = \tau$ (кривая 3) и $T_p = 2\tau$ (кривая 4),

а также производная волнового числа по частоте (штриховая кривая) и мнимая часть волнового числа (пунктир) для лоренцевой спектральной линии поглощения (19) с временем когерентности τ , (в) – деформация интенсивности спектра сигнала 2 с рис. 1б ($T_p = \tau/2$) при увеличении

протяженности трассы z в селективно-поглощающей среде.

Кривая 1 – $\xi = \alpha z = 0$, кривая 2 ($\times 4$) – $\xi = \alpha z = 1$, кривая 3 ($\times 2000$) – $\xi = \alpha z = 10$.

Выбор еще более простого сигнала с ограниченным спектром (sinc-сигнала) в данном случае невозможен, потому что его спектр меняется слишком резко и сигнал слишком медленно убывает на периферии, в результате чего для sinc-сигнала интегралы (3) и (8) расходятся – такие сигналы вполне реальны, но метод моментов к ним, увы, неприменим – их «среднеквадратичная» длительность бесконечна.

Четыре изображенных на рисунке варианта спектра сигнала соответствуют разным соотношениям между шириной спектра сигнала и шириной области сверхсветовых групповых скоростей для данной спектральной линии. Так, например, сигналы 1 и 2 имеют спектр, расположенный как в области сверхсветовых, так и в области досветовых групповых скоростей. Ясно, что с ростом протяженности трассы для этих сигналов будет происходить относительное усиление «досветовой» части спектра и ослабление «сверхсветовой». Этот процесс показан на рис. 1в для сигнала 2. В конце концов (при неограниченном увеличении протяженности трассы) скорость распространения сигнала 1 будет соответствовать «досветовым» частотам $\omega = \omega_0 \pm 4/\tau$, а скорость распространения сигнала 2 – «досветовым» частотам $\omega = \omega_0 \pm 2/\tau$. Сигналы 3 и 4 полностью расположены в «сверхсветовой» части спектра, но спектр сигнала 3 «примыкает» к границе между «сверхсветовыми» и «досветовыми» частотами и потому при неограниченном увеличении протяженности трассы этот сигнал будет распространяться с «просто световой» скоростью, соответствующей частотам $\omega = \omega_0 \pm 1/\tau$. Сигнал же 4 полностью расположен в «сверхсветовой» части спектра и при неограниченном увеличении протяженности трассы будет распространяться со сверхсветовой скоростью, соответствующей частотам $\omega = \omega_0 \pm 1/(2\tau)$.

Поскольку ранг разрыва спектра сигналов 1-4 на границе спектра равен 1 (рвется не спектр, а только его производная), то асимптотика этих сигналов при неограниченном росте протяженности трассы будет [27] «обобщенной лоренцевой» то есть $I(z,t) = I_{\max}(z) / \left(1 + (t/T_{as}(z))^2\right)^2$. При этом

в данном случае спектр сигнала концентрируется на обоих концах интервала в равной мере, поэтому возникает два одинаковых интерферирующих сигнала на двух крайних частотах и результирующий лоренцев сигнал будет «изрезан» интерференционными осцилляциями с частотой, равной разности крайних частот его спектра. Ясно, что на практике такой строгой симметрии не будет, одна из половин спектра сигнала будет доминировать, а осцилляций не будет.

На рис. 2 приведены результаты расчетов «средних» параметров сигналов 1-4 с рис. 1б, а именно – десятичного логарифма коэффициента пропускания $\lg K = \lg(W(z)/W(0))$ на рис. 2а, среднего времени задержки (за вычетом обычной «световой» задержки² сигнала z/c) на рис. 2б и среднеквадратичной продолжительности сигнала на рис. 2в при различной оптической толщине трассы $\xi = \alpha z$. Ясно, что отрицательные значения «дополнительной к световой» задержки сигнала соответствуют сверхсветовой скорости сигнала, а положительные – досветовой.

² Это неизбежно. Дело в том, что «дополнительная к световой» задержка зависит от оптической толщины слоя $\xi = \alpha z$, а «геометрическая световая» - от геометрической толщины слоя z и установить соотношение между ними без конкретизации величины коэффициента поглощения α невозможно. Это замечание, кстати, показывает, что принципиальной разницы между «временем задержки меньше светового» и «отрицательным временем задержки» нет – если некоторое опережение сигнала (по причине большого коэффициента поглощения) «набрано» на короткой дистанции, мы имеем отрицательное время задержки и отрицательную групповую скорость. Если же опережение сигнала (по причине небольшого коэффициента поглощения) «набрано» на большой дистанции, мы имеем положительное суммарное время задержки меньше «светового» и положительную сверхсветовую групповую скорость.

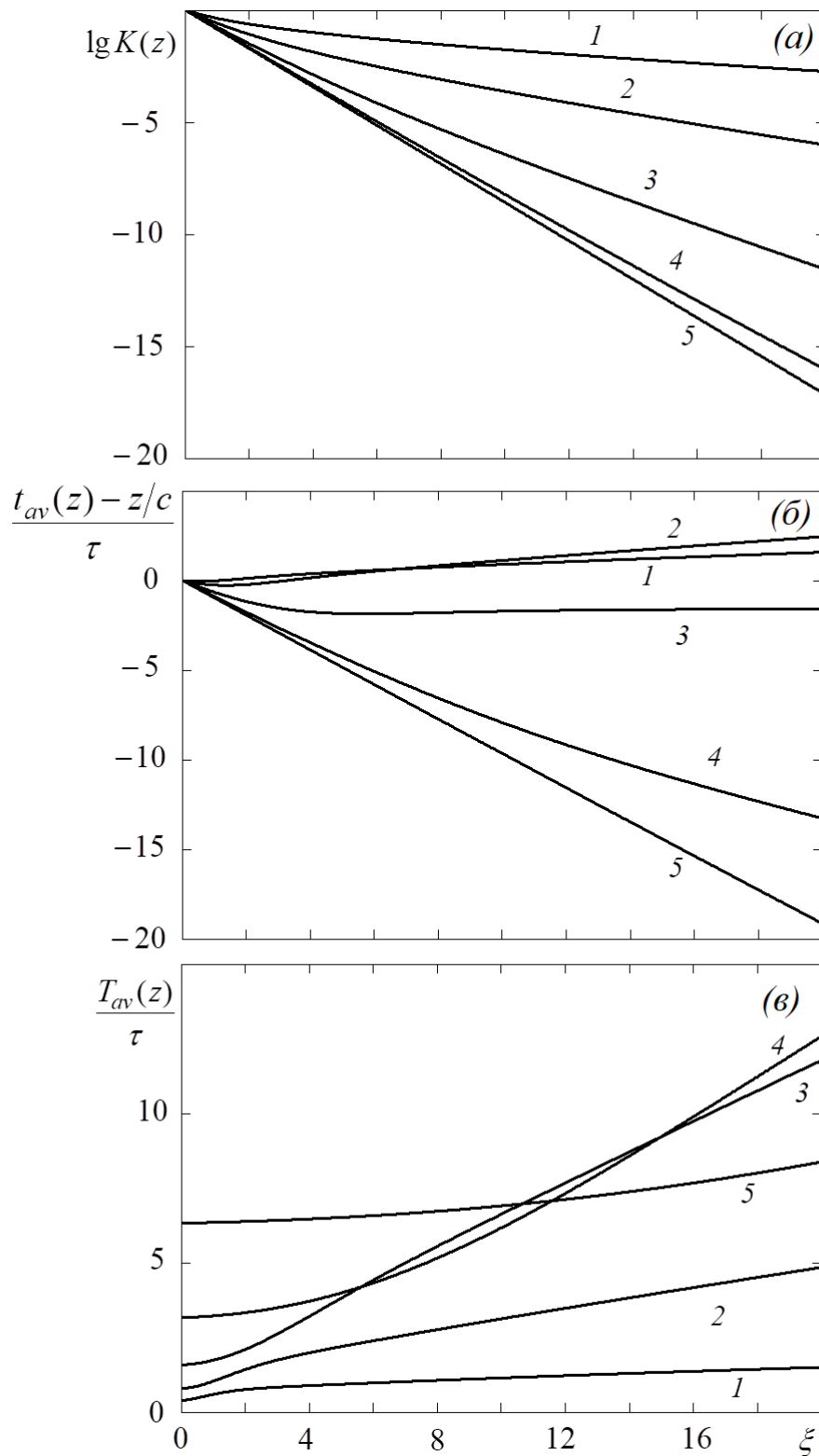


Рис. 2. Зависимость десятичного логарифма коэффициента пропускания (а), «центра тяжести» сигнала (б) и его среднеквадратичной продолжительности (в) от оптической толщины трассы $\xi = \alpha z$ для сигналов, несущая частота которых совпадает с центром спектральной линии поглощения при исходной продолжительности $T_p = \tau/4$ (кривая 1), $T_p = \tau/2$ (кривая 2), $T_p = \tau$ (кривая 3) и $T_p = 2\tau$ (кривая 4) и $T_p = 4\tau$ (кривая 5).

Из рис. 2 видно, что для сигнала 5 зависимость логарифма коэффициента пропускания и дополнительного (к световой) времени задержки практически линейна, а продолжительность сигнала (по крайней мере в пределах рассмотренных оптических толщин слоя) почти не меняется. Это означает, что сигнал 5 распространяется «в рамках первого порядка классической теории дисперсии» и миграция его спектра при $\xi \leq 20$ несущественна. В сущности, по-другому и быть не могло – спектр этого сигнала достаточно узок, целиком расположен в самой середине «сверхсветовой» области частот и одновременно – в зоне максимальных значений коэффициента поглощения. Его участь – распространяться с ярко выраженной сверхсветовой скоростью и быстро затухать. Так, например, при $\xi = 20$ его «опережение» (отрицательная задержка) достигает примерно трех значений его же длительности. Это достаточно много для того, чтобы уверенно говорить о его сверхсветовом распространении, но за это «заплачено» ослаблением сигнала примерно на 170 дБ, что делает крайне проблематичным его экспериментальное изучение.

Единственное отличие сигнала 4 (в 2 раза более короткого, чем сигнал 5) – заметное отклонение «его» кривых на рис. 2а и 2б от прямых линий, что свидетельствует о заметной «миграции спектра», которая, впрочем, не изменяет и не может изменить его «сверхсветового» характера. Заметно также гораздо более быстрое увеличение его продолжительности с ростом протяженности трассы, что тоже естественно – известно, что чем короче сигнал «на старте», тем быстрее растет его длительность «на трассе».

Сигнал 3 затухает еще медленнее (всего-то 120 дБ при $\xi = 20$) и для него миграция спектра приводит к тому, что после короткого периода сверхсветового распространения его дополнительная (к световой) задержка «выходит на ноль» и он распространяется с «просто световой» скоростью.

Еще короче «сверхсветовой век» у сигналов 1 и 2. Они после весьма быстро заканчивающегося периода сверхсветовой скорости уверенно выходят на досветовую скорость. Очевидно, это связано с наличием в их стартовом спектре «досветовых» частот, которые очень быстро начинают доминировать над

«сверхсветовыми», гораздо более подверженными поглощению. Относительно медленное дисперсионное расплывание сигналов 1 и 2, вероятно, связано с частичной компенсацией в пределах их широкого спектра положительных и отрицательных участков второй производной от вещественной части волнового числа, которая, как известно, в основном и контролирует дисперсионное расплывание волнового пакета. Можно сказать и по-другому – спектр этих сигналов заметно шире спектральной линии и они «чувствуют себя» «больше в вакууме, чем в диспергирующей среде», а в вакууме сигналы не расплываются.

По поводу возможности экспериментального наблюдения «ярко выраженного сверхсвета»³ при распространении сигнала с несущей вблизи центральной частоты спектральной линии поглощения, как нам кажется, не следует проявлять неумеренный оптимизм. Действительно, в работе [28] показано, что в самом общем случае опережение (как, впрочем, и задержка) сигнала на 10 «времен жизни информации» в любой среде приводит к его ослаблению примерно на 100 дБ (на 20 «времен жизни» – на 200 дБ). В случае лоренцевой спектральной линии «время жизни информации» – это время когерентности спектральной линии. Ориентируясь как на «допустимое» на ослабление сигнала на 100 дБ, имеем реально допустимую величину опережения сигнала примерно в 10τ . Спектр сигнала для блокирования эффектов миграции спектра должен быть не шире τ^{-1} , а длительность – не менее 8τ (см. рис. 1б, кривая 4 и рис. 1а). В результате имеем при максимально допустимом ослаблении сигнала в 100 дБ время задержки, практически равное продолжительности сигнала. В сущности, именно такая не особенно радостная картина и имеет место и в типичных экспериментах по «сверхскоростям» [11], и в наших расчетах на рис. 2.

Таким образом, основным «врагом» сверхскоростей являются отнюдь не мифические «ограничения теории относительности», а вполне реальный факт слабости «сверхсветовых» сигналов в сравнении с «досветовыми».

³ То есть опережения сигнала в несколько продолжительностей этого сигнала.

Впрочем, кроме «ярко выраженной» сверхскорости имеет место и «неярко выраженная». Речь идет о том, что все кривые на рис. 2б (повторенные в большем масштабе на рис. 3а) на начальном этапе имеют «падающий» участок, что свидетельствует о сверхсветовой скорости распространения этих сигналов на начальном этапе даже в том случае, когда в дальнейшем они распространяются (как, например, сигналы 1 и 2) с досветовой скоростью.

Это не случайность. Нетрудно доказать, что начальное движение со сверхсветовой скоростью является общим правилом для любых (не только с ограниченным, но и с неограниченным спектром) сигналов, максимум стартового спектра которых расположен в пределах «сверхсветовой» области частот.

Действительно, для разницы обратной средней групповой скорости и обратной скорости света из (11) имеем:

$$v_{grav}^{-1}(0) - c^{-1} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) \frac{\partial}{\partial \Omega} \left(\frac{\omega_1 + \Omega}{c} (n_r(\omega_1 + \Omega) - 1) \right) d\Omega}{\int_{-\infty}^{+\infty} I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) d\Omega}. \quad (19)$$

В случае $I_{\Omega}^{(0)}(\Omega) = 1$ (равномерный спектр) интеграл в числителе (20) обращается в ноль, потому что в соответствии с [3, с.399, ф. (84.7)] или [29]

при $\Omega \rightarrow \infty$ имеем $n_r(\omega_0 + \Omega) \rightarrow 1 + const/\Omega$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \Omega} \left(\frac{\omega_1 + \Omega}{c} (n_r(\omega_1 + \Omega) - 1) \right) d\Omega =$

$$= \lim_{\Omega \rightarrow +\infty} \left[\frac{\omega_1 + \Omega}{c} (n_r(\omega_1 + \Omega) - 1) \right] - \lim_{\Omega \rightarrow -\infty} \left[\frac{\omega_1 + \Omega}{c} (n_r(\omega_1 + \Omega) - 1) \right] = 0.$$

Поэтому в случае «равномерного» исходного спектра сигнала числитель дроби (19) обращается в 0 и начальная средняя групповая скорость сигнала в точности равна вакуумной скорости света. Если же в точке старта спектр сигнала имеет максимум на центральной частоте спектральной линии (при некоторых дополнительных условиях – на любой частоте области «сверхсветовых» частот), то числитель дроби (19) отрицателен и стартовая средняя групповая скорость

сигнала окажется сверхсветовой. Разумеется, для сигналов с достаточно широким спектром в результате деформации спектра за счет дисперсии коэффициента поглощения эта сверхсветовая скорость быстро сменится на досветовую, но факт остается фактом – стартовая скорость любого сигнала с несущей частотой, совпадающей с центральной частотой линии поглощения, всегда является сверхсветовой.

Для иллюстрации этого эффекта на рис. 3б и 3в приведены результаты расчета временной зависимости исходной продолжительностью $T_p = \tau / 2$ (кривая 2 на рис. 3а) при оптической толщине слоя $\xi = \alpha z = 0$ (кривая 1), $\xi = \alpha z = 0.5$ (кривая 2) и $\xi = \alpha z = 1$ (кривая 3). «Вакуумная» световая задержка сигналов на рис. 3б и 3в не показана, то есть сдвиг кривых влево соответствует сверхсветовой скорости распространения сигнала. Отметим, что кривые на рис. 3б не нормированы, то есть речь идет о явно сверхсветовом распространении отнюдь не «сверхслабых» сигналов – так, например, максимальная интенсивность сигнала 3 (опережение около 40% от ширины на уровне половины максимума интенсивности) всего в 3.65 раза меньше максимальной интенсивности «стартового» сигнала 1.

3. Групповая скорость сигнала при распространении на периферии спектральной линии

Итак, в случае частоты несущей сигнала вблизи центра спектральной линии поглощения выясняется неприятное обстоятельство – сигнал действительно распространяется со сверхсветовой групповой скоростью, но для того, чтобы время группового опережения составляло хотя бы несколько длительностей сигнала, протяженность трассы должна быть такой, при которой от сигнала практически ничего не остается.

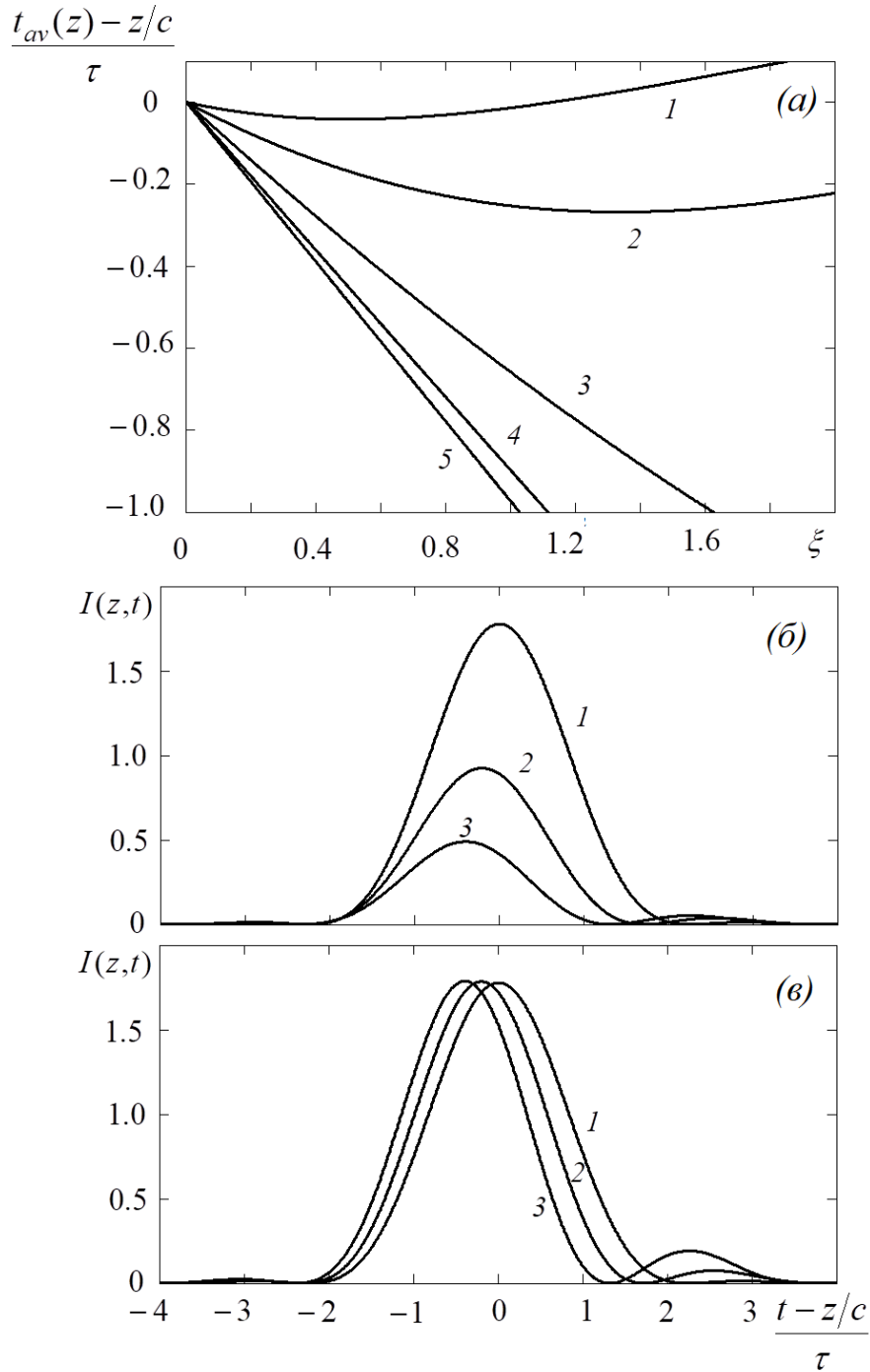


Рис. 3. (а) – зависимость «центра тяжести» сигнала от оптической толщины трассы $\xi = \alpha z$ для сигналов с исходной продолжительностью $T_p = \tau/4$ (кривая 1), $T_p = \tau/2$ (кривая 2), $T_p = \tau$ (кривая 3) и $T_p = 2\tau$ (кривая 4) и $T_p = 4\tau$ (кривая 5). То есть ровно то же самое, что на рис. 2б, но крупнее. (б) – временная зависимость сигнала с исходной продолжительностью $T_p = \tau/2$ при оптической толщине слоя $\xi = \alpha z = 0$ (кривая 1), $\xi = \alpha z = 0.5$ (кривая 2) и $\xi = \alpha z = 1$ (кривая 3), (в) – то же самое, что на (б), но кривые 2 и 3 нормированы по кривой 1 (кривая 2 увеличена в 1.9 раз, кривая 3 – в 3.65 раза).

Это обстоятельство имеет под собой вполне объективное основание [28] – если длительность сигнала велика в сравнении с временем когерентности спектральной линии (иначе спектр сигнала просто «не поместится» в спектральную линию) и если относительное (в сравнении с продолжительностью сигнала) время задержки (хотя бы и отрицательной) сигнала не мало, то время задержки должно составлять по меньшей мере несколько десятков времен когерентности спектральной линии. Время же задержки в несколько десятков времен когерентности спектральной линии неизбежно [28] приводит к крайней слабости сигнала.

Ясно, что для достижения больших относительных (в сравнении с длительностью сигнала) времен задержки сигнала без его катастрофического ослабления остается только одна возможность – использовать сигналы с длительностью, малой в сравнении с временем когерентности спектральной линии, а это возможно только тогда, когда частота несущей сигнала достаточно сильно отличается от центральной частоты спектральной линии, то есть спектр сигнала расположен «на крыле» спектральной линии. При этом в случае спектральной линии поглощения групповая скорость сигнала будет досветовой, а в случае спектральной линии усиления – сверхсветовой.

В качестве иллюстрации распространения сигнала на крыле спектральной линии поглощения на рис. 4 приведена зависимость десятичного логарифма коэффициента пропускания (а), «центра тяжести» сигнала (б) и его среднеквадратичной продолжительности (в) от оптической толщины трассы $\xi = \alpha z$ для сигналов с исходной продолжительностью $T_p = \tau/100$ (кривая 1), $T_p = \tau/50$ (кривая 2), $T_p = \tau/25$ (кривая 3), $T_p = 0.08\tau$ (кривая 4) и $T_p = 0.16\tau$ (кривая 5).

В качестве иллюстрации распространения сигнала на крыле спектральной линии усиления на рис. 5 приведена зависимость десятичного логарифма коэффициента поглощения (а), «центра тяжести» сигнала (б) и его среднеквадратичной продолжительности (в) от оптической толщины слоя вещества

$\xi = \alpha z$ для сигналов с исходной продолжительностью $T_p = \tau/50$ (кривая 2), $T_p = \tau/25$ (кривая 3), $T_p = 0.08\tau$ (кривая 4) и $T_p = 0.16\tau$ (кривая 5).

Все приведенные на рисунках 4,5 графики относятся к случаю, когда несущая частота сигнала Ω_1 достаточно далека от центральной частоты спектральной линии поглощения ($\Omega_1 = 100/\tau$), а длительность сигнала достаточно мала для того, чтобы его задержка (на рис. 4) или опережение (на рис. 5) в несколько продолжительностей сигнала не приводили к его катастрофическому ослаблению (на рис. 4) или усилению (на рис. 5).

Отличие рис. 5 от рис. 4 состоит лишь в знаке оптической толщины слоя вещества $\xi = \alpha z$. Теперь она отрицательна, потому что речь идет не о спектральной линии поглощения с положительным коэффициентом поглощения $\alpha > 0$, а о спектральной линии усиления, коэффициент усиления которой в центре спектральной линии положителен ($-\alpha > 0, \alpha < 0, \xi = \alpha z < 0$). Линия (1), соответствующая $T_p = \tau/100$, на рис. 5 не показана – спектр этого сигнала достаточно широк для того, чтобы «дотянуться» до центра спектральной линии и вместо распространения со сверхсветовой скоростью мы имеем генерацию могучего усиленного сигнала на частоте спектральной линии, совершенно не похожего на исходный.

Результаты расчетов, приведенные на рис. 4 и 5, показывают, что использование сигналов с исходной длительностью много меньше «времени памяти» [28] среды (в данном случае – времени когерентности спектральной линии) позволяет «реабилитировать» групповую скорость – время задержки (или опережения) сигнала действительно может быть гораздо больше длительности сигнала без его катастрофического ослабления (или усиления), причем принципиальной разницы между задержкой и опережением сигнала нет.

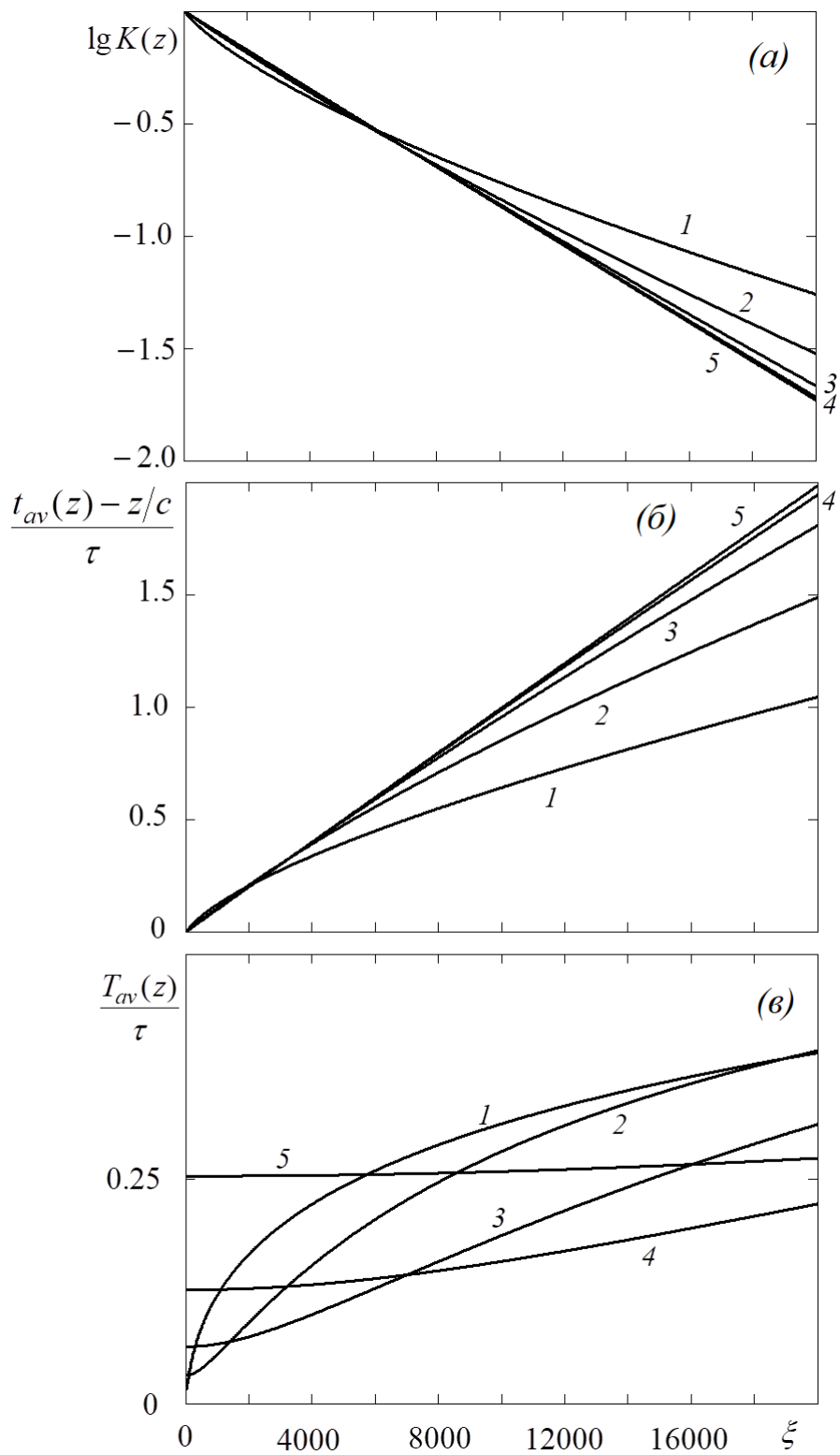


Рис. 4. Зависимость десятичного логарифма коэффициента пропускания (а), «центра тяжести» сигнала (б) и его среднеквадратичной продолжительности (в) от оптической толщины трассы $\xi = \alpha z$ для сигналов с исходной продолжительностью $T_p = \tau/100$ (кривая 1), $T_p = \tau/50$ (кривая 2), $T_p = \tau/25$ (кривая 3), $T_p = 0.08\tau$ (кривая 4) и $T_p = 0.16\tau$ (кривая 5). Несущая сигнала расположена на крыле спектральной линии поглощения, $\Omega_1 = 100/\tau$.

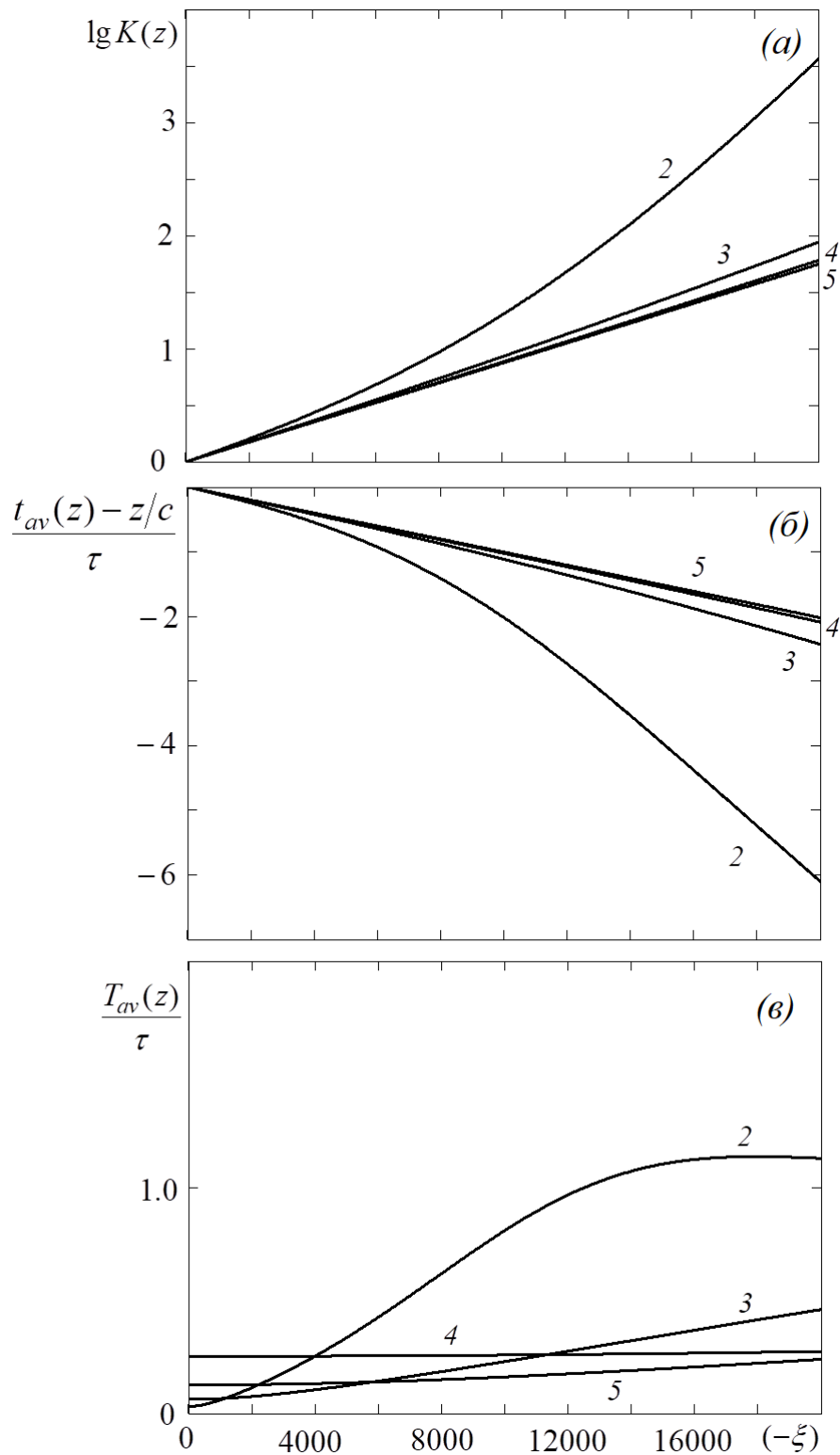


Рис. 5. Зависимость десятичного логарифма коэффициента пропускания (а), «центра тяжести» сигнала (б) и его среднеквадратичной продолжительности (в) от оптической толщины слоя вещества $\xi = \alpha z$ для сигналов с исходной продолжительностью $T_p = \tau/50$ (кривая 2), $T_p = \tau/25$ (кривая 3), $T_p = 0.08\tau$ (кривая 4) и $T_p = 0.16\tau$ (кривая 5). Несущая сигнала расположена на крыле спектральной линии усиления, $\Omega_1 = 100/\tau$.

В качестве иллюстрации на рис. 6 приведена временная зависимость сигнала с исходной продолжительностью $T_p = 0.16\tau$ (кривая 5 с рис. 5) при оптической толщине слоя $\xi = \alpha z = 0$ (кривая 1), $-\xi = \alpha z = -10000$ (кривая 2), $\xi = \alpha z = -20000$ (кривая 3) и $\xi = \alpha z = -30000$ (кривая 4).

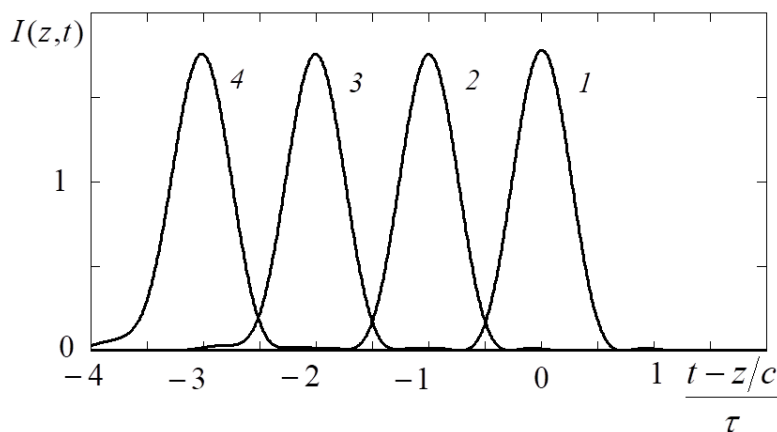


Рис. 6. Временная зависимость сигнала с исходной продолжительностью $T_p = 0.16\tau$ (сигнал 5 с рис. 5) при оптической толщине слоя $\xi = \alpha z = 0$ (кривая 1, $I(t)$), $-\xi = \alpha z = -10000$ (кривая 2, $I(t)/7.5$), $\xi = \alpha z = -20000$ (кривая 3, $I(t)/55$) и $\xi = \alpha z = -30000$ (кривая 4, $I(t)/400$). Несущая сигнала расположена на крыле спектральной линии усиления.

Впрочем, и в этом случае сверхсветовая групповая скорость оказывается в «невыигрышном» положении – слой поглощающей среды с оптической толщиной (по коэффициенту поглощения в центре спектральной линии) $\xi = 20000$ не является «экзотикой» – в сущности это просто достаточно толстый слой любой прозрачной (в своей области прозрачности⁴) среды, которая в области непрозрачности может демонстрировать сколь угодно сильное поглощение и при этом «никому не мешать». Аналогичный слой усиливающей среды с оптической толщиной $\xi = -20000$ и коэффициентом усиления (по интенсивности) в центре линии усиления около 10^{17371} – явная фантастика. Складывается впечатление, что в области экспериментального

⁴ «Область прозрачности» любой термодинамически-равновесной среды – это и есть область частот, «битком набитая» крыльями многочисленных линий поглощения, локализованных в «области непрозрачности» той же самой среды. Так, например, в области прозрачности обычного оптического стекла имеется огромное количество «крыльев» спектральных линий и полос поглощения из инфракрасной и ультрафиолетовой части спектра.

«сверхсвета» «фаворитом» являются все-таки именно космические мазеры, способные в силу ряда особенностей (в первую очередь – сильного неоднородного уширения полосы усиления) обеспечить опережение сигнала, сравнимое с его продолжительностью, без заметного роста энергии сигнала [28].

Заключение

«Средняя по спектру» сигнала групповая скорость (11) описывает перемещение «центра тяжести» не всех, но широкого класса узкополосных сигналов (а именно – сигналов с постоянной начальной фазой спектра) при любой протяженности трассы, в том числе и за пределами области применимости первого порядка классической теории дисперсии, где временная зависимость сигнала может существенно исказиться. Это относится как к досветовым, так и к сверхсветовым групповым скоростям.

Дисперсия поглощения с ростом протяженности трассы неизбежно искажает распределение спектра сигнала по частотам. При этом соответственно изменяется и его групповая скорость. Так, в частности, исходно сверхсветовая групповая скорость с ростом протяженности трассы вполне может смениться на досветовую. Более того, для любых сигналов с неограниченным спектром (в том числе и для любых сигналов искусственного происхождения) при достаточной протяженности трассы это неизбежно. Обратный переход – от досветовой групповой скорости к сверхсветовой – невозможен.

Несмотря на тесную связь между поглощением (усилением в среде с инверсией населенностей) и дополнительной (к «световой») групповой задержкой (или опережением) сигнала [28] возможны ситуации, когда дополнительная (к вакуумной) групповая задержка (или опережение в среде с инверсией населенностей) сигнала существенно превышает его длительность при несущественном изменении энергии сигнала. Это возможно тогда, когда продолжительность сигнала мала в сравнении с «временем памяти» среды. Тем не менее, среды, необходимые для существенного группового опережения сверхсветового сигнала являются большой редкостью. Из реально существующих

сред ближе всего к этому «идеалу» находятся космические мазеры, но и для них опережение сигналом скорости света в лучшем случае составляет доли длительности сигнала [28]. Именно это обстоятельство (а отнюдь не мифические «ограничения теории относительности») и является причиной «экзотичности» сверхсветовых групповых скоростей.

Если не требовать величин группового опережения сигнала в несколько его продолжительностей, то «экзотичность» сверхсветовых скоростей является кажущейся. А именно, любой сигнал с частотой несущей, находящейся вблизи центральной частоты спектральной линии поглощения, на начальном участке трассы перемещается именно со сверхсветовой групповой скоростью, причем его поглощение при этом незначительно. Разумеется, с ростом протяженности трассы эта сверхсветовая групповая скорость сменяется на досветовую (в случае достаточно широкого спектра сигнала) или незначительное поглощение сменяется на катастрофическое (в случае узкого спектра).

Литература

1. Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П. Теория волн. – 1979.
2. Вайнштейн Л. А. Распространение импульсов //Успехи физических наук. – 1976. – Т. 118. – №. 2. – С. 339-367.
<https://doi.org/10.3367/UFNr.0118.197602h.0339>
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. – Гостехиздат, 1957.
4. Власов С. Н., Петрищев В. А., Таланов В. И. Усредненное описание волновых пучков в линейных и нелинейных средах (метод моментов) //Изв. вузов. Радиофизика. – 1971. – Т. 14. – №. 9. – С. 1453-1463.
5. Блюх П. В. Сжатие импульса излучения в диспергирующей среде со случайными неоднородностями //Изв. вузов. Радиофизика. – 1964. – Т. 7. – №. 3. – С. 460-470.

6. Бухман Н.С. Об изменении длительности узкополосного сигнала в диспергирующей среде с ростом протяженности трассы (в рамках метода моментов) // Известия вузов. Радиофизика. – 2024. – Т. 67. – № 2. – С. 187-202.
https://doi.org/10.52452/00213462_2024_67_02_187
7. Macke B., Ségard B., Wielonsky F. Optimal superluminal systems //Physical Review E–Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics. – 2005. – Т. 72. – №. 3. – С. 035601. <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.72.035601>
8. Wang L. J., Kuzmich A., Dogariu A. Gain-assisted superluminal light propagation //Nature. – 2000. – Т. 406. – №. 6793. – С. 277-279.
<https://doi.org/10.1038/35018520>
9. Talukder M. A. I., Amagishi Y., Tomita M. Superluminal to subluminal transition in the pulse propagation in a resonantly absorbing medium //Physical Review Letters. – 2001. – Т. 86. – №. 16. – С. 3546.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.3546>
10. Dogariu A., Kuzmich A., Wang L. J. Transparent anomalous dispersion and superluminal light-pulse propagation at a negative group velocity //Physical Review A. – 2001. – Т. 63. – №. 5. – С. 053806.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevA.63.053806>
11. Акульшин А. М., Чиммино А., Опат Д. И. Отрицательная групповая скорость светового импульса в парах цезия //Квантовая электроника. – 2002. – Т. 32. – №. 7. – С. 567-569. <https://doi.org/10.1070/QE2002v032n07ABEH002249>
12. Macke B., Ségard B. Propagation of light-pulses at a negative group-velocity //The European Physical Journal D-Atomic, Molecular, Optical and Plasma Physics. – 2003. – Т. 23. – С. 125-141. <https://doi.org/10.1140/epjd/e2003-00022-0>
13. Akulshin A. M. et al. Pulses of» fast light,» the signal velocity, and giant Kerr nonlinearity //LASER PHYSICS-LAWRENCE-. – 2005. – Т. 15. – №. 9. – С. 1252.
14. Золотовский И. О., Семенцов Д. И. Скорость максимума огибающей частотно-модулированного гауссова импульса в усиливающей нелинейной среде //Оптика и спектроскопия. – 2005. – Т. 99. – №. 1. – С. 89-92.

15. Золотовский И. О., Семенцов Д. И. Скорость огибающей импульса в туннельно-связанных оптических волноводах с сильно различающимися параметрами // Оптика и спектроскопия. – 2006. – Т. 101. – №. 1. – С. 120-123. <https://doi.org/10.1134/S0030400X06070204>
16. Macke B., Ségard B. From fast to slow light in a resonantly driven absorbing medium // Physical Review A—Atomic, Molecular, and Optical Physics. – 2010. – Т. 82. – №. 2. – С. 023816. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.023816>
17. Akulshin A. M., McLean R. J. Fast light in atomic media // Journal of Optics. – 2010. – Т. 12. – №. 10. – С. 104001. <https://doi.org/10.1088/2040-8978/12/10/104001>
18. Малыкин Г. Б., Романец Е. А. Сверхсветовые движения (обзор) // Оптика и спектроскопия. – 2012. – Т. 112. – №. 6. – С. 993-993. <https://doi.org/10.1134/S0030400X12040145>
19. Золотовский И. О., Минвалиев Р. Н., Семенцов Д. И. Динамика частотно-модулированных волновых пакетов в световодах с комплексными материальными параметрами // Успехи физических наук. – 2013. – Т. 183. – №. 12. – С. 1353-1365. <https://doi.org/10.3367/UFNr.0183.201312e.1353>
20. Macke B., Ségard B. Simultaneous slow and fast light involving the Faraday effect // Physical Review A. – 2016. – Т. 94. – №. 4. – С. 043801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.94.043801>
21. Ravelo B. Investigation on microwave negative group delay circuit // Electromagnetics. – 2011. – Т. 31. – №. 8. – С. 537-549. <https://doi.org/10.1080/02726343.2011.621106>
22. Macke B., Ségard B. // Opt. Commun. 2008. V. 281. № 1. P. 12-17. <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2007.09.007>
23. Tanaka H. et al. Propagation of optical pulses in a resonantly absorbing medium: Observation of negative velocity in Rb vapor // Physical Review A. – 2003. – Т. 68. – №. 5. – С. 053801. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.68.053801>
24. Macke B., Ségard B. On-resonance material fast light // Physical Review A. – 2018. – Т. 97. – №. 6. – С. 063830. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.80.011803>

25. Бухман Н. С. О скорости распространения частотно-модулированного волнового пакета в диспергирующей поглощающей среде //Оптика и спектроскопия. – 2004. – Т. 97. – №. 1. – С. 123-130.
<https://doi.org/10.1134/1.1781291>
26. Стрелков Г.М., Худышев Ю.С. О “сверхсветовом” распространении электромагнитного импульса в резонансно-поглощающей газовой среде // Радиотехника и электроника. – 2023. – Т. 68. – № 1. – С. 37-43.
27. Бухман Н. С., Куликова А. В. О влиянии дисперсии поглощения на временную зависимость голономного узкополосного сигнала вдали от точки излучения //журнал радиоэлектроники. – 2023. – №. 2.
<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2023.2.5>
28. Бухман Н.С. О связи между ослаблением и временем запаздывания узкополосного сигнала в диспергирующей среде. // Журнал радиоэлектроники. 2024. – № 5. <https://doi.org/10.30898/1684-1719.2024.5.12>
29. Бухман Н. С., Куликова А. В. О характере дисперсии показателя преломления вблизи уединенной спектральной линии //Радиотехника и электроника. – 2015. – Т. 60. – №. 5. – С. 535-535.

Для цитирования:

Бухман Н.С. О скорости распространения узкополосного сигнала в диспергирующей среде (в рамках метода моментов). // Журнал радиоэлектроники. – 2025. – № 7.
<https://doi.org/10.30898/1684-1719.2025.7.2>